Ministry of Education
N. C. of exam, Assess & Edu. Evaluation
D. G. of General Examinations

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
المركز الوطني للامتحانات والقياس والتقويم التربوي
الإدارة العامة للامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة
الدورة الأولى - لعام ٢٠٢٤م

الفرع: العلمي
المبحث: الرياضيات
الورقة: الثانية
الجلسة: ---

اليوم: السبت ٨٨/١٢
التاريخ: ٢٩ / ٦ / ٢٠٢٤م
مدة الامتحان: ساعتان وخمس وأربعون دقيقة
مجموع العلامات: (١٠٠) علامة

ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ستة) أسئلة، أجب عن (خمسة) منها فقط.

القسم الأول .. يتكون هذا القسم من (ثلاثة) أسئلة، وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعاً.

السؤال الأول: (٢٠ علامة)

يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع اختيار من متعدد، من أربعة بدائل، اختر البديل الصحيح، ثم انقله إلى دفتر الإجابة:.

١. إذا كان ق(س) اقتراناً متصلا على الفترة $[-١، ٣]$ وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة $[-١، ٣]$ حيث

$م(\sigma_ن، ق) = {}^{-}١٤ - \frac{٦ - ٨ن}{٢ن}$، فما قيمة $\int_{٣}^{-١} ٢ق(س)\,دس$ ؟.

٣٦   ٢٠
١٢   ١٠

٢. إذا كانت $\sigma_ن = \{أ، أ-٢، ...، ٦\}$ تجزئة منتظمة عدد عناصرها يساوي ١٠ للفترة $[أ، ٦]$، فما قيمة الثابت أ ؟..

-٣ ٢
$-\frac{٢٨}{١٠}$ $-\frac{٣٦}{١١}$

٣. إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س)، وكان $٥م(س) - \int ق(س)\,دس = \int س\,دس$ ،

فما قيمة ق(٤) ؟.

٢   ١
٤   صفر

٤. إذا كان $\int_{٢}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{٢}^{٧} (٤ + ق(س))\,دس = ٣٠$ ، فما قيمة $\int_{٧}^{٣} ق(س)\,دس$ ؟.

-١٦ -٤
٤   ١٦

٥. إذا كانت أ ، ب، جـ ثلاث مصفوفات من الرتبة ٣×٢ ، وكانت جـ = ٢أ + ٣ب، والمدخلة $جـ_{٢٣} = ٣$،

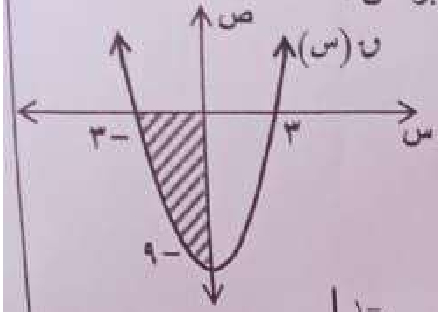
والمدخلة $أ_{٢٣} = -٣$، ما قيمة المدخلة $ب_{٢٣}$ ؟.

-٣ -١
٣   ٩

٦. إذا كان $\int ق(س)\,دس = س^{٢} - ٧س + جـ$، وكان $\int_{١}^{أ} ق(س)\,دس = -٦$، ما قيمة / قيم الثابت أ ؟.

٢ ، ٦   ٣ ، ٤
١ ، ٦ -٤ ، ٢

٧. في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ن(س) = س^{٢} - ٩$ ، أي المتكاملات التالية تعبر عن المساحة المظللة؟



$\int_{٠}^{٩} (س^{٢} - ٩) \, ءس$ $\quad ٢\int_{٠}^{-٣} (٩ - س^{٢}) \, ءس$

$\int_{٠}^{-٣} (س^{٢} - ٩) \, ءس$ $\quad \int_{-٣}^{٠} (س^{٢} - ٩) \, ءس$

٨. إذا كانت ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وكان $|ب| = -٢$ ، فما قيمة $\left|\left(\frac{٣}{٢} ب\right)^{-١}\right|$ ؟

$-\frac{٢٧}{٤}$ $\quad -\frac{٢}{٩}$

$\frac{٢}{٩}$ $\quad -\frac{٤}{٢٧}$

٩. إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة وكان $أ^{٢} + م - أ = و$ ، فما المصفوفة التي تساوي $أ^{-١}$ ؟

أ − م $\quad$ $أ^{٢}$

م − أ $\quad$ أ + م

١٠. إذا كان $\int_{-١}^{٣} ن(-س) \, ءس = ٤$ ، فما قيمة $\int_{١}^{-٣} ن(س) \, ءس$ ؟

٤- $\quad$ ٢-

٢ $\quad$ ٤

السؤال الثاني: (٢٠ علامة)

أ) استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة $\int_{١}^{٣} (٣ - س) \, ءس$. (٧ علامات)

ب) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣×٣ ، بحيث $أ_{يه} = \begin{cases} (ي - ٢ه)^{٢} & ، ي > ه \\ ١ & ، ي \le ه \end{cases}$ (٧ علامات)

١. اكتب المصفوفة أ.

