التكامل غير المحدود

تعريف :

الاقتران الأصلي (البدائي) (معكوس المشتقة) رمزه م(س)

يسمى الاقتران م(س) اقتراناً أصلياً لِ ق(س) إذا حقق القاعدة

م'(س) = ق(س)

مثال: بين فيما إذا كانت الاقترانات م(س) اقترانات أصلية لِ ق(س)

① م(س) = س^{٣} − ١ ق(س) = ٢س^{٢}

م'(س) = ٣س^{٢} ≠ ق(س)

م(س) ليس اقتراناً أصلياً لـ ق(س)

② م(س) = جا ٢س ق(س) = ٢جتا٢س

م'(س) = ٢جتا٢س = ق(س)

م(س) اقتران أصلي لِ ق(س)

مثال٢: اكتب اقترانات أصلية للاقتران ق(س) = ٢س

م$_{١}$(س) = س^{٢}

م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥

م$_{٣}$(س) = س^{٢} + ٦

⋮

م(س) = س^{٢} + جـ الصورة العامة للاقتران الأصلي

ملاحظات على الاقتران الأصلي م(س)

١- الصورة العامة للاقتران الأصلي م(س) + جـ

٢- الفرق بين أي اقترانين أصليين يساوي مقدار ثابت

(م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان لِـ ق(س))

م(س) - هـ(س) = جـ

مثال (٢) ص (١٣٣) :

م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان لـ ق(س)

والمطلوب لَ (٣) = ؟؟

ل(س) = م(س) - هـ(س)

ل(س) = جـ

لَ (س) = ٠

لَ (٣) = ٠

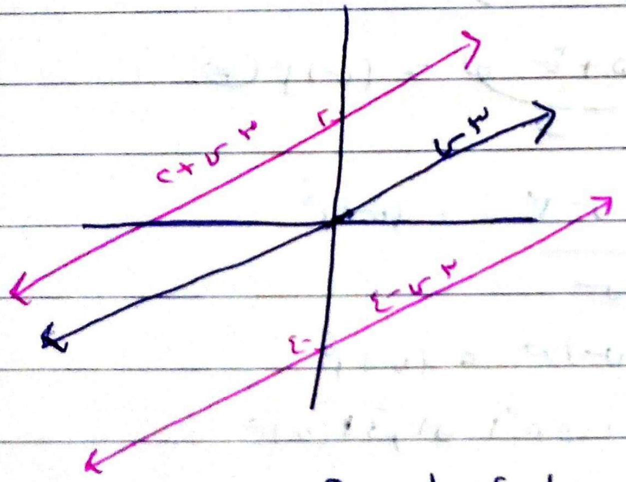
مثال (٣) ص (١٣٤) :

ق(س) = ٣

$م_{١}(س)$ = ٣س

$م_{٢}(س)$ = ٣س + ٢

$م_{٣}(س)$ = ٣س - ٤



مثال (٤) :

م(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س}$

ق(س) = ١ + $\frac{٢}{س^{٢}}$

م(س) = $\frac{س^{٢}}{س} - \frac{١}{س}$

= س - $\frac{١}{س}$

= س - $س^{-٢}$

مَ(س) = ١ - -١ $س^{-٢}$

= ١ + $\frac{٢}{س^{٢}}$ = ق(س)

تمارين ص(١٣٦) :

س١ : ⓐ $م(س) = \frac{١}{٣} (٢ + س^٢)^{\frac{٣}{٢}}$

$م'(س) = \frac{١}{\cancel{٣}} \times \frac{\cancel{٣}}{٢} (٢ + س^٢)^{\frac{١}{٢}} (٢س)$

$= س \sqrt{٢ + س^٢}$

م(س) اقتران أصلي لـ ق(س)

ⓑ $م(س) = قا^٢ س$

$م'(س) = ٣ قا^٢ س قا س ظا س$

$= ٣ قا^٣ س ظا س$

$م'(س) \neq ق(س)$

ليس اقتران أصلي

ⓙ $م(س) = لو_{هـ} (س^٣ + هـ^{٢س})$

$م'(س) = \frac{٣ س^٢ + ٢ هـ^{٢س}}{س^٣ + هـ^{٢س}}$

$م'(س) = ق(س)$

م(س) اقتران أُصلي لـ ق(س)

س٢ : $م(س) - هـ(س) = جـ$

$س^٢ - ٤س + ٦ - هـ(س) = جـ$ $س = ٣$

$س^٢ - ٤س + ٦ - جـ = هـ(س)$

$٩ - ١٢ + ٦ - جـ = هـ(٢)$

$٣ - جـ = ٤$

$\boxed{جـ = -١}$

م(١) = ١ - ٤ + ٦ = ٣

٣ - هـ(١) = -١

$\boxed{\text{هـ(١) = ٤}}$

س٣: م(س)، هـ(س) ← أصلية لـ د(س)

تفسير

مَ(س) = د(س)　　　هَ(س) = د(س)

د(٤) = ٧　　　دَ(٤) = ١٠

(٣م - هـ)َ (٤)

٣مَ(٤) - هَ(٤)

٣د(٤) - د(٤) = ٢د(٤) = ٢ × ٧ = ١٤

س٢:

م(س) - هـ(س) = ج

$س^2$ - ٤س + ٦ - هـ(س) = ج $|_{س=٣}$

٩ - ١٢ + ٦ - هـ(٣) = ج

٣ - ٤ = ج ⇐ $\boxed{\text{ج = -١}}$

م(س) - هـ(س) = ج

م(س) - ج = هـ(س)

$س^2$ - ٤س + ٦ - -١ = هـ(س)

١ - ٤ + ٧ = هـ(١) ⇐ $\boxed{\text{هـ(١) = ٤}}$

التكامل غ. محدود

$\int \text{هـ(س)}\ \text{دس} = \text{م(س)} + \text{جـ}$

لـ مجموعة الاقترانات الأصلية لـ هـ(س)

ملاحظات:

١- $\int \text{هـ(س)}\ \text{دس} = \text{م(س)} + \text{جـ}$

حيث م(س) اقتران أصلي لـ هـ(س)

٢- الاشتقاق يلغي التكامل

$\cancel{\frac{\text{د}}{\text{دس}} \int} \text{هـ(س)}\ \text{دس} = \text{هـ(س)}$

* مشتقة التكامل غ. محدود = ما بداخل التكامل

مثلاً $\cancel{\frac{\text{د}}{\text{دس}}} \int \text{هـ(س)}\ \text{دس} = (\text{س}^{٢} + ٢\text{س})'$ باشتقاق الطرفين

$\text{هـ(س)} = ٢\text{س} + ٢$

٣- التكامل يلغي الاشتقاق ولكن يبقى جـ

$\text{قَ(س)} = \text{ل(س)}$

بأخذ التكامل لكلا الطرفين

$\int \text{قَ(س)}\ \text{دس} = \int \text{ل(س)}$

$\text{هـ(س)} + \underset{\downarrow}{\text{جـ}} = \int \text{ل(س)}\ \text{دس}$

ثابت التكامل غ. محدود

note

$\int \text{قَ(س)}\ \text{دس} = \text{هـ(س)} + \text{جـ}$

$\cancel{\frac{\text{د}}{\text{دس}}} \int \text{هـ(س)}\ \text{دس} = \text{هـ(س)}$

مثال (٥) ص (١٣٥) :

∫ ق(س) دس = $س^{٣}$ − ٣س + ٥

باشتقاق الطرفين

ق(س) = $٣س^{٢}$ − ٣

ق(٢) = ٣ × ٤ − ٣ = ٩

ق̄(س) = ٦س

ق̄(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

مثال (٦) :

ق(س) = ∫ $هـ^{س}$ دس   ق(٠) = ٣   ق(١) ؟

ق(س) = $هـ^{س}$ + جـ

ق(٠) = $هـ^{٠}$ + جـ

٣ = ١ + جـ ⟸ $\boxed{جـ = ٢}$

ق(س) = $هـ^{س}$ + ٢

ق(١) = $هـ^{١}$ + ٢

= هـ + ٢

أسئلة خارجية :

س١ : ∫ ق(س) دس = $س^{٢}$ − جتا س + ٢   فأوجد ق̄(٠)

باشتقاق الطرفين   ق(س) = ٢س + جا س

ق̄(س) = ٢ + جتا س

ق̄(٠) = ٢ + جتا ٠ = ٢ + ١ = ٣

س٢: $\int$ جا $(\frac{٣\pi}{٢})$ د(س) ءس = ١ + $س^{٢}$ جد قيمة د(١)

باشتقاق الطرفين

جا $(\frac{٣\pi}{٢})$ د(س) = ٢س

-١ د(س) = ٢س

د(س) = -٢س

س٣: إذا كان $\int$ (د(س) + ٢) ءس = $س^{٣}$ + أ $س^{٢}$ + ٩

وكان د(١) = ٧ جد قيمة أ ؟

باشتقاق الطرفين

د(س) + ٢ = ٣ $س^{٢}$ + ٢ أ س

د(١) + ٢ = ٣ + ٢ أ

٧ + ٢ = ٣ + ٢ أ

٩ = ٣ + ٢ أ

٢ أ = ٦

$\boxed{أ = ٣}$

س٤ـ ص(١٣٦) :

$$\text{م}(\text{س}) = ٢\,\text{ظاس} - ٢\,\text{قاس} \qquad \text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\text{مَ}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$$

$$٢\,\text{قا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{قاس}\,\text{ظاس} = \frac{\text{م}}{(١+\text{جاس})}$$

$$٢\,\text{قاس}\,(\text{قاس} - \text{ظاس}) = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$٢\,\frac{١}{\text{جتاس}}\left(\frac{١}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right) = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\frac{٢}{\text{جتاس}}\left(\frac{١-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right) = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\frac{٢(١-\text{جاس})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\frac{٢(١-\text{جاس})}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\frac{٢(\cancel{١-\text{جاس}})}{(\cancel{١-\text{جاس}})(١+\text{جاس})} = \frac{\text{م}}{١+\text{جاس}}$$

$$\frac{٢}{\cancel{١+\text{جاس}}} = \frac{\text{م}}{\cancel{١+\text{جاس}}}$$

$$\boxed{\text{م} = ٢}$$

س : ∫ د(س) ءس = أ $س^{٣}$ + جـ س

د(-١) = ٤   دَ(٢) = ٢٤   أ، جـ ؟؟

د(س) = ٣أ $س^{٢}$ + جـ

د(-١) = ٣أ + جـ

٤ = ٣أ + جـ

دَ(س) = ٦أ س

دَ(٢) = ١٢أ

٢٤ = ١٢أ

$\boxed{أ = ٢}$

٤ = ٣×٢ + جـ

٤ = ٦ + جـ

$\boxed{جـ = -٢}$

قواعد التكامل غير المحدود :

1) $\int \text{أ}\, \text{د}\text{س} = \text{أ}\text{س} + \text{جـ}$ ← ثابت التكامل غ. محدود

2) $\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{د}\text{س} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

3) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{د}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

4) $\int \dfrac{1}{\text{س}}\, \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