٢. جد $|أ - م_{٣}|$.

ج) جد $\int جا^{٩}س \, قا^{١١}س \, ءس$. (٦ علامات)

السؤال الثالث: (٢٠ علامة)

أ) إذا كان $ن(س) = |٦ - ٣س|$ ، $س \in [٠ ، ٤]$ ، جد الاقتران المكامل ت(س). (٧ علامات)

ب) تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) ومبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية تساوي (٥ م/ث)، فإذا كان تسارعه في أي لحظة $ت(ن) = (٢ + ٣ن)$ م/ث٢، والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة تساوي (١٨ م)، جد المسافة التي يقطعها الجسم خلال ٤ ثواني من بدء الحركة. (٧ علامات)

تابع السؤال الثالث:

ج) إذا كان $\text{م}_1(\text{س})$ ، $\text{م}_2(\text{س})$ اقترانين اصليين للاقتران المتصل ق(س)،

وكان $\text{م}_1(\text{س}) + \text{م}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{٤}(\text{٢س}^3 + \text{س})}{\text{م}_1(\text{س}) - \text{م}_2(\text{س})}$. فإذا علمت أن $\displaystyle\int_{\text{٠}}^{\text{هـ}^3 - 1} \frac{\text{م}_2(\text{س}) - \text{م}_1(\text{س})}{\text{س} + 1}\, \text{ء س} = \text{٦}$

جد قاعدة الاقتران ق(س).   (٦ علامات)

القسم الثاني: يتكون هذا القسم من (ثلاثة) أسئلة، وعلى المشترك أن يجيب عن سؤالين منها فقط.

السؤال الرابع: (٢٠ علامة)

أ) إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود معرف على الفترة [−٢، ٣]، وله قيمة عظمى مطلقة قيمتها تساوي (٥)، وله قيمة صغرى مطلقة قيمتها تساوي (−٤) على مجاله، أثبت أن: $\dfrac{\text{٥}}{\text{١٩}} \le \displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{3|\text{ق}(\text{س})| + 4}\, \text{ء س} \le \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$ (٧ علامات)

ب) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة س ، بحيث أن أ + س = ب . س   (٦ علامات)

ج) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢٧ − ٣س^٢ ، ومنحنى الاقتران ل(س) = ٣س^٢ + ٣ ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.   (٧ علامات)

السؤال الخامس: (٢٠ علامة)

أ) إذا كان ل(س) كثير حدود من الدرجة الثانية، ويمر بالنقطة (٠ ، −٤) حيث: $\text{ل}(\text{س}) = \text{٤س}^2 + \displaystyle\int_{\text{س}}^{-2} \text{ق}(\text{ص})\, \text{ء ص}$

علماً بأن ق(س) متصل

وكان ق(١) = ٦ ، جد قاعدة ل(س)، حيث س ∈ [−٢، ٤].   (٦ علامات)

ب) استخدام طريقة كريمر لحل النظام ٥س − أص = ٥، أس − ٥ص = أ ، حيث أ > ٥   (٧ علامات)

ج) إذا كان $\displaystyle\int_{\text{٠}}^{\text{أ}} \text{س هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\, \text{ء س} = \text{١٥}$ ، أثبت أن أ يحقق العلاقة $\text{أ} - 3 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\text{هـ}^{\text{أ}}}}$.   (٧ علامات)

السؤال السادس: (٢٠ علامة)

أ) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة س علما بأن $(\text{أ}.(\text{س} - \text{ب}))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (٨ علامات)

ب) إذا كان $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{\text{ك} + 1}{\text{٢س}^2 - 2}\, \text{ء س} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \frac{\text{٦}}{\text{٥}}$ ، جد قيمة الثابت ك ؟   (٧ علامات)

ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه تحقق القاعدة $\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{جا}^2\text{س} \times \text{ق}'(\text{س})) = \text{ظتا س}$

جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 1)$ ، س ∈]٠، π[.   (٥ علامات)

انتهت الأسئلة

السؤال الأول/

① إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [-١، ٣] وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [-١، ٣] حيث م($\sigma_ن$، ق) = $-14 - \frac{6-8ن}{2ن}$ فاحسب $\int_{3}^{-1} 2ق(س)\,دس$

(الحل)
$\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(\sigma_ن، ق)$

$\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} -14 - \frac{6-8ن}{2ن}$

$= -14 - \left(\frac{-8}{2}\right) = -14 + 4 = -10$

$\int_{3}^{-1} 2ق(س)\,دس = 2 \times \int_{3}^{-1} ق(س)\,دس = 2 \times 10 = 20$

$\boxed{\text{الجواب } 20}$

② إذا كانت $\sigma_ن$ = {أ، -٢، ...، ٦} تجزئة منتظمة عدد عناصرها يساوي ١٠ للفترة [أ، ٦] فاحسب أ.

عدد العناصر = ن + ١
$10 = ن + 1$
$\boxed{ن = 9}$

$-2 - أ = \frac{6 - أ}{9}$
$-18 - 9أ = 6 - أ$
$-8أ = 24$
$\boxed{أ = -3}$

$\boxed{\text{الجواب } -3}$

③ إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) وكان $5م(س) - \int ق(س)\,دس = \int س\,دس$ فاحسب ق(٤)

$م'(س) = ق(س)$
نشتق الطرفين $5م(س) - \int ق(س)\,دس = \int س\,دس$

$5م'(س) - ق(س) = س$

$5ق(س) - ق(س) = س$

$4ق(س) = س$

$4ق(4) = 4$

$\boxed{ق(4) = 1}$

④ إذا كان $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 6$ ، $\int_{2}^{7} (4 + \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = 30$ ، فما قيمة $\int_{7}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل

$$\int_{2}^{7} 4\,\text{دس} + \int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 30$$

$$4\,(\cancel{\text{س}\big]_{2}^{7}}) + \int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 30$$

$$\boxed{\int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10}$$

$$\int_{7}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{7}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= -10 + 6 = -4$$

الجواب
-4

⑤ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات من الرتبة 3×3 وكانت جـ = 2أ + 3ب والمدخلة $\text{جـ}_{23} = 3$ والمدخلة $\text{أ}_{23} = -3$ فما قيمة المدخلة ب_{23} ؟

$$\text{جـ}_{23} = 2\text{أ}_{23} + 3\text{ب}_{23}$$

$$3 = 2 \times -3 + 3\text{ب}_{23}$$

$$9 = 3\text{ب}_{23}$$

$$\boxed{\text{ب}_{23} = 3}$$

الجواب
3

⑥ إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^2 - 7\text{س} + \text{جـ}$ وكان $\int_{1}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -6$

فما قيمة/قيم الثابت أ ؟

$$\text{س}^2 - 7\text{س}\Big]_{1}^{\text{أ}} = -6$$

$$0 = 6 + \left((\text{أ}^2 - 7\text{أ}) - (1 - 7)\right)$$

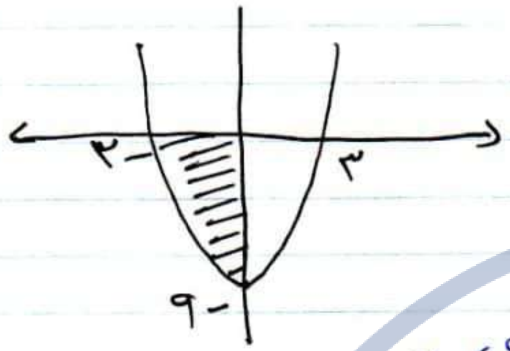
$$0 = \text{أ}^2 - 7\text{أ} + 12$$

$$0 = (\text{أ} - 4)(\text{أ} - 3)$$

$$\boxed{\text{أ} = 4} \qquad \boxed{\text{أ} = 3}$$

الجواب
3 ، 4

⑦ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) = س² − ٩ ، بأحد التكاملات التالية نعبر عن المساحات المظللة



(الحل) $م = -\int_{-3}^{0} ق(س)\, دس$

$م = -\int_{-3}^{0} (س^2 - 9)\, دس$

$م = \int_{0}^{-3} (س^2 - 9)\, دس = \int_{-3}^{0} (9 - س^2)\, دس$

الجواب

$\int_{0}^{-3} (س^2 - 9)\, دس$

⑧ إذا كانت ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وكان |ب| = −٢ فما قيمة $|(\frac{3}{2}ب)^{-1}|$

(الحل) $|(\frac{3}{2}ب)^{-1}| = \frac{1}{|\frac{3}{2}ب|} = \frac{1}{\frac{27}{8}|ب|} = \frac{1}{\frac{27}{8} \times -2} = \frac{-4}{27}$