5) $\int \text{جا}\,\text{س}\, \text{د}\text{س} = -\text{جتا}\,\text{س} + \text{جـ}$

6) $\int \text{جتا}\,\text{س}\, \text{د}\text{س} = \text{جا}\,\text{س} + \text{جـ}$

7) $\int \text{قا}^2\text{س}\, \text{د}\text{س} = \text{ظا}\,\text{س} + \text{جـ}$

8) $\int \text{قتا}^2\text{س}\, \text{د}\text{س} = -\text{ظتا}\,\text{س} + \text{جـ}$

9) $\int \text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}\, \text{د}\text{س} = \text{قا}\,\text{س} + \text{جـ}$

10) $\int \text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}\, \text{د}\text{س} = -\text{قتا}\,\text{س} + \text{جـ}$

11) $\int \underbrace{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}_{\text{خطي}}{}^{\text{ن}}\, \text{د}\text{س} = \dfrac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$

12) $\int \text{جا}\overset{\text{خطي}}{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}\, \text{د}\text{س} = \dfrac{-\text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

$\int \text{قا}^2(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\, \text{د}\text{س} = \dfrac{\text{ظا}\,\text{أ}\text{س}+\text{ب}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

خصائص التكامل :

١. يوزع التكامل في عمليتي الجمع والطرح فقط

٢. $\int \text{أ}\ \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = \text{أ} \int \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$

مثال(١) ص (١٣٨) :

١) $\int \left(\frac{١}{\text{س}} + ٣\right) \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + ٣\text{س} + \text{ج}$

٢) $\int \text{قاس} \left(\text{قاس} + \text{ظاس}\right) \text{ءس}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قاس}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$

$= \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{ج}$

٣) $\int \left(\text{س}^{٢} + \text{هـ}^{\text{س}}\right) \text{ءس}$

$\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

٤) $\int \left(٢ - \text{ظا}^{٢}\text{س}\right) \text{ءس}$ $\qquad ١ + \text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\int ٢ - \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right) \text{ءس}$

$\int ٢ - \text{قا}^{٢}\text{س} + ١\ \text{ءس} = \int ٣ - \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= ٣\text{س} - \text{ظاس} + \text{ج}$

مثال (٢) ص ١٣٩ :

$$\int \frac{(\text{س}^2+1)^2}{\text{س}^2}\, \text{د س}$$

$$= \int \left(\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}}\right)^2 \text{د س}$$

$$= \int \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^2 \text{د س}$$

$$= \int \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^2 \text{د س}$$

$$= \int \left(\text{س}^2 + 2 + \frac{1}{\text{س}^2}\right) \text{د س}$$

$$= \int \left(\text{س}^2 + 2 + \text{س}^{-2}\right) \text{د س}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{3} + 2\text{س} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^3 + 2\text{س} - \frac{1}{\text{س}} + \text{ج}$$

أسئلة إثرائية :

جدي التكاملات التالية :

١) $\int (\text{س} + \sqrt{\text{س}})^2 \,\text{د س}$

٢) $\int \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^2 \text{د س}$

٣) $\int \frac{1}{1+\text{جتا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

٤) $\int \frac{1}{1-\text{جا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

٥) $\int \frac{\text{س} - 3\sqrt{\text{س}} - 4}{\sqrt{\text{س}} - 4}\, \text{د س}$

٦) $\int \frac{4}{(3\text{س})^2}\, \text{د س}$

٧) $\int \sqrt{\text{س}^2+4\text{س}+4}\, \text{د س}$ حيث $\text{س} \geq -2$

① $\int (س + \sqrt{س})^{٢} \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢س\sqrt{س} + س) \, ءس$

$= \int س^{٢} + ٢س^{١} س^{\frac{١}{٢}} + س) \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + س) \, ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٢ \times \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢} + ث$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٤}{٥} \sqrt{س^{٥}} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

② $\int (س + \frac{١}{س})^{٢} \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}) \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢ + س^{-٢}) \, ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س + \frac{س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س - \frac{١}{س} + ث$

③ $\int \frac{١}{\text{١+جتا٢س}} \text{ د س}$

$= \int \frac{١}{\text{١+ (٢جتا}^{٢}\text{س − ١)}} \text{ دس}$

$= \int \frac{١}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}} \text{ دس}$

$= \int \frac{١}{٢} \text{ قا}^{٢}\text{س دس} = \frac{١}{٢} \text{ ظاس + ج}$

④ $\int \frac{١}{\text{١ − جتا٢س}} \text{ د س}$

$\int \frac{١}{\text{١ − (١ − ٢جا}^{٢}\text{س)}} \text{ دس}$

$= \int \frac{١}{\text{١ − ١ + ٢جا}^{٢}\text{س}} \text{ دس}$

$= \int \frac{١}{٢} \text{ قتا}^{٢}\text{س دس}$

$= -\frac{١}{٢} \text{ ظتاس + ج}$

⑤ $\int \frac{س - ٣\sqrt{س} - ٤}{\sqrt{س} - ٤} \, ء س$

$\int \frac{(\sqrt{س} + ١)(\cancel{\sqrt{س}} - ٤)}{\cancel{\sqrt{س}} - ٤} \, ء س$

$\int \sqrt{س} + ١ \; ء س$

$\int س^{\frac{١}{٢}} + ١ \; ء س$

$\frac{٢}{٣} \times س^{\frac{٣}{٢}} + س + ث$

$\frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + س + ث$

⑥ $\int \frac{٤}{(٣س)^{٢}} \, ء س$

$\int \frac{٤}{٩س^{٢}} \, ء س$

$\int \frac{٤}{٩} س^{-٢} \; ء س$

$\frac{٤}{٩} \; \frac{س^{-١}}{-١} + ث$

$\frac{٤}{٩} \left(\frac{-١}{س} \right) + ث$

$\frac{-٤}{٩س} + ث$

⑧ $\int \sqrt{س^{٢}+٤س+٤}\;ءس$

$\int \sqrt{(س+٢)^{٢}}\;ءس$

$\int |س+٢|\;ءس$

$\frac{س^{٢}}{٢}+٢س+ث$

نشاط (٣) صـ ١٣٩ :

قَ(س) = ٥ س^{٤} − ١   د(١) = ٥   د(٢) ؟؟

د(س) = ∫ قَ(س) ء س

= ∫(٥ س^{٤} − ١) ء س

د(س) = س^{٥} − س + جـ

د(١) = ١ − ١ + جـ

$\boxed{٥ = جـ}$

د(س) = س^{٥} − س + ٥

د(٢) = ٢^{٥} − ٢ + ٥ = ٣٥

فكر وناقش :

$\frac{ء}{ءس}$ ∫ د(س) ء س	∫ دَ(س) ء س
د(س) بدون جـ	د(س) + جـ مع جـ

ضع دائرة $\frac{ء}{ءس}$ ∫(س^{٣} − س) ء س

أ) س^{٣} − س + جـ   [✓ ب) س^{٣} − س]   جـ) $\frac{س^{٤}}{٤}$ − $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ   د) صفر

جتا ٢س = جتا^{٢} س − جا^{٢} س

= ١ − ٢ جا^{٢} س

= ٢ جتا^{٢} س − ١

جا ٢س = ٢ جاس جتاس

جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

١ + ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س

جتا ٢س = ١ − ٢ جا^{٢} س
−١   −١

$\frac{جتا ٢س − ١}{−٢}$ = $\frac{−٢ جا^{٢} س}{−٢}$

* $\boxed{جا^{٢} س = \frac{١}{٢} ⊖ \frac{١}{٢} جتا ٢س}$

* $\boxed{جتا^{٢} س = \frac{١}{٢} ⊕ \frac{١}{٢} جتا ٢س}$

إذا أضعف ⊖

إذا الجنس

إذا ضعيفة ⊕

ص(١٤٠) س١ : أ) $\int ٨ \, \text{د}\text{س} = ٨\text{س} + \text{ث}$

ب) $\int \left(٧\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \frac{٣}{\text{س}^{٤}}\right) \text{د}\text{س}$

$\int \left(٧\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣\text{س}^{-٤}\right) \text{د}\text{س}$

$\frac{٧\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٤\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{ث}$

$= \frac{٧}{٣}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - \text{س}^{-٣} + \text{ث}$

ج) $\int (٣ + \text{س}) \sqrt{\text{س}} \, \text{د}\text{س}$

$\int ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \, \text{د}\text{س}$

$٣ \times \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٥}{٢} \text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

$٢\sqrt{\text{س}^{٣}} + \frac{٥}{٢} \sqrt{\text{س}^{٥}} + \text{ث}$

د) $\int (٥\text{س} + \text{جا}\text{س} \, \text{ظتا}\text{س}) \, \text{د}\text{س}$

$\frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جا}\text{س} + \text{ث}$

هـ) $\int \frac{\text{س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١} \text{د}\text{س} = \int \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٣} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١} \text{د}\text{س}$

$= \int \frac{\cancel{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ١)}\left((\sqrt[٣]{\text{س}})^{٢} + \sqrt[٣]{\text{س}} + ١\right)}{\cancel{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ١)}} \text{د}\text{س}$

$= \int (\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1 \; ءس$

$= \int (س^{\frac{2}{3}} + س^{\frac{1}{3}} + 1) \; ءس$

$= \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + س + ج$

$= \frac{3}{5} \sqrt[3]{س^5} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{س^4} + س + ج$

$س - 1 = (\sqrt{س} - 1)(\sqrt{س} + 1)$

$س - 1 = (\sqrt[3]{س} - 1)(\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1)$

$\int \frac{س - 1}{\sqrt{س} - 1} \; ءس = \int \frac{\cancel{(\sqrt{س} - 1)}(\sqrt{س} + 1)}{\cancel{\sqrt{س} - 1}}$

و) $\int \frac{2س^3 + 5س^2 - 1}{س^2} \; ءس$

$\int \frac{\cancel{س^2}(2س + 5 - \frac{1}{س^2})}{\cancel{س^2}} \; ءس$

$\int 2س + 5 - س^{-2} \; ءس$

$= س^2 + 5س - س^{-1} + ج$

$= س^2 + 5س - \frac{1}{س} + ج$

ز) $\int \frac{1}{جتا^2 س} \; ءس$

$= \int قا^2 س \; ءس = ظاس + ج$

هـ) $\int (٥هـ^{س} + \frac{٢}{س})$ دس

$٥هـ^{س} + \frac{٢لو|س|}{هـ} + جـ$

س٤: $قَ(س) + هـ^{س} =$ جتاس ق(١) = -١ ق(س)؟؟

$\int قَ(س) + هـ^{س}$ دس $= \int$ جتاس دس

$ق(س) + هـ^{س} + جـ =$ جاس

$ق(١) + هـ^{٠} + جـ =$ جا٠

$-١ + ١ + جـ = ٠$

$\boxed{جـ = ٠}$

$\boxed{ق(س) = جاس - هـ^{س}}$

س٣: $\int$ ق(س) دس = جاس - جتاس + ٢

$\frac{د}{دس} \int$ ق(س) دس = (جاس - جتاس + ٢)'