$\boxed{\text{الجواب } \frac{-4}{27}}$

⑨ إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة وكان $أ^2 + م - أ = و$ فما المصفوفة $أ^{-1}$

(الحل)

$أ^2 - أ = و - م \Leftarrow أ^2 - أ = -م$

$أ^{-1} \times (أ^2 - أ) = أ^{-1} \times -م$

$(أ^{-1} \times أ \times أ - م) = -أ^{-1}$

$أ - م = -أ^{-1} \Leftarrow \boxed{أ^{-1} = م - أ}$

$\boxed{\text{الجواب } م - أ}$

⑩ إذا كان $\int_{-1}^{3} ق(-س)\, دس = 4$ فما قيمة $\int_{1}^{-3} ق(س)\, دس$

ص = −س

$\frac{دص}{دس} = -1 \quad \boxed{-دص = دس}$

س = −١ ، ص = ١

س = ٣ ، ص = −٣

$\int_{1}^{-3} ق(ص) \times -دص = 4$

$\int_{1}^{-3} ق(ص)\, دص = -4$

$\boxed{\text{الجواب } -4}$

السؤال الثاني (أ) باستخدام تعريف التكامل المحدود جد قيمة $\int_{1}^{3} (3 - \text{س})\, \text{دس}$

$$\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \left(\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\right) \text{ر}$$

$$\text{س}_{\text{ر}} = 1 + \left(\frac{2}{\text{ن}}\right) \text{ر}$$

$$\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{ق}\left(1 + \frac{2}{\text{ن}} \text{ر}\right)$$

$$= 3 - \left(1 + \frac{2}{\text{ن}} \text{ر}\right) = 2 - \frac{2}{\text{ن}} \text{ر}$$

$$\text{ح}(\text{ن}, \text{ع}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \, \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}})$$

$$= \frac{2}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(2 - \frac{2}{\text{ن}} \text{ر}\right)$$

$$= \frac{2}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 2 - \frac{2}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}\right)$$

$$= \frac{2}{\text{ن}} \left(2\text{ن} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+1)}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\text{ن}} \left(2\text{ن} - \text{ن} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\text{ن}} \left(\text{ن} - 1\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{\text{ن}}$$

$$\int_{1}^{3} (3 - \text{س})\, \text{دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(2 - \frac{2}{\text{ن}}\right)$$

$$= 2$$

السؤال الثاني (ب) اذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣×٣ بحيث

$$أ_{ي هـ} = \begin{cases} (٢ي - هـ)^{٢} ، & ي > هـ \\ ١ ، & ي \le هـ \end{cases}$$

(١) اكتب المصفوفة أ (٢) جد $|أ - أ٣|$

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

$أ_{٢١} = (٢×٢ - ١)^{٢} = ٩$

$أ_{٣١} = (٣×٢ - ١)^{٢} = ٢٥$

$أ_{٣٢} = (٣×٢ - ٢)^{٢} = ١٦$

$$أ = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٩ & ١ \\ ١٦ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ - أ٣ = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٩ & ١ \\ ١٦ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٩ & صفر \\ ١٦ & ٠ & ١ \\ صفر & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|أ - أ٣| = \begin{vmatrix} ٢٥ & ٩ & ٠ \\ ١٦ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix} = -٩ \begin{vmatrix} ١٦ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + ٢٥ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = -٩×١٦ + ٢٥×١$$

$= ١٦٩$

(ج) $\int جا^{٩}س \, قا^{١١}س \, دس$

$= \int جا^{٩}س × قا^{٩}س × قا^{٢}س \, دس$

$= \int قا^{٢}س × (جاس × \frac{١}{جتاس})^{٩} \, دس$

$= \int قا^{٢}س × (ظاس)^{٩} \, دس$

$= \int قا^{٢}س × ص^{٩} \, \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{ظا^{١٠}س}{١٠} + جـ$

$ص = ظاس$

$\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س$

$دس = \frac{دص}{قا^{٢}س}$

السؤال الثالث (م) اذا كان ق(س) = |٦ - ٣س| ، س ∈ [٠، ٤] جد الاقتران المكامل ت(س)

(حل)

$\text{٦} - \text{٣س} = \text{صفر}$ $\boxed{\text{س} = \text{٢}}$

$\underset{\text{١}}{+\,+\,+}\;\overset{\text{٦} - \text{٣س}}{}\quad \underset{\text{٢}}{\bullet}\quad \overset{(\text{٣س} - \text{٦})}{-\,-\,-}\;\underset{\text{٤}}{}$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٦} - \text{٣س} & \text{٠} \le \text{س} < \text{٢} \\ \text{٣س} - \text{٦} & \text{٢} \le \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$$

عند $\text{٠} \le \text{س} < \text{٢}$

$$\text{ت(س)} = \int_{\text{م}}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$$

$$\text{ت(س)} = \int_{\text{٠}}^{\text{س}} (\text{٦} - \text{٣ص})\,\text{دص}$$

$$= \text{٦ص} - \frac{\text{٣ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{س}}$$

$$\text{ت(س)} = \text{٦س} - \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$$

$\text{٢} \le \text{س} \le \text{٤}$

$$\text{ت(س)} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$$

$$\text{ت(س)} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٦} - \text{٣س})\,\text{دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{س}} (\text{٣ص} - \text{٦})\,\text{دص}$$

$$= \text{٦س} - \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}} + \frac{\text{٣ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٦ص} \Big|_{\text{٢}}^{\text{س}}$$

$$= \left(\text{٦} \times \text{٢} - \frac{\text{٣} \times \text{٤}}{\text{٢}}\right) - \text{صفر} + \left(\frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٦س}\right) - \left(\frac{\text{٣} \times \text{٤}}{\text{٢}} - \text{١٢}\right)$$

$$= \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{١٢}$$

$$\text{ت(س)} = \begin{cases} \text{٦س} - \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} & \text{٠} \le \text{س} < \text{٢} \\ \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{١٢} & \text{٢} \le \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$$

السؤال الثالث (ب) تحرك جسم من خط مستقيم من النقطة (و) وتبتعد عنها بسرعة ابتدائية تساوي (٥م/ث) فإذا كان تسارعه في أي لحظة ت(ن) = (٢ + ٣ن) م/ث² والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة تساوي ١٨م جد المسافة التي تقطعها خلال ٤ ثواني من بدء الحركة

الحل

$\boxed{ع(٠) = ٥}$ ، $\boxed{ف(٢) = ١٨}$ ، ت(ن) = (٢ + ٣ن)

$ع(ن) = \int ت(ن)\, دن$

$ع(ن) = \int (٢ + ٣ن)\, دن$

$ع(ن) = ٢ن + \frac{٣}{٢}ن^٢ + جـ_١$ ، ع(٠) = ٥

$ع(٠) = ٢ \times ٠ + ٠ + جـ_١$ ، $\boxed{جـ_١ = ٥}$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن$

$ف(ن) = \int ٢ن + \frac{٣}{٢}ن^٢ + ٥$

$ف(ن) = \frac{٢ن^٢}{٢} + \frac{٣ن^٣}{٦} + ٥ن + جـ$

$ف(ن) = ن^٢ + \frac{ن^٣}{٢} + ٥ن + جـ_٢$

$ف(٢) = ٤ + ٤ + ١٠ + جـ_٢$

$١٨ = ١٨ + جـ_٢$ ، $\boxed{جـ_٢ = ٠}$

$ف(ن) = ن^٢ + \frac{ن^٣}{٢} + ٥ن$

$ف(٤) = ١٦ + ٣٢ + ٢٠$

$ف(٤) = ٦٨$

السؤال الثالث (ج) اذا كان $م_1(س)$ ، $م_2(س)$ اقترانين أصليين للاقتران $هـ(س)$

وكان $م_1(س) + م_2(س) = \frac{4(2س^3+س)}{م_1(س) - م_2(س)}$ فاذا علمت $\int_{0}^{هـ^3-1} \frac{م_2(س) - م_1(س)}{س+1} دس = 6$

(الحل) $م_1(س) - م_2(س) = جـ$ ، $م_1'(س) = هـ(س)$ ، $م_2'(س) = هـ(س)$

$\int_{0}^{هـ^3-1} \frac{-جـ}{س+1} دس = 6 \Leftarrow -جـ لو_هـ |س+1| \Big|_{0}^{هـ^3-1} = 6$

$-جـ لو_هـ |هـ^3 - 1 + 1| - (-جـ \cancel{لو_هـ |1|}) = 6$

$-جـ لو_هـ |هـ^3| = 6 \Leftarrow -3جـ = 6$ $\boxed{(جـ = -2)}$

$م_1(س) + م_2(س) = \frac{4(2س^3+س)}{م_1(س) - م_2(س)}$

$م_1(س) + م_2(س) = \frac{4(2س^3+س)}{-2}$

$م_1(س) + م_2(س) = -4س^3 - 2س$

$م_1'(س) + م_2'(س) = -12س^2 - 2$

$هـ(س) + هـ(س) = -12س^2 - 2$

$2هـ(س) = -12س^2 - 2$

$هـ(س) = -6س^2 - 1$

السؤال الرابع (م)