ق(س) = جتاس + جاس

$ق(\frac{\pi}{٢}) = جتا\frac{\pi}{٢} + جا\frac{\pi}{٢}$

= ٠ + ١ = ١

قَ(س) = -جاس + جتاس

$قَ(\frac{\pi}{٢}) = -١ + ٠ = -١$

$ق(\frac{\pi}{٢}) - قَ(\frac{\pi}{٢})$

= ١ - -١ = ٢ و.هـ.م

س٤: $\int (\text{قَ(س)} + \text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٢\text{س}^{٣} + \text{جـ}\,\text{س}^{٢} + ٣$

$\text{قَ}(١) = ٤$

$\text{ق}(٢) = ٦$

$\text{ق}(-١) = ؟؟$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} \int (\text{قَ(س)} + \text{س}^{٢})\,\text{دس} = (٢\text{س}^{٣} + \text{جـ}\,\text{س}^{٢} + ٣)'$

$\text{قَ(س)} + \text{س}^{٢} = ٦\text{س}^{٢} + ٢\text{جـ}\,\text{س}$

$\text{قَ}(١) + ١ = ٦ + ٢\text{جـ}$

$٤ + ١ = ٦ + ٢\text{جـ}$

$٥ = ٦ + ٢\text{جـ}$

$-١ = ٢\text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \frac{-١}{٢}}$

$\int (\text{قَ(س)} + \text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٢\text{س}^{٣} + \frac{-١}{٢}\text{س}^{٢} + ٣$

$\int \text{قَ(س)}\,\text{دس} + \int \text{س}^{٢}\,\text{دس} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٣$

$\text{ق(س)} + \text{جـ}_{١} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٣$

$\text{ق}(٢) + \text{جـ}_{١} + \frac{٨}{٣} = ٢ \times ٨ - \frac{١}{٢} \times ٤ + ٣$

$٦ + \text{جـ}_{١} + \frac{٨}{٣} = ١٦ - ٠$

$\text{جـ}_{١} + \frac{٨}{٣} = ١٠ \Leftarrow \boxed{\text{جـ}_{١} = \frac{٢٢}{٣}}$

$\text{ق}(-١) + \frac{٢٢}{٣} + \frac{١}{٣} \times -١ = ٢ \times -١ - \frac{١}{٢} + ٣$

$\text{ق}(-١) + \frac{٢١}{٣} = \cancel{-٢} - \frac{١}{٢} + \cancel{٣}$

$\text{ق}(-١) = \frac{-٢١ \times ٢}{٣ \times ٢} - \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} = \frac{-٤٢}{٦} - \frac{٣}{٦}$

$= \frac{-٤٥}{٦} = \frac{-١٥}{٢}$

تطبيقات التكامل غير المحدود .

تطبيقات هندسية :

م المماس = قَ(س)

معادلة المماس ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$)

ق(س) = $\int$ قَ(س) دس

جـ ← نعوض (س$_1$، ص$_1$)

قَ(س) = $\int$ قً(س) دس

مثال ١١١ ص (١٤١) :

ص = س + ٢ عند س = ٠

معادلة المماس ↓ نقطة التماس ↓

م = ١ عند س = ٠

قَ(٠) = ١

قً(س) = ٦س جد قاعدة الاقتران

قَ(س) = $\int$ قً(س) دس

= $\int$ ٦س دس

قَ(س) = ٣س^2 + جـ$_1$

∵ قَ(٠) = ١

١ = ٣ × ٠ + جـ$_1$ ⇐ $\boxed{\text{جـ}_1 = 1}$

قَ(س) = ٣س^2 + ١

ق(س) = $\int$ قَ(س) دس = $\int$ ٣س^2 + ١ دس

ق(س) = س^3 + س + جـ$_2$

عندما س = ٠

ص = س + ٢

ص = ٠ + ٢

$\boxed{ص = ٢}$ (٠ ، ٢)

$٢ = ٠ + ٠ + جـ_{٢}$ $\boxed{جـ_{٢} = ٢}$

$د(س) = س^{٣} + س + ٢$

مثال (٣) ص(١٤٢) :

$د''(س) = ١٢س$ (١ ، ٣) ، (-١ ، ١)

$د'(س) = \int د''(س) \, ءس$

$= \int ١٢ س \, ءس$

$د'(س) = ٦س^{٢} + جـ_{١}$

$د(س) = \int د'(س) \, ءس$

$د(س) = \int ٦س^{٢} + جـ_{١} \, ءس$

$\boxed{د(س) = ٢س^{٣} + جـ_{١} س + جـ_{٢}}$

$٣ = ٢ + جـ_{١} + جـ_{٢}$

$\boxed{١ = جـ_{١} + جـ_{٢}}$ ـ ـ ـ ①

$١ = -٢ - جـ_{١} + جـ_{٢}$

$\boxed{٣ = -جـ_{١} + جـ_{٢}}$ ②

بحل ① + ② بطريقة الحذف

١ = ~~جـ$_١$~~ + جـ$_٢$

٣ = ~~-جـ$_١$~~ + جـ$_٢$ بالجمع

٤ = ٢جـ$_٢$

$\boxed{٢ = جـ_٢}$

وبالتعويض جـ$_٢$ = ٢ في

١ = جـ$_١$ + جـ$_٢$

١ = جـ$_١$ + ٢
-٢ -٢

$\boxed{جـ_١ = -١}$

د(س) = ٢س^٢ - س + ٢

س١: ص(١٤٥):

دَ(س) = س(٣س - ٢)

د(٢) = ٥ د(س) ؟

د(س) = ∫ دَ(س) دس

= ∫ ٣س^٢ - ٢س دس

= $\frac{٣س^٣}{٣}$ - $\frac{٢س^٢}{٢}$ + جـ

د(س) = س^٣ - س^٢ + جـ

د(٢) = ٥

٥ = ٨ - ٤ + جـ

$\boxed{١ = جـ}$

د(س) = س^٣ - س^٢ + ١

س٢ : دَ(س) = م س - ٣ $س^{٢}$

س + ص = ٤ مماس عند (١ ، د(١)) د(س) ؟؟

ص = ٤ - س

م = -١

دَ(١) = -١

دَ(س) = م س - ٣ $س^{٢}$

دَ(١) = $\underset{+٣}{-١}$ = م $\underset{+٣}{-٣}$

$\boxed{م = ٢}$

دَ(س) = ٢ س - ٣ $س^{٢}$

د(س) = $\int$ دَ(س) ء س

= $\int$ (٢ س - ٣ $س^{٢}$) ء س

د(س) = $س^{٢}$ - $س^{٣}$ + جـ

٣ = ١ - ١ + جـ

$\boxed{جـ = ٣}$

د(١) = ٤ - ١

د(س) = $س^{٢}$ - $س^{٣}$ + ٣

د(١) = ٣

س٣: ميل المماس = ٢√أ س

ق(س) ← تمر بالأصل و (١، ٢)

ميل المماس = قَ(س)

قَ(س) = ٢√أ س

ق(س) = ∫ $\underbrace{\text{٢√أ}}_{\text{ثابت}}$ س ءس

ق(س) = $\frac{\cancel{\text{٢}}\text{√أ}}{\cancel{\text{٢}}}$ س² + جـ

ق(س) = √أ س² + جـ

ق(٠) = ٠

٠ = √أ × ٠ + جـ

$\boxed{\text{جـ = ٠}}$

ق(س) = √أ س²   ($\overset{\text{س}}{\text{١}}$ ، $\overset{\text{ص}}{\text{٢}}$)

---

٢ = √أ × ١

(٢)² = (√أ)²

$\boxed{\text{أ = ٤}}$

√٤ س²

$\boxed{\text{ق(س) = ٢ س²}}$

س٤: قً(س) = جتا س

قَ(π) = ٢   ق(π) = -١

قَ(س) = ∫ قً(س) ءس

= ∫ جتا س ءس

قَ(س) = جا س + جـ١

٢ = جا π + جـ١

٢ = ٠ + جـ١ ⇐ $\boxed{\text{جـ١ = ٢}}$

$هـ'(س) = جاس + ٢$

$هـ(س) = \int هـ'(س)\, ءس$

$= \int (جاس + ٢)\, ءس$

$هـ(س) = - جتاس + ٢س + جـ$

$١ = - جتا\pi + ٢\pi + جـ$

$١ = ١ + ٢\pi + جـ$

$\boxed{جـ = -٢\pi}$

$$\boxed{هـ(س) = - جتاس + ٢س - ٢\pi}$$

تطبيقات فيزيائية :

$$\begin{tikzcd} ت \arrow[r, bend left, "\int"] & ع \arrow[l, "اشتقاق"] \arrow[r, bend left, "\int"] & ف \arrow[l, "اشتقاق"] \end{tikzcd}$$

$ع = ف'(ن)$ $\qquad$ $ت = ع'(ن)$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, ءن = \int ف'(ن)\, ءن$

$ع(ن) = \int ت(ن)\, ءن = \int ع'(ن)\, ءن$

ملاحظات :

١- السرعة الابتدائية ← $ع(٠)$

٢- تحرك جسم من السكون ← $ع(٠) = ٠$

٣- تحرك جسم من نقطة الأصل $ف(٠) = ٠$

٤- جسم على ارتفاع ل ← $ف(٠) = ل$

مثال (٣) ص (١٤٣) :

ف(٢)

ف(٠) = ٠ ع(ن) $٣ن^{٢} + ٢ن$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن$

$= \int (٣ن^{٢} + ٢ن)\, دن$

$ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ$

∵ ف(٠) = ٠

$٠ = ٠ + ٠ + جـ \rightarrow \boxed{جـ = ٠}$

$ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}$

$ف(٢) = ٢^{٣} + ٢^{٢}$

= ٨ + ٤ = ١٢

سؤال: إذا كانت سرعة جسم تعطى بالعلاقة $ع(ن) = ٢ن - ن^{٢} + ٣$

وكانت ف = ٢٤ عندما ن = ٣

جدي قاعدة ف(ن) / الكتي ف بدلالة ن

$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن$

$= \int ٢ن - ن^{٢} + ٣\, دن$

$= \frac{٢ن^{٢}}{٢} - \frac{ن^{٣}}{٣} + ٣ن + جـ$

$= ن^{٢} - \frac{١}{٣} ن^{٣} + ٣ن + جـ$

$ف(٣) = ٩ - \frac{١}{\underset{١}{\cancel{٣}}} \times \overset{٩}{\cancel{٢٧}} + ٩ + جـ$

$٢٤ = ٩ - ٩ + ٩ + جـ$

$٢٤ = ٩ + جـ \Leftarrow جـ = ١٥$ $ف(ن) = ن^{٢} - \frac{١}{٣} ن^{٣} + ٣ن + ١٥$

مثال (٤) ص (١٤٤) :