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود معرف على الفترة [−٢، ٣] وله قيمة عظمى مطلقة قيمتها تساوي (٥) وصغرى مطلقة قيمتها تساوي (−٤)

بيّن بأنه

$$\frac{٥}{١٩} \leq \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{٣|ق(س)|+٤}\, دس \leq \frac{٥}{٤}$$

$$-٤ \leq ق(س) \leq ٥$$

$$صفر \leq |ق(س)| \leq ٥$$

$$٤ \leq ٣|ق(س)|+٤ \leq ١٩$$

$$\frac{١}{١٩} \leq \frac{١}{٣|ق(س)|+٤} \leq \frac{١}{٤}$$

$$\int_{-٢}^{٣} \frac{١}{١٩}\, دس \leq \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{٣|ق(س)|+٤}\, دس \leq \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{٤}\, دس$$

$$\frac{١}{١٩}(٣--٢) \leq \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{٣|ق(س)|+٤}\, دس \leq \frac{١}{٤}(٣--٢)$$

$$\frac{٥}{١٩} \leq \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{٣|ق(س)|+٤}\, دس \leq \frac{٥}{٤}$$

السؤال الرابع (ب)

اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ جد المصفوفة س

حيث أن أ + س = ب × س

$$س \times \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$س - س\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$س\left(م - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$س \times \left(\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$س \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$|أ| = -٣ - ٢ = -٥$

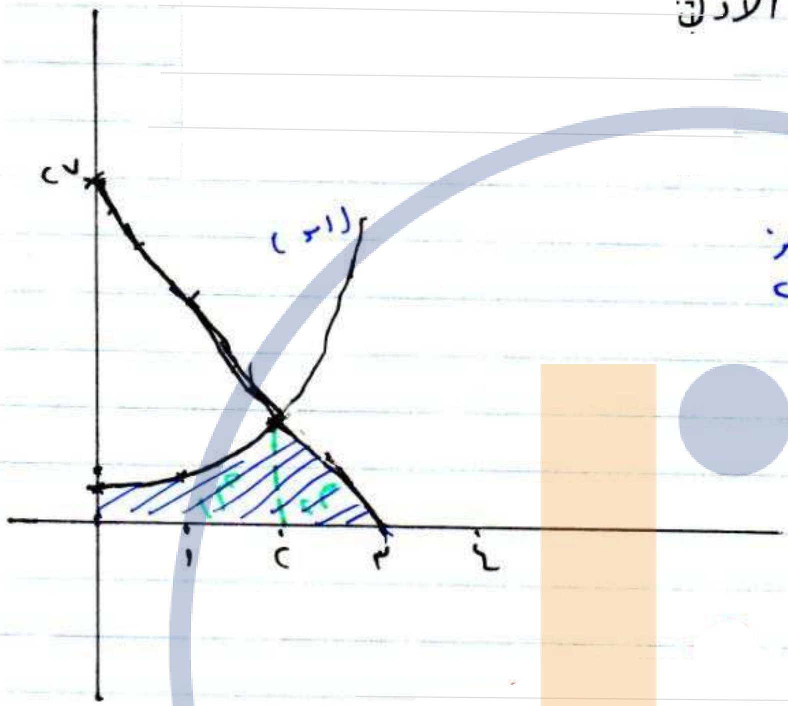
$$\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \frac{١}{-٥} = أ^{-١}$$

$$س = \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ \\ -٤ \end{bmatrix}} \times \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}} \frac{١}{-٥}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٣+٨ \\ -٣-١٢ \end{bmatrix} \frac{-١}{٥}$$

$$س = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع (ع) أ) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢٧ - ٣س² ومنحنى الاقتران ل(س) = ٣س² + ٣ ومحوري السينات والصادات والواقعة بالربع الأول



أولاً إيجاد التقاطع

ل(س) مع محور السينات:

$٣س^٢ + ٣ = $ صفر

$٣س^٢ = -٣$

$س^٢ = -١$

لا يوجد تقاطع

ق مع محور السينات:

$٢٧ - ٣س^٢ = $ صفر

$٣س^٢ = ٢٧$

$س^٢ = ٩$

$س = \pm ٣$

$س = ٣$ ، $\cancel{س = -٣}$

ق مع ل

$٢٧ - ٣س^٢ = ٣س^٢ + ٣$

$٦س^٢ = ٢٤$

$س^٢ = ٤$

$\boxed{س = \pm ٢}$

$س = ٢$ ، $\cancel{س = -٢}$

$م_١ = \int_{٠}^{٢} (٣س^٢ + ٣)\, دس$

$= \left[\frac{٣س^٣}{٣} + ٣س\right]_{٠}^{٢}$

$= (٨ + ٦) - ($صفر$)$

$= ١٤$

$م_٢ = \int_{٢}^{٣} (٢٧ - ٣س^٢)\, دس$

$= \left[٢٧س - \frac{٣س^٣}{٣}\right]_{٢}^{٣}$

$= (٢٧ \times ٣ - ٢٧) - (٥٤ - ٨)$

$= ٨$

$م = م_١ + م_٢$

$م = ١٤ + ٨$

$\boxed{م = ٢٢}$

السؤال الخامس (أ) إذا كان ل(س) كثير حدود من الدرجة الثانية ومر بالنقطة (٠، -٤) حيث ل(س) = ٤س² + ∫ ق(ص) دص من -٢ إلى س وكان ق(١) = ٦

جد قاعدة ل(س) حيث س ∈ [-٢، ٤]

ل(س) = أس² + ب س + جـ $\boxed{\text{ل(٠)} = -٤}$

ل(٠) = أ × ٠² + ب × ٠ + جـ $\boxed{\text{جـ} = -٤}$

ل(س) = أس² + ب س − ٤ $\boxed{\text{ق(١)} = ٦}$

ق̄′(س) = ق(س)

ل(س) = ٤س² − ∫ ق(ص) دص من -٢ إلى س $\boxed{\text{ق̄(-٢)} = \text{صفر}}$

ل(س) = ٤س² − ق̄(س)

ل(-٢) = ٤ × ٤ − ق̄(-٢)

$\boxed{\text{ل(-٢)} = ١٦ - \text{صفر} = ١٦}$

ل(-٢) = ٤أ − ٢ب − ٤

٤أ − ٢ب − ٤ = ١٦

٤أ − ٢ب = ٢٠

$\boxed{٢\text{أ} - \text{ب} = ١٠}$ ← ①

ق̄′(س) = ق(س)

ل′(س) = ٨س − ق̄′(س)

ل′(١) = ٨ × ١ − ق(١)

ل′(١) = ٨ − ٦

$\boxed{\text{ل}'(١) = ٢}$

ل′(س) = ٢أس + ب

ل′(١) = ٢أ + ب $\boxed{٢\text{أ} + \text{ب} = ٢}$ ← ②

بجمع ① و ② ٤أ = ١٢ $\boxed{\text{أ} = ٣}$

نعوض في ① ٢ × ٣ − ب = ١٠ $\boxed{\text{ب} = ٦ - ١٠ = -٤}$

$\boxed{\text{ل(س)} = ٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٤}$

السؤال الخامس (ب) استخدم طريقة كريمر لحل النظام

$5\text{س} - \text{م}\,\text{ص} = 5 \;،\; \text{م}\,\text{س} - 5\text{ص} = \text{م}$ حيث $\text{م} \neq 5$

$$5\text{س} - \text{م}\,\text{ص} = 5$$
$$\text{م}\,\text{س} - 5\text{ص} = \text{م}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -\text{م} \\ \text{م} & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \text{م} \end{bmatrix}$$

$$|\text{م}| = \begin{vmatrix} 5 & -\text{م} \\ \text{م} & -5 \end{vmatrix} = -25 + \text{م}^2$$

$$|\text{م}_\text{س}| = \begin{vmatrix} 5 & -\text{م} \\ \text{م} & -5 \end{vmatrix} = -25 + \text{م}^2$$

$$|\text{م}_\text{ص}| = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ \text{م} & \text{م} \end{vmatrix} = 5\text{م} - 5\text{م} = \text{صفر}$$

$$\text{س} = \frac{|\text{م}_\text{س}|}{|\text{م}|} = \frac{-25+\text{م}^2}{-25+\text{م}^2} = 1$$

$$\text{ص} = \frac{|\text{م}_\text{ص}|}{|\text{م}|} = \frac{\text{صفر}}{-25+\text{م}^2} = \text{صفر}$$

السؤال الخامس (ج)