ع(٠) = ٦٤   ف(٠) = ٨٠   ت(ن) = -٣٢

ع(ن) = ∫ ت(ن) ء ن

= ∫ -٣٢ ء ن

= -٣٢ن + ث

٦٤ = ث

ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤

ف(ن) = ∫ ع(ن) ء ن = ∫ -٣٢ن + ٦٤ ء ن

= -١٦ن² + ٦٤ن + ث

٨٠ = ث

ف(ن) = -١٦ن² + ٦٤ن + ٨٠

وقت الارتفاع عندما ع(ن) = ٠

-٣٢ن + ٦٤ = ٠

٣٢ن / ٣٢ = ٦٤ / ٣٢

ن = ٢

ف(٢) = -١٦ × ٤ + ٦٤ × ٢ + ٨٠

= ١٤٤

س٥- : ع(٠) = ٣ ت(ن) = ن ف(٠) = ٠

ع(٥) = ؟؟ ف(٥) = ؟؟

ع(ن) = $\int$ ت(ن) ءن

= $\int$ ن ءن

= $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + جـ

ع(٠) = ٠ + جـ

$\boxed{٣ = جـ}$

ع(ن) = $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + ٣

ع(٥) = $\frac{٥^{٢}}{٢}$ + ٣

ف(ن) = $\int$ ع(ن) ءن

= $\int$ $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + ٣ ءن

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{ن^{٣}}{٣}$ + ٣ن + جـ

ف(٠) = ٠ + ٠ + جـ

$\boxed{٠ = جـ}$

ف(ن) = $\frac{ن^{٣}}{٦}$ + ٣ن

ف(٥) = $\frac{١٢٥}{٦}$ + ١٥

س١ : ص'(س) = $٢\sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ (١ ، $\frac{٢}{٣}$)

ص(س) = $\int$ ص'(س) دس

= $\int ٢\sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس

= $\int س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$ دس

= $\frac{٢}{٣} \times س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}}$ + ج

= $\frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} + ٢\sqrt{س}$ + ج

ص(١) = $\frac{٢}{٣} \times ١ + ٢$ + ج

$\frac{٥}{٣} = \frac{٢}{٣} + ٢$ + ج

$\boxed{ج = -٢}$

ص(س) = $\frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} + ٢\sqrt{س} - ٢$

س٢ : ف(٠) = ٤٥ ع(ن) = -١٠ن + ٤٠

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن

= $\int$ -١٠ن + ٤٠ دن

= $\frac{-١٠ن^٢}{٢}$ + ٤٠ن + ج = -٥ن² + ٤٠ن + ج

ف(٠) = ٠ + ٠ + ج

$\boxed{٤٥ = ج}$

ف(ن) = -٥ن² + ٤٠ن + ٤٥

$ف(ن) = ٠$

$\frac{٠}{-٥} = \frac{-٥ن^{2}}{-٥} + \frac{٤٠ن}{-٥} + \frac{٤٥}{-٥}$

$٠ = ن^{2} - ٨ن - ٩$

$= (ن - ٩)(ن + ١)$

$\boxed{ن = ٩}$ $\quad$ $ن = -١ \times$

خطة الحل:

ارتفاع البرج = ل

$ف(٠) = ل$

لحظة ارتطام الجسم بسطح الأرض

$ف(٠) = ٠$

سؤال: بدأ جسم حركته من نقطة الأصل وكانت سرعته $ع = ٢ن - ٣$

احسب الزمن الذي عنده يعود الجسم إلى نقطة الأصل

$ف(٠) = ٠$ $\qquad$ $ع = ٢ن - ٣$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, ءن$

$= \int ٢ن - ٣\, ءن$

$= \frac{٢ن^{2}}{٢} - ٣ن + جـ = ن^{2} - ٣ن + جـ$

$ف(٠) = ٠$

$٠ - ٠ + جـ = ٠$

$\boxed{جـ = ٠}$

$ف(ن) = ن^{2} - ٣ن$

$ف(ن) = ٠$

$ن^{2} - ٣ن = ٠$

$ن(ن - ٣) = ٠$

$ن = ٠ \times$ $\qquad$ $ن - ٣ = ٠$

$\boxed{ن = ٣}$

طرق التكامل

أولاً: التكامل بالتعويض

قاعدة: $\int \text{د}(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـَ}(\text{س}) \; \text{د س}$

مثال ١: $\int \text{٢س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤} \; \text{د س}$

نفرض $\text{س}^{٢} + ٤ = \text{ص}$

باشتقاق الطرفين $\dfrac{\text{٢س د س}}{\text{٢س}} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٢س}} \Leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

$$\int \cancel{\text{٢س}} \times \sqrt{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س}}}$$

$$\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \; \text{د ص}$$

$$\frac{٢}{٣} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\frac{٢}{٣} (\text{س}^{٢} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

حدي:

$$\int (\text{٤س} - ٦) \; \text{جا}^{٢} (\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥) \; \text{د س}$$

نفرض $\text{ع} = \text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥$

$\text{د س} = \dfrac{\text{د ع}}{\text{٢س} - ٣}$

$$\int ٢ \cancel{(\text{٢س} - ٣)} \; \text{جا}^{٢} \text{ع} \; \frac{\text{د ع}}{\cancel{\text{٢س} - ٣}}$$

$$٢ \int \text{جا}^{٢} \text{ع} \; \text{د ع}$$

$$\cancel{٢} \int \frac{١}{\cancel{٢}} - \frac{١}{\cancel{٢}} \text{جتا ٢ع} \; \text{د ع}$$

$$\int ١ - \text{جتا ٢ع} \; \text{د ع}$$

$$\text{ع} - \frac{\text{جا ٢ع}}{٢} + \text{جـ} = (\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥) - \frac{١}{٢} \text{جا}(\text{٢س}^{٢} - \text{٦س} + ١٠) + \text{جـ}$$

① $\int \frac{٣}{(س^٢ - ٤س + ٤)^٢}\, دس$ ② $\int \frac{جتا\sqrt{١+س}}{\sqrt{١+س}}\, دس$

$\boxed{١}$ $\int \frac{٣}{((س-٢)^٢)^٢}\, دس$

$= \int \frac{٣}{(س-٢)^٤}\, دس$ نفرض $ع = س - ٢$

$دس = \frac{دع}{١}$

$= \int ٣\, ع^{-٤}\, دع$

$= \frac{٣\, ع^{-٣}}{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{(س-٢)^٣} + ث$

بدون فرض وتعويض

$\int ٣\, (س-٢)^{-٤}\, دس$

$= \frac{٣\, (س-٢)^{-٣}}{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{(س-٢)^٣} + ث$

$\boxed{٢}$ $\int \frac{جتا\sqrt{١+س}}{\sqrt{١+س}}$ $ع = \sqrt{س+١}$

$دس = \frac{دع}{\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}}$

$= \frac{دع}{\frac{١}{٢ع}} = دع\, (٢ع)$

$\int \frac{جتاع}{ع}\, ٢ع\, دع$

$٢\, جاع + ث$

$٢\, جا\sqrt{س+١} + ث$

مثال(٢) ص(١٤٧):

$$\int (\text{٢س} + ١)^{٥} \, \text{ء س} = \frac{(\text{٢س} + ١)^{٦}}{٦ \times ٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{١٢} (\text{٢س} + ١)^{٦} + \text{جـ}$$

مثال(٥): $\int \text{قا}^{٢} (\text{٣س} + ٢) \, \text{ء س}$

$$= \frac{\text{ظا}(\text{٣س} + ٢)}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣} \text{ظا} (\text{٣س} + ٢) + \text{جـ}$$

$$\boxed{\int \text{قَ}(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ء س} = \frac{\text{ق}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}}$$

$$\int \text{جا}(\text{٢س} - ٤) \, \text{ء س}$$

$$\frac{- \text{جتا}(\text{٢س} - ٤)}{٢} + \text{جـ}$$

$$- \frac{١}{٢} \text{جتا}(\text{٢س} - ٤) + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتا}(\text{٤س} + ١) \, \text{ظتا}(\text{٤س} + ١) \, \text{ء س}$$

$$\frac{- \text{قتا}(\text{٤س} + ١)}{٤} + \text{جـ}$$

$$- \frac{١}{٤} \text{قتا}(\text{٤س} + ١) + \text{جـ}$$

مثال (٣)

$\int س\, هـ^{س^٢+١}\, ءس$ $ع = س^٢ + ١$

$ءس = \frac{ءع}{٢س}$

$\int س\, هـ^{ع}\, \frac{ءع}{٢س}$

$\frac{١}{٢}\int هـ^{ع}\, ءع$

$\frac{هـ^{ع}}{٢} + جـ = \frac{هـ^{س^٢+١}}{٢} + جـ$

مثال (٤) : $\int \frac{١+\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}}\, ءس$

$ع = \sqrt{س+١}$

$ءس = \frac{ءع}{\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}} = (٢\sqrt{س+١})\, ءع$

$= ٢ع\, ءع$

$\int \left(\frac{١+ع}{ع} \times ٢ع\right) ءع$

$\int (٢ + ٢ع)\, ءع = ٢ع + ع^٢ + جـ$

$= ٢\sqrt{س+١} + (\sqrt{س+١})^٢ + جـ$

$= ٢\sqrt{س+١} + س + ١ + جـ$

مثال (٥) : $\int جا^٣ س\, ءس$

$= \int جا^٢ س\, جا س\, ءس = \int (١ - جتا^٢ س)\, جا س\, ءس$

$$= \int (\text{١} - \text{ع}^{\text{٢}})\, \cancel{\text{جاس}} \times \frac{\text{دع}}{(-)\cancel{\text{جاس}}}$$

$\text{ع} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{-\text{جاس}}$

$$\int (\text{ع}^{\text{٢}} - \text{١})\ \text{دع}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{ع}^{\text{٣}} - \text{ع} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س} - \text{جتاس} + \text{جـ}$$

مثال (٦) : $\int \text{س}^{\text{٥}}\, [\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}]^{\text{٣}}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{١}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{٣}\,\text{س}^{\text{٢}}}$

$$= \int \text{س}^{\overset{\text{٣}}{\cancel{\text{٥}}}}\, \text{ع}^{\text{٣}}\ \frac{\text{دع}}{\text{٣}\,\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{س}^{\text{٣}}\, \text{ع}^{\text{٣}}\ \text{دع}$$

لكن $\text{ع} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{١}$

$\text{س}^{\text{٣}} = \text{ع} - \text{١}$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{ع} - \text{١})\, \text{ع}^{\text{٣}}\ \text{دع}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{ع}^{\text{٤}} - \text{ع}^{\text{٣}}\ \text{دع}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \left(\frac{\text{ع}^{\text{٥}}}{\text{٥}} - \frac{\text{ع}^{\text{٤}}}{\text{٤}} \right) + \text{جـ}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \left(\frac{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٥}}}{\text{٥}} - \frac{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٤}}}{\text{٤}} \right) + \text{جـ}$$