إذا كان $\int_0^{\text{م}} \text{س}\,\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\,\text{ء}\text{س} = 15$ اثبت أن م تحقق العلاقة $\text{م} - 3 = \frac{2}{\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}}$

$$\text{هـ} = \text{س} \qquad \text{ءع} = \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\,\text{ءس}$$
$$\text{ءهـ} = 1 \qquad \text{ع} = 3\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}$$

$$\int_0^{\text{م}} \text{س}\,\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\,\text{ءس} = \text{س} \times 3\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\Big|_0^{\text{م}} - \int_0^{\text{م}} 3\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\,\text{ءس}$$

$$15 = \left(3\text{م}\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}\right) - (\text{صفر}) - 9\,\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}\Big|_0^{\text{م}}$$

$$15 = 3\text{م}\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} - \left(9\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} - 9 \times \text{هـ}^{0}\right)$$

$$15 = 3\text{م}\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} - 9\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} + 9$$

$$6 = 3\text{م}\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} - 9\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}$$

$$2 = \text{م}\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}} - 3\,\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}$$

$$2 = \text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}(\text{م} - 3) \Longleftarrow \text{م} - 3 = \frac{2}{\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{3}}}$$

السؤال السادس (أ) اذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ جد
المصفوفة س علماً بأن $\left(\text{أ} \times (\text{س} - \text{ب})\right)^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\text{أ} \times (\text{س} - \text{ب}) = \left(\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\right)^{-١}$$

$$\text{أ}^{-١} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \left(\text{س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\right) = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} \times \text{أ}^{-١}$$

$$|\text{أ}| = -١ - ٠ = -١$$
$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$
$$\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = -\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = -\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢+٠ & -٢+٠ \\ ٤+١ & -٤+٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -\frac{٥}{٢} & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -\frac{٥}{٢} & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -\frac{٧}{٢} & ٤ \end{bmatrix}$$

السؤال السادس (ب) $\int_{٣}^{٤} \frac{\text{ل}+١}{٢\text{س}^٢-٢}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٥}$ جد قيمة الثابت ل ؟

$$\frac{\frac{١}{٢}(\text{ل}+١)}{\text{س}^٢-١} = \frac{\frac{١}{٢}(\text{ل}+١)}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س}-١)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$$

$$\frac{١}{٢}(\text{ل}+١) = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-١)$$

$\boxed{\text{س}=١}$ $\quad \frac{١}{٢}(\text{ل}+١) = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٤}(\text{ل}+١)$

$\boxed{\text{س}=-١}$ $\quad \frac{١}{٢}(\text{ل}+١) = -٢\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -\frac{١}{٤}(\text{ل}+١)$

$$\int_{٣}^{٤} \frac{\frac{١}{٢}(\text{ل}+١)}{\text{س}^٢-١}\,\text{دس} = \int_{٣}^{٤} \frac{\frac{١}{٤}(\text{ل}+١)}{\text{س}-١} + \int_{٣}^{٤} \frac{-\frac{١}{٤}(\text{ل}+١)}{(\text{س}+١)}\,\text{دس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٥} = \frac{١}{٤}(\text{ل}+١)\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١|\Big|_{٣}^{٤} - \frac{١}{٤}(\text{ل}+١)\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١|\Big|_{٣}^{٤}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٥} = \frac{١}{٤}(\text{ل}+١)\left[(\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢) - (\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}٤)\right]$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٥} = \frac{١}{٤}(\text{ل}+١) \times \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٣}{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٥}{٤}\right)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٦}{٥} = \frac{١}{٤}(\text{ل}+١) \times \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٣}{٢} \times \frac{٤}{٥}\right) \Longleftarrow$$

$$\text{ل}+١ = ٤$$
$$\text{ل} = ٣$$

السؤال السادس: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه تحقق القاعدة $لو_{هـ}(جاس \times ق'(س)) = قتاس$

جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ، $س \in [0, \pi]$

$ق(\frac{\pi}{4}) = 1$

$لو_{هـ}(جاس \times ق'(س)) = قتاس$

$هـ^{قتاس} = جاس \times ق'(س)$

$ق'(س) = هـ^{قتاس} \times \frac{1}{جاس}$

$ق'(س) = هـ^{قتاس} \times قتاس$

$ق(س) = \int ق'(س) \, دس$

$ق(س) = \int هـ^{قتاس} \, قتاس \, دس$

نفرض أن $ص = قتاس$

$\frac{دص}{دس} = -قتا^2س$

$دس = \frac{دص}{-قتا^2س}$

$ق(س) = \int هـ^{ص} \, قتا^2س \, \frac{دص}{-قتا^2س}$

$= \int -هـ^{ص} \, دص$

$ق(س) = -هـ^{ص} + جـ$

$ق(س) = -هـ^{قتاس} + جـ$

$ق(\frac{\pi}{4}) = -هـ^{قتا\frac{\pi}{4}} + جـ$

$1 = -هـ + جـ \qquad جـ = 1 + هـ$

$ق(س) = -هـ^{قتاس} + 1 + هـ$

لكل الشكر أ. وسام ابو خاطر