مثال (٣) :

$$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} \qquad \frac{\text{جا٢س}}{٢} = \frac{\text{٢جاس جتاس}}{٢}$$

$$\int (\text{جاس جتاس})^{٢}\ \text{ءس} \qquad \frac{١}{٢}\ \text{جا٢س} = \text{جتاس جاس}$$

$$\int \left(\frac{١}{٢}\ \text{جا٢س}\right)^{٢}\ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{٤} \int \text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{٤} \int \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\ \text{جتا٤س}\ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{٤} \left(\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٢} \times \frac{\text{جا٤س}}{٤} \right) + \text{جـ}$$

$$\frac{١}{٨}\text{س} - \frac{١}{٣٢}\ \text{جا٤س} + \text{جـ}$$

قاعدة :
$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\ \text{ءس} = \frac{\text{لو}\,|\text{ق}(\text{س})|}{\text{هـ}} + \text{جـ}$$

$$\text{نفرض ق(س)} = \text{ص}$$

$$\text{ق}'(\text{س})\ \text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ق}'(\text{س})}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}}\ \text{ءص} = \frac{\text{لو}\,|\text{ص}|}{\text{هـ}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{لو}\,|\text{ق}(\text{س})|}{\text{هـ}} + \text{جـ}$$

أمثلة :

جدي :

① $\int \frac{\text{س}+1}{\text{س}^2+2\text{س}+5} \times \frac{2}{2} \, \text{د س}$

$\swarrow \frac{\text{د س}+2}{2(\text{س}+1)}$

$\frac{1}{2} \, \text{لو}_{\text{ه}} |\text{س}^2+2\text{س}+5| + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 2\text{س} + 5$

$\frac{\text{د ص}}{2\text{س}+2} = \text{د س}$

$\int \frac{\text{س}+1}{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{2(\text{س}+1)}$

$\frac{1}{2} \, \text{لو} |\text{ص}| + \text{جـ}$

② $\int \frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3+5} \, \text{د س}$

$= \text{لو}_{\text{ه}} |\text{س}^3+5| + \text{جـ}$

③ $\int \frac{\text{جا}2\text{س} - \text{جتا}2\text{س}}{\text{جتا}2\text{س} + \text{جا}2\text{س}} \, \text{د س}$

$\text{ع} = \text{جتا}2\text{س} + \text{جا}2\text{س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ع}}{-2\text{جا}2\text{س} + 2\,\text{جتا}2\text{س}}$

$\int \frac{\text{جا}2\text{س} - \text{جتا}2\text{س}}{\text{ع}} \; \frac{\text{د ع}}{2(\cancel{\text{جتا}2\text{س} - \text{جا}2\text{س}})}$

$= \frac{\text{د ع}}{2(\text{جتا}\,2\text{س} - \text{جا}2\text{س})}$

$= \frac{-1}{2} \int \frac{1}{\text{ع}} \, \text{د ع}$

$= \frac{-1}{2} \, \text{لو} |\text{ع}| + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{2} \, \text{لو}_{\text{ه}} |\text{جتا}2\text{س} + \text{جا}2\text{س}| + \text{جـ}$

أسئلة :

① $\int \text{ظاس د س}$ ③ $\int \text{قاس د س}$

② $\int \text{ظتاس د س}$ ④ $\int \text{قتاس د س}$

صفحة ١

$\boxed{١}$ $\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{د س}$

$-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

$\boxed{٢}$ $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \, \text{د س}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

$\boxed{٣}$ $\int \text{قاس} \, \text{د س} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$

$\int \frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \, \text{د س}$

$\text{ع} = \text{قاس} + \text{ظاس}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ع}}{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}}$

$\int \frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{1}{\text{ع}} \, \text{د ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{جـ}$

$\boxed{٤}$ $\int \text{قتاس د س} \times \frac{\text{قتاس} - \text{ظتاس}}{\text{قتاس} - \text{ظتاس}}$

$\int \frac{\text{قتا}^2\text{س} - \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} - \text{ظتاس}} \, \text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس} - \text{ظتاس}| + \text{جـ}$

تمارين (٤-٢أ) ص (١٥٠) :

س١ : (أ) $\int \frac{٤}{(س+٢)^{٥}} \, ءس$

$= \int ٤(س+٢)^{-٥} \, ءس$

$= \frac{٤(س+٢)^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \frac{-١}{(س+٢)^{٤}} + جـ$

(ب) $\int (١-س) \, جا(س^{٢}-٢س) \, ءس$

$ع = س^{٢}-٢س$

$ءس = \frac{ءع}{٢س-٢}$

$\int \overset{-١}{\cancel{(١-س)}} \, جاع \, \frac{ءع}{٢\cancel{(س-١)}}$

$-\frac{١}{٢}\int جاع \, ءع$

$\frac{١}{٢} جتاع + جـ$

$\frac{١}{٢} جتا(س^{٢}-٢س) + جـ$

(هـ) $\int \frac{لو_{هـ} س}{س} \, ءس$

$ع = لو_{هـ} س$

$ءس = \frac{ءع}{\frac{١}{س}} = س \, ءع$

$= \int \frac{ع}{\cancel{س}} \, \cancel{س} \, ءع$

$= \frac{ع^{٢}}{٢} + جـ = \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$

(د) $\int (س^٢ + ٢)\sqrt{س+١}\; ءس$ $\qquad$ $ع = س + ١$

$ءس = ءع$

$\int (س^٢+٢)\,(س+١)^{\frac{١}{٢}}\; ءس$

$\int (س^٢+٢)\; ع^{\frac{١}{٢}}\; ءع$ $\qquad$ $ع = س + ١$

$س = ع - ١$ تربيع الطرفين

$س^٢ = ع^٢ - ٢ع + ١$

$\int (ع^٢ - ٢ع + ٣)\, ع^{\frac{١}{٢}}\; ءع$ $\qquad$ $س^٢ + ٢ = ع^٢ - ٢ع + ١ + ٢$

$= ع^٢ - ٢ع + ٣$

$\int (ع^{\frac{٥}{٢}} - ٢ع^{\frac{٣}{٢}} + ٣ع^{\frac{١}{٢}})\; ءع$

$\frac{٢}{٧} \times ع^{\frac{٧}{٢}} - ٢ \times \frac{٢}{٥} \times ع^{\frac{٥}{٢}} + ٣ \times \frac{٢}{٣} \times ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\frac{٢}{٧}\sqrt{(س+١)^٧} - \frac{٤}{٥}\sqrt{(س+١)^٥} + ٢\sqrt{(س+١)^٣} + ث$

(هـ) $\int (س+٢)^٢ (س-١)^٦\; ءس$

$ع = س - ١$

$\int (ع+٣)^٢ (ع)^٦\; ءع$ $\qquad$ $ءس = ءع$

$س = ع + ١$

$\int (ع^٢ + ٦ع + ٩)\; ع^٦\; ءع$ $\qquad$ $س + ٢ = ع + ٣$

$\int ع^٨ + ٦ع^٧ + ٩ع^٦\; ءع$

$= \frac{ع^٩}{٩} + \frac{٦ع^٨}{٨} + \frac{٩ع^٧}{٧} + ث$

$= \frac{(س-١)^٩}{٩} + \frac{\overset{٣}{\cancel{٦}}(س-١)^٨}{\underset{٤}{\cancel{٨}}} + \frac{٩(س-١)^٧}{٧} + ث$

(و) $\int \text{جتا}^4\text{س} \ \text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س})^2 \ \text{دس}$

$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س})^2 \ \text{دس}$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{4}\underline{\text{جتا}^2 2\text{س}}) \ \text{دس}$

$\frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا}4\text{س})$

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س} + \underline{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\text{جتا}4\text{س}}) \ \text{دس}$

$= \int (\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{8}\text{جتا}4\text{س}) \ \text{دس}$

$= \frac{3}{8}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{32}\text{جا}4\text{س} + \text{ج}$

(ز) $\int \frac{1}{1+\text{جاس}} \ \text{دس} \times \frac{1-\text{جاس}}{1-\text{جاس}}$

$\int \frac{1-\text{جاس}}{(1+\text{جاس})(1-\text{جاس})} \ \text{دس}$

$\int \frac{1-\text{جاس}}{1-\text{جا}^2\text{س}} \ \text{دس}$

$\int \frac{1-\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{دس} = \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قا}^2\text{س} - \text{قاس ظاس} \ \text{دس}$

$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{ج}$

(٥) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{-س} + هـ^{س}} \, دس$

$\int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{\cancel{هـ^{-س}}(١ + هـ^{٢س})} \, دس$

$\int \frac{هـ^{٢س}}{١ + هـ^{٢س}} \, دس$

$\frac{لو|١ + هـ^{٢س}|}{٢} + ج$

$\frac{هـ^{س}}{هـ^{-س}} = هـ^{٢س}$ عند القسمة نطرح الأس

يمكن أيضاً الحل على التعويض $ع = ١ + هـ^{٢س}$

س٢:

(٩) $\int \sqrt{\frac{س+١}{س^{٥}}} \, دس$

$\int \sqrt{\frac{س+١}{س^{٤} س}} \, دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{س+١}{س}} \, دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{س}{س} + \frac{١}{س}} \, دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{١ + \frac{١}{س}} \, دس$ $\quad ع = ١ + \frac{١}{س}$

$دس = \frac{دع}{\frac{-١}{س^{٢}}} = -س^{٢} \, دع$

$\int \cancel{\frac{١}{س^{٢}}} (ع)^{\frac{١}{٢}} \; -\cancel{س^{٢}} \, دع$

$-\frac{٢}{٣} \times ع^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$-\frac{٢}{٣}\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{-٢}{٣} \sqrt{\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٣}} + ج$

④ $\int \frac{1}{\text{س}^{2}}$ حا $\frac{1}{\text{س}}$ ءس

ع = $\frac{1}{\text{س}}$

ءس = $\frac{\text{ءع}}{\frac{-1}{\text{س}^{2}}}$ = −س² ءع

$\int \cancel{\frac{1}{\text{س}^{2}}}$ حاع −س² ءع

جتاع + جـ = جتا $\frac{1}{\text{س}}$ + جـ

⑤ $\int$ (جاس + قتاس)² ءس

$\frac{1}{\text{جاس}}$

$\int$ (جا²س + ٢$\cancel{\text{جاس}}$ قتاس + قتا²س) ءس

$\int$ (جا²س + ٢ + قتا²س) ءس

$\int \left(\frac{1}{2}\right)$ − $\frac{1}{2}$ جتا٢س + $\boxed{٢}$ + قتا²س ءس

$\int \frac{5}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س + قتا²س ءس

$\frac{5}{2}$س − $\frac{1}{4}$ جا ٢س − ظتا س + جـ

④ $\int \frac{(س+٢)^٥}{س^٧} \, دس$

$\int \frac{(س+٢)^٥}{س^٥ \times س^٢} \, دس$

$\int \left(\frac{س+٢}{س}\right)^٥ \times \frac{١}{س^٢} \, دس$

أخذ س عامل مشترك

$\int \left(\frac{\cancel{س}(١+\frac{٢}{س})}{\cancel{س}}\right)^٥ \times \frac{١}{س^٢} \, دس$

$\int \frac{(١+\frac{٢}{س})^٥}{س^٢} \, دس$

$ع = ١ + \frac{٢}{س}$

$دس = \frac{دع}{\frac{-٢}{س^٢}} = \frac{-س^٢ دع}{٢}$

$\int \frac{ع^٥}{\cancel{س^٢}} \quad \frac{-\cancel{س^٢} دع}{٢}$

$-\frac{١}{٢} \frac{ع^٦}{٦} + ث$

$-\frac{١}{١٢} (١+\frac{٢}{س})^٦ + ث$

⑤ $\int س^٢ (س^٧ + س^٣)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$\int س^٢ (س^٣ (س^٤+١))^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$\int س^٢ \times س (س^٤+١)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$\int س^٣ (س^٤+١)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$ع = س^٤ + ١$

$دس = \frac{دع}{٤س^٣}$

$\int \cancel{س^٣} (ع)^{\frac{١}{٣}} \frac{دع}{٤\cancel{س^٣}}$

$\frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times ع^{\frac{٤}{٣}} + ث = \frac{٣}{١٦} (س^٤+١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

(و) $\int$ ظا^{٣}س دس

$\int$ ظاس ظا^{٢}س دس

$\int$ ظاس (قا^{٢}س - ١) دس

$\int$ ظاس قا^{٢}س دس - $\int$ ظاس دس

ع = ظاس

دس = $\frac{\text{دع}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int$ ع $\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ $\frac{\text{دع}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$ - $\int$ ظاس دس

$\frac{\text{ع}^{٢}}{٢}$ + $\underbrace{\text{لو}}_{\text{هـ}}$ |جتاس| + جـ

= $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + $\underbrace{\text{لو}}_{\text{هـ}}$ |جتاس| + جـ

أسئلة:

① $\int (1+\sqrt{2\text{س}-1})^{5}\,\text{دس}$

② $\int \frac{(\text{س}-1)^{3}}{(\text{س}+1)^{5}}\,\text{دس}$

③ $\int (\text{س}^{5}+1)^{8}\cdot\text{س}^{14}\,\text{دس}$

④ $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}+1}\,(\sqrt{\text{س}+1}+5)^{5}}$

$\boxed{1}$ $\int (1+\sqrt{2\text{س}-1})^{5}\,\text{دس}$

$\text{ع} = 1+\sqrt{2\text{س}-1}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{\frac{2}{2\sqrt{2\text{س}-1}}}$

$\int (\text{ع})^{5}\,\sqrt{2\text{س}-1}\,\text{دع}$

$= \sqrt{2\text{س}-1}\,\text{دع}$

$\sqrt{2\text{س}-1} = \text{ع}-1$

$\int (\text{ع})^{5}\,(\text{ع}-1)\,\text{دع}$

$\int \text{ع}^{6}-\text{ع}^{5}\,\text{دع}$

$\frac{\text{ع}^{7}}{7} - \frac{\text{ع}^{6}}{6} + \text{ث}$

$\frac{1}{7}(1+\sqrt{2\text{س}-1})^{7} - \frac{1}{6}(1+\sqrt{2\text{س}-1})^{6} + \text{ث}$

$\boxed{٢}$ $\int \frac{(س-١)^{٣}}{(س+١)^{٥}}\, دس$

$\int \frac{(س-١)^{٣}}{(س+١)^{٣}(س+١)^{٢}}\, دس$

$\int \left(\frac{س-١}{س+١}\right)^{٣} \times \frac{١}{(س+١)^{٢}}\, دس$

$\int (ع)^{٣} \times \frac{١}{\cancel{(س+١)^{٢}}} \frac{(س+١)^{٢}}{٢}\, دع$

$ع = \frac{س-١}{س+١}$

$دس = \frac{دع}{\frac{(س+١)-(س-١)}{(س+١)^{٢}}}$

$= \frac{(س+١)^{٢}\, دع}{س+١-س+١}$

$= \frac{(س+١)^{٢}\, دع}{٢}$

$\frac{١}{٢} \frac{ع^{٤}}{٤} + ث$

$\frac{١}{٨} \left(\frac{س-١}{س+١}\right)^{٤} + ث$

$\boxed{٣}$ $\int (س^{٥}+١)^{٨}\, س^{١٤}\, دس$

$\int (ع)^{٨}\, \overset{١٠}{\cancel{س^{١٤}}}\, \frac{دع}{٥\cancel{س^{٤}}}$

$ع = س^{٥} + ١$

$دس = \frac{دع}{٥س^{٤}}$

$\frac{١}{٥} \int (ع)^{٨} (ع^{٢} - ٢ع + ١)\, دع$

$س^{٥} = ع - ١$ تربيع الطرفين

$س^{١٠} = ع^{٢} - ٢ع + ١$

$\frac{١}{٥} \int ع^{١٠} - ٢ع^{٩} + ع^{٨}\, دع$

$\frac{١}{٥} \left(\frac{ع^{١١}}{١١} - ٢\frac{ع^{١٠}}{١٠} + \frac{ع^{٩}}{٩} \right) + ث$

$\frac{١}{٥٥}(س^{٥}+١)^{١١} - \frac{١}{٢٥}(س^{٥}+١)^{١٠} + \frac{١}{٤٥}(س^{٥}+١)^{٩} + ث$

$\boxed{4}$ $$\int \frac{دس}{\sqrt{س+1}\,\left(\sqrt{س+1}+5\right)^{5}}$$

$ع = \sqrt{س+1} + 5$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$$

$$\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{س+1}}\, ع^{5}} \; 2\cancel{\sqrt{س+1}}\; دع \qquad دس = 2\sqrt{س+1}\; دع$$

$$2\int ع^{-5}\; دع$$

$$2\;\frac{ع^{-4}}{-4} + جـ$$

$$\frac{-1}{2}\, ع^{-4} + جـ$$

$$\frac{-1}{2\left(\sqrt{س+1}+5\right)^{4}} + جـ$$

تكاملات على الدرس السابق (قواعد التكامل) :

$\boxed{1}$ $\int جا2س\; جتا2س\; دس$

$$\int \frac{جا4س}{2}\; دس \qquad جا2س = 2جاس\; جتاس$$

$$\frac{جا4س}{2} = \frac{\cancel{2}\,جا2س\; جتا2س}{\cancel{2}}$$

$$\frac{1}{2}\int جا4س\; دس$$

$$جا5س = 2جا\frac{5}{2}س\; جتا\frac{5}{2}س$$

$$\frac{1}{2} \times -\frac{جتا4س}{4} + جـ = -\frac{1}{8}\; جتا4س + جـ$$

$\boxed{2}$ $$\int \frac{1 - جا^{2}س}{1+جاس}\; دس = \int \frac{(1-جاس)\,(1+\cancel{جاس})}{(1+\cancel{جاس})}\; دس$$

$$= \int (1-جاس)\; دس$$

$$= س + جتاس + جـ$$

$\boxed{٣}$ $\int \text{جا}^{2}\,\text{٢س}\;\text{دس}$

$\int \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٤س}\;\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}\,\text{جا٤س} + \text{ج}$

$\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٨}\,\text{جا٤س} + \text{ج}$

$\boxed{٤}$ $\int \text{جتا}^{2}\,\frac{\text{س}}{٢}\;\text{دس}$

$\int \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا س}\;\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جا س} + \text{ج}$

$\boxed{٥}$ $\int (٣ + ٣\,\text{ظا}^{2}\text{س})\;\text{دس}$

$\int ٣(١ + \text{ظا}^{2}\text{س})\;\text{دس}$

$\int ٣\,\text{قا}^{2}\text{س}\;\text{دس}$

$٣\,\text{ظا س} + \text{ج}$

$\boxed{٦}$ $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{2}\text{س}\;\text{جتا}^{2}\text{س}}$

$\int \frac{\text{دس}}{(\text{جا س}\;\text{جتا س})^{2}}$

$$\int \frac{1}{(\frac{١}{٢}\text{جا}\,٢\text{س})^{٢}}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{1}{\frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}\,\text{د س}$$

$$٤\int \text{قتا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{د س}$$

$$٤ \times -\frac{١}{٢}\,\text{ظتا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$$

$$-٢\,\text{ظتا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$$

$\boxed{٧}$

$$\int \frac{1}{١ + \text{جتا}\,٢\text{س}}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{1}{١ + (٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١)}\,\text{د س}$$

$$= \int \frac{1}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{د س}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{ظا س} + \text{جـ}$$

التكامل بالأجزاء

القاعدة : ∫ ص دع = ص.ع − ∫ ع . دص

مثال (1) : ∫ س جتا س دس

ص = س ⟶ × ⟶ دع = جتا س دس (تكامل)

(الاشتقاق) دص = 1 دس ⟵ −∫ ⟵ ع = جا س

= ص.ع − ∫ ع دص

= س جا س − ∫ جا س دس

= س جا س + جتا س + جـ

نشاط (1)

∫ س^{٢} جا س دس
ص ، دع

ص = س^{٢} ⟶ × ⟶ دع = جا س دس

دص = ٢ س دس ⟵ −∫ ⟵ ع = −جتا س

= −س^{٢} جتا س +∫* ٢س جتا س دس

*ص = ٢س ⟶ × ⟶ دع = جتا س دس

دص = ٢ دس ⟵ −∫ ⟵ ع = جا س

= −س^{٢} جتا س +٢س جا س +٢ جتا س + جـ

*٢س جا س − ∫ ٢ جا س دس

٢س جا س + ٢ جتا س

مثال (٢) ص (١٥٢) :

$\int \underbrace{(س-١)}_{ص} \underbrace{هـ^{س} دس}_{دع}$

$ص = س - ١ \times دع = هـ^{س} دس$

$دص = ١ دس \quad ع = هـ^{س}$

$\xleftarrow{-\int}$

$(س-١) هـ^{س} - \int هـ^{س} دس$

$س هـ^{س} - ٢هـ^{س} + جـ$

نشاط (١) :

$\int هـ^{\sqrt{س}} دس$

$ع = \sqrt{س}$

$دس = \frac{دع}{\frac{1}{٢\sqrt{س}}}$

$= ٢\sqrt{س} دع$

$= ٢ع دع$

$\int هـ^{ع} ٢ع دع$

$\int \underbrace{٢ع}_{ص} \underbrace{هـ^{ع} دع}_{دهـ}$

$ص = ٢ع \times دهـ = هـ^{ع} دع$

$دص = ٢ دع \quad هـ = هـ^{ع}$

$\xleftarrow{-\int}$

$٢ع هـ^{ع} - \int ٢هـ^{ع} دع$

$٢ع هـ^{ع} - ٢هـ^{ع} + جـ$

$٢\sqrt{س} \times هـ^{\sqrt{س}} - ٢هـ^{\sqrt{س}} + جـ$

مثال (٣) : $\int \frac{س}{\sqrt{س+٢}} دس$

$ص = س + ٢ \Leftarrow س = ص - ٢$

$دص = دس$

$\int \frac{ص-٢}{\sqrt{ص}} دص$

$\int \frac{ص-٢}{ص^{\frac{1}{2}}} دص$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}} \ \text{ء ص}$$

$$\int \text{ص}^{\frac{1}{2}} - 2\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}} \ \text{ءص}$$

$$\frac{2}{3}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}} - 2\times 2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$$

$$\frac{2}{3}(\text{س}+2)^{\frac{3}{2}} - 4(\text{س}+2)^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$$

مثال (٤) ص(١٥٣) : تكامل دوار

$$\int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ص}} \ \underbrace{\text{جاس ءس}}_{\text{ءع}}$$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad\times\quad$ $\text{ءع} = \text{جاس ءس}$

$\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ $\quad$ $\text{ع} = -\text{جتاس}$

$\xleftarrow{\;-\int\;}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} \overset{*}{+} \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس ءس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس ءس}$$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $\text{ءع} = \text{جتاس ءس}$

$\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ $\quad$ $\text{ع} = \text{جاس}$

$$\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس}$$

$$+\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس} \qquad\qquad +\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس}$$

$$2\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس ءس} = \frac{1}{2}\left(-\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\right) + \text{جـ}$$

مثال (٣) :

$\int$ جتا (لو$_{هـ}$ س) ء س   نفرض ع = لو$_{هـ}$ س

ء س = $\frac{ءع}{\frac{1}{س}}$

$\int$ جتاع × س ءع

ء س = س ءع

$\int$ جتاع × هـ^{ع} ءع   ع = لو$_{هـ}$ س ⟸ هـ^{ع} = س   التحويل من لوغاريتم إلى أسي

تكامل بالأجزاء مرتين

$\int$ $\underset{ه}{\text{هـ}^{ع}}$ $\underbrace{\text{جتاع ءع}}_{ءد}$

نفس مثال (٤) ص (١٥٣)

ه = هـ^{ع} ءد = جتاع ءع

ءه = هـ^{ع} ءع   د = جاع

هـ^{ع} جاع − $\int$ هـ^{ع} جاع ءع

ه = هـ^{ع} ءد = جاع ءع

ءه = هـ^{ع} ءع   د = −جتاع

−هـ^{ع} جتاع + $\int$ هـ^{ع} جتاع ءع

$\int$ هـ^{ع} جتاع ءع = هـ^{ع} جاع − (−هـ^{ع} جتاع + $\int$ هـ^{ع} جتاع ءع)

$\int$ هـ^{ع} جتاع ءع = هـ^{ع} جاع + هـ^{ع} جتاع − $\int$ هـ^{ع} جتاع ءع

٢ $\int$ هـ^{ع} جتاع ءع = هـ^{ع} جاع + هـ^{ع} جتاع

$\int$ هـ^{ع} جتاع ءع = $\frac{1}{2}$ (هـ^{ع} جاع + هـ^{ع} جتاع)

$\int$ جتالو$_{هـ}$ س ءس = $\frac{1}{2}$ (هـ$^{لو_{هـ} س}$ جالو$_{هـ}$ س + هـ$^{لو_{هـ} س}$ جتالو$_{هـ}$ س)

تمارين ٤-٤ب :

س١ : ② $\int$ س لو$_{ه}$ س دس

ص = لو$_{ه}$ س   دع = س دس

×

دص = $\frac{1}{س}$ دس $\xleftarrow{\int}$ ع = $\frac{1}{٢}$ س^{٢}

$\frac{1}{٢}$ س^{٢} لو$_{ه}$ س − $\int$ $\frac{1}{س}$ × $\frac{1}{٢}$ س^{٢} دس

= $\frac{1}{٢}$ س^{٢} لو$_{ه}$ س − $\frac{1}{٤}$ س^{٢} + جـ

خاص

$\int$ لو$_{ه}$ س دس

ص = لو$_{ه}$ س   دع = دس

×

دص = $\frac{1}{س}$ دس $\xleftarrow{\int}$ ع = س

= س لو$_{ه}$ س − $\int$ $\frac{1}{\cancel{س}}$ × $\cancel{س}$ دس

س لو$_{ه}$ س − $\int$ ١ دس

س لو$_{ه}$ س − س + جـ

(ب) $\int$ س قا^{2}س دس

ق = س   دهـ = قا^{2}س دس

$\times$

دق = دس $\xleftarrow{\int}$ هـ = ظاس

س ظاس $- \int$ ظاس دس

س ظاس $- \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ دس $\times \frac{-1}{-1}$

س ظاس + لو$_{هـ}$|جتاس| + جـ

(جـ) $\int$ لو$_{هـ}$(س+٢)^٣ دس

$٣\int \underbrace{\text{لو}_{هـ}(س+٢)}_{ق} \underbrace{دس}_{دع}$

ق = لو$_{هـ}$(س+٢)   دع = دس

$\times$

دق = $\frac{1}{س+٢}$ دس $\xleftarrow{\int}$ ع = س

س لو$_{هـ}$(س+٢) $- \int^{*}$ س $\times \frac{1}{س+٢}$ دس

$\frac{م+ب}{جـ} = \frac{م}{جـ} + \frac{ب}{جـ}$

$\frac{جـ}{م+ب} \neq \frac{جـ}{م} + \frac{جـ}{ب}$

= ٣(س لو$_{هـ}$(س+٢) $-$(س+٢) + ٢ لو$_{هـ}$(س+٢)) + جـ *   ص = س + ٢

$\therefore$ س = ص $-$ ٢

$\int \frac{ص-٢}{ص}$ دص

$\int 1 - \frac{٢}{ص}$ دص

ص $-$ ٢لو$_{هـ}$ص + جـ

(س+٢) $-$ ٢لو$_{هـ}$(س+٢) + جـ

(د) $\int س \, جا ٢س$

$ص = س$ $\qquad$ $دهـ = جا٢س$

$دص = ١ \, دس$ $\qquad$ $هـ = \frac{-١}{٢} جتا٢س$

$\xrightarrow{\times}$ $\qquad$ $\xleftarrow[-\int]{}$

$س \times \frac{-١}{٢} \, جتا ٢س + \frac{١}{٢} \int جتا٢س \, دس$

$= -\frac{١}{٢} جتا٢س \times س + \frac{١}{٤} \, جا٢س + جـ$

(هـ) $\int س^{٣} \, هـ^{س^{٢}+١} \, دس$ $\qquad$ $ع = س^{٢}+١$ $\qquad$ $دس = \frac{دع}{٢س}$

$\int س^{\cancel{٣}\,٢} \, هـ^{ع} \, \frac{دع}{٢\cancel{س}}$

$\frac{١}{٢} \int س^{٢} \, هـ^{ع} \, دع$ $\qquad$ نعوض $س^{٢} = ع - ١$

$\frac{١}{٢} \int \underbrace{(ع-١)}_{ص} \, \underbrace{هـ^{ع} \, دع}_{دهـ}$ $\qquad$ $ص = (ع-١)$ $\qquad$ $دهـ = هـ^{ع} \, دع$

$دص = دع$ $\qquad$ $هـ = هـ^{ع}$

$\xrightarrow{\times}$ $\qquad$ $\xleftarrow[-\int]{}$

$\frac{١}{٢} \left[(ع-١) \, هـ^{ع} - \int هـ^{ع} \, دع \right.$

$\frac{١}{٢} \left[(ع-١) \, هـ^{ع} - \quad هـ^{ع} \right) + جـ$

$\frac{١}{٢} \left((س^{٢}) \, هـ^{س^{٢}+١} - هـ^{س^{٢}+١} + جـ \right)$

(و) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\ \text{ءس}$

$\text{ع} = \sqrt{\text{س}+1}$ $\quad$ $\text{ءس} = \dfrac{\text{ءع}}{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}}$

$= 2\text{ع}\ \text{ءع}$

$\int \dfrac{\underset{\text{م}}{2\text{ع}}\ \text{جاع}\ \text{ءع}}{\text{ءهـ}}$

$\text{م} = 2\text{ع}$ $\quad$ $\text{ءهـ} = \text{جاع}\ \text{ءع}$

$\text{ءم} = 2\,\text{ءع}$ $\quad$ $\text{هـ} = -\text{جتاع}$

$-2\text{ع}\ \text{جتاع} + 2\int \text{جتاع}\ \text{ءع}$

$-2\text{ع}\,\text{جتاع} + 2\,\text{جاع} + \text{ث}$

$-\underset{\sqrt{\text{س}+1}}{2}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}+1} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+1} + \text{ث}$

(ز) $\int \dfrac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\ \text{ءس}$

$\int \underbrace{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{م}}\ \underbrace{(\text{س}+1)^{-2}\ \text{ءس}}_{\text{ءع}}$

$\text{م} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $\text{ءع} = (\text{س}+1)^{-2}$

$\text{ءم} = 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times 2\text{س}$

$= 2\,\text{هـ}^{\text{س}}(1+\text{س})$

$\text{ع} = \dfrac{-1}{(\text{س}+1)}$ $\quad \xleftarrow{\ -1\ }$

$2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \times \dfrac{-1}{\text{س}+1} + \int \dfrac{1}{\cancel{\text{س}+1}} \times 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\cancel{(1+\text{س})}\ \text{ءس}$

$= \dfrac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(ع) ∫ (هـ^س جاس جتاس) دس

= ∫ ($\frac{1}{2}$ هـ^س جا٢س) دس

= $\frac{1}{2}$ ∫ (هـ^س جا٢س) دس   ص = هـ^س   دع = جا٢س دس

دص = هـ^س دس   ع = $-\frac{1}{2}$ جتا٢س

$\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س − ∫ $-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س دس)

$\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{2}$ ∫ هـ^س جتا٢س دس)

ص = هـ^س   دع = جتا٢س دس

دص = هـ^س دس   ع = $\frac{1}{2}$ جا٢س

$\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ هـ^س جا٢س − $\frac{1}{2}$ ∫ هـ^س جا٢س دس))

$\cancel{\frac{1}{2}}$ ∫ هـ^س جا٢س دس = $\cancel{\frac{1}{2}}$ ($-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ هـ^س جا٢س − $\frac{1}{2}$ ∫ هـ^س جا٢س دس)

∫ هـ^س جا٢س دس = $-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{4}$ هـ^س جا٢س − $\frac{1}{4}$ ∫ هـ^س جا٢س دس

$\frac{5}{4}$ ∫ هـ^س جا٢س دس = $-\frac{1}{2}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{4}$ هـ^س جا٢س + ث

∫ هـ^س جا٢س دس = $-\frac{2}{5}$ هـ^س جتا٢س + $\frac{1}{5}$ هـ^س جا٢س + ث

(ط) ∫ هـ^س (قتاس − قتاس ظتاس) دس

∫ (هـ^س قتاس − هـ^س قتاس ظتاس) دس

ص = قتاس   دع = هـ^س

دص = −قتاس ظتاس دس   ع = هـ^س

−∫

∫ هـ^س قتاس دس − ∫ هـ^س قتاس ظتاس دس

هـ^س قتاس + ∫ هـ^س ~~قتاس~~ ظتاس دس − ∫ ~~هـ^س~~ قتاس ظتاس دس

هـ^س قتاس + ∫ هـ^س قتاس ظتاس دس

هـ^س قتاس + ث

(د) $\int \frac{1}{\text{س}^3} \text{ جتا } \left(\frac{1}{\text{س}}\right) \text{ ءس}$

$\text{ع} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{\frac{-1}{\text{س}^2}} = -\text{س}^2 \text{ ءع}$

$\int \frac{1}{\text{س}^{\cancel{3}}} \text{ جتاع } - \cancel{\text{س}^2} \text{ ءع}$

$-\int \frac{1}{\text{س}} \text{ جتاع ءع}$

$-\int \text{ع جتاع ءع}$

$\text{ق} = \text{ع} \quad \text{ءه} = \text{جتاع ءع}$

$\text{ءق} = \text{ءع} \quad \text{ه} = \text{جاع}$

$-(\text{ع جاع} - \int \text{جاع ءع})$

$-(\text{ع جاع} + \text{جتاع} + \text{جـ})$

$-\left(\frac{1}{\text{س}} \text{ جا } \frac{1}{\text{س}} + \text{جتا } \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}\right) = \frac{-1}{\text{س}} \text{ جا } \frac{1}{\text{س}} - \text{جتا } \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

س٢ : $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س ءس}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \quad \text{ءه} = \text{س}^{\text{ن}}$

$\text{ءق} = \frac{1}{\text{س}} \text{ ءس} \quad \text{ه} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \int \frac{1}{\text{س}} \text{ ءس} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \int \frac{\text{س}^{\text{ن}} \text{ ءس}}{\text{ن}+1}$

$\int \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}+1} \text{ ءس}$

$\frac{1}{\text{ن}+1} \int \text{س}^{\text{ن}} \text{ ءس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)^2} + \text{جـ}$

$\frac{1}{\text{ن}+1} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

$\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{\text{ن}+1}\right) + \text{جـ}$

$$\int \frac{\text{لو}\ \text{جتا}^2 \text{س}}{2\ \text{جا}^2 \text{س}}\ \text{ء س}$$

$$\int \frac{\cancel{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}}{\cancel{2}\ \text{جا}^2 \text{س}}\ \text{ء س}$$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}}{\text{جا}^2 \text{س}}\ \text{ء س}$$

$$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} \times \text{قتا}^2 \text{س})\ \text{ء س}$$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س}$ $\quad \text{ء ع} = \text{قتا}^2 \text{س ء س}$

$\times$

$\text{ء ص} = \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}}\ \text{ء س}$ $\quad \text{ع} = -\text{ظتا س}$

$-\int$

$$-\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} \times \text{ظتا س} - \int -\text{ظا س} \times -\text{ظتا س}\ \text{ء س}$$

$$= -\text{ظتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} - \int \cancel{\text{ظا س}} \times \frac{1}{\cancel{\text{ظا س}}}\ \text{ء س}$$

$$= -\text{ظتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} - \int 1\ \text{ء س}$$

$$= -\text{ظتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتا س} - \text{س} + \text{ث}$$

التكامل بالكسور الجزئية :

$$\int \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$$

شروط طريقة الكسور الجزئية :

① كثيرات حدود (البسط والمقام)

② المقام يحلل إلى عوامل خطية

أولاً: درجة البسط أقل من درجة المقام

مثال ١: $\int \frac{٣}{\text{س}^{٢}-٤}\,\text{ءس}$

$$\frac{٣}{\text{س}^{٢}-٤} = \frac{٣}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$٣ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-٢)$$

عندما س = -٢

$$٣ = -٤\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-٣}{٤}$$

عندما س = ٢

$$٣ = ٤\,\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٤}$$

$$\int \frac{\frac{٣}{٤}}{\text{س}-٢} + \frac{\frac{-٣}{٤}}{\text{س}+٢}\,\text{ءس}$$

$$\frac{٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٢| - \frac{٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

نشاط (١) ص (١٥٥) :

$$\int \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - \text{س}} \, \text{ء س}$$

$$\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}(\text{س}^{٢} - ١)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} + ١}$$

$$\text{س} - ٢ = \text{أ}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س})(\text{س} + ١) + \text{جـ}(\text{س})(\text{س} - ١)$$

عندما س = ٠

$$-٢ = -\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$$

عندما س = ١

$$-١ = ٢\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{-١}{٢}}$$

عندما س = -١

$$-٣ = ٢\text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \frac{-٣}{٢}}$$

$$\int \frac{٢}{\text{س}} + \frac{-\frac{١}{٢}}{\text{س} - ١} + \frac{-\frac{٣}{٢}}{\text{س} + ١} \, \text{ء س}$$

$$٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| - \frac{١}{٢} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١| - \frac{٣}{٢} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

س١ - ص(١٠٩) :

(أ) $$\int \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$$

$$\frac{\text{س}+٢}{(\text{س}+١)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$$

$$\text{س}+٢ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}+١)$$

عندما س = ٣

$$٥ = ٤\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{٥}{٤}}$$

عندما س = −١

$$١ = -٤\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{-١}{٤}}$$

$$\int \frac{\frac{-١}{٤}}{\text{س}+١} + \frac{\frac{٥}{٤}}{\text{س}-٣} \, \text{ءس}$$

$$\frac{-١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+١| + \frac{٥}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-٣| + \text{ث}$$

ثانياً: إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

* نقوم بإجراء القسمة الطويلة ومن ثم تتحول المسألة إلى الحالة الأولى.

مثال (٣) ص (١٥٧):

$$\int \frac{\text{س}^{٣}}{٤-\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$$

الناتج: $-\text{س}$

المقسوم عليه: $-\text{س}^{٢}+٤$

$\text{س}^{٣}$

$-\ \text{س}^{٣} \mp ٤\text{س}$

٤س الباقي

$$= \int -\text{س}\ \text{دس} + \int^{*} \frac{٤\text{س}}{٤-\text{س}^{٢}}$$

⊛

$$\frac{٤\text{س}}{(٢-\text{س})(٢+\text{س})} = \frac{\text{أ}}{٢-\text{س}} + \frac{\text{ب}}{٢+\text{س}}$$

$$٤\text{س} = \text{أ}(٢+\text{س}) + \text{ب}(٢-\text{س})$$

$$\text{س} = ٢$$

$$٨ = ٤\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$$

$$\text{س} = -٢$$

$$-٨ = ٤\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -٢}$$

$$\frac{٢}{٢-\text{س}} + \frac{-٢}{٢+\text{س}}$$

$$-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢-\text{س}| - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢+\text{س}| + \text{جـ}$$

ملاحظة:

$$\int \frac{١}{\text{س}+١}\,\text{دس} = \text{لو}|\text{س}+١|$$

$$\int \frac{١}{\text{س}-١}\,\text{دس} = -\,\text{لو}|١-\text{س}|$$

لما يكون معامل س سالب يجب أن نضرب اللوغاريتم ب $\textcircled{-١}$

مثال (٤):

$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٩} \, \text{دس}$

$\sqrt{\text{س}} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^٢$

$\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \, \text{دس} = \text{دص}$

$\int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^٢ - ٩} \times ٢\text{ص} \, \text{دص}$

$\text{دس} = ٢\sqrt{\text{س}} \, \text{دص}$

$\int \frac{٢\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٩} \, \text{دص}$

$٢\int \frac{\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٩} \, \text{دص}$

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{ص}^٢ & \text{ص}^٢ - ٩ \\ -\text{ص}^٢ + ٩ & \\ \hline ٩ & \end{array}$$

$٢\int \left(١ + \frac{٩}{\text{ص}^٢ - ٩}\right) \text{دص}$

الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$٢\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢} \text{لو}|\text{ص} - ٣| - \frac{٣}{٢} \text{لو}|\text{ص} + ٣|\right) + \text{جـ}$

$= ٢\int \left(١ + \frac{٩^{*}}{\text{ص}^٢ - ٩}\right) \text{دص}$

$٢\text{ص} + ٣\text{لو}|\text{ص} - ٣| - ٣\text{لو}|\text{ص} + ٣| + \text{جـ}$

$\frac{٩}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٣}$

$٢\sqrt{\text{س}} + ٣\text{لو}\left|\frac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٣}\right| + \text{جـ}$

$٩ = \text{أ}(\text{ص} + ٣) + \text{ب}(\text{ص} - ٣)$

عندما ص = ٣

$٩ = ٦\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

عندما ص = -٣

$٩ = -٦\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-٩}{٦} = \frac{-٣}{٢}$

مثال (٥)

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}\, \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$$\int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{ص}^٢ + \text{ص} - ٢} \cdot \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}^٢ + \text{ص} - ٢}\, \text{د ص}$$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ١)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢}$$

$١ = \text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ١)$

عندما $\text{ص} = ١$

$١ = ٣\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٣}$

عندما $\text{ص} = -٢$

$١ = -٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٣}$

$$\int \frac{\frac{١}{٣}}{\text{ص} - ١} + \frac{\frac{-١}{٣}}{\text{ص} + ٢}\, \text{د ص}$$

$$\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ١| - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$$

$$\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ١| - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} + ٢| + \text{جـ}$$

$$\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \left|\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢}\right| + \text{جـ}$$

مثال (٦) ص (١٥٩) :

$$\int \frac{\text{جا}^{3}\text{س}}{\text{٢} + \text{جتاس}} \; \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{جا}^{2}\text{س جاس}}{\text{٢} + \text{جتاس}} \; \text{دس}$$

$$\int \frac{(\text{١} - \text{جتا}^{2}\text{س}) \; \text{جاس}}{\text{٢} + \text{جتاس}} \; \text{دس}$$

$$\text{ع} = \text{جتاس}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{جاس}}$$

$$\int \frac{(\text{١} - \text{ع}^{2}) \; \cancel{\text{جاس}}}{\text{٢} + \text{ع}} \; \frac{\text{دع}}{-\cancel{\text{جاس}}}$$

$$\int \frac{\text{ع}^{2} - \text{١}}{\text{ع} + \text{٢}} \; \text{دع}$$

$$\begin{array}{r|l} & \text{ع} - \text{٢} \\ \hline \text{ع} + \text{٢} & \text{ع}^{2} - \text{١} \\ & -\text{ع}^{2} - \text{٢ع} \\ \hline & -\text{٢ع} - \text{١} \\ & \text{٢ع} + \text{٤} \\ \hline & \text{٣} \end{array}$$

$$\int \text{ع} - \text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{ع} + \text{٢}} \; \text{دع}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ع}^{2} - \text{٢ع} + \text{٣} \; \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ع} + \text{٢}| + \text{جـ}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{٢جتاس} + \text{٣} \; \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس} + \text{٢}| + \text{جـ}$$

سـ : ص(١٥٩) :

(ب) $\int \frac{س^٢ + ٢}{س^٢ + س - ٦}$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline س^٢ + س - ٦ & س^٢ + ٢ \\ & -س^٢ \mp س \pm ٦ \\ \hline & -س + ٨ \end{array}$$

$= \int ١ + \frac{٨ - س}{س^٢ + س - ٦}$

$\frac{٨ - س}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{أ}{س+٣} + \frac{ب}{س-٢}$

$= \int ١ \, دس + \int \frac{\frac{١١}{٥}}{س+٣} + \frac{\frac{٦}{٥}}{س-٢} \, دس$

$٨ - س = أ(س-٢) + ب(س+٣)$

$س - \frac{١١}{٥} لو_هـ|س+٣| + \frac{٦}{٥} لو_هـ|س-٢| + جـ$

عندما $س = -٣$

$١١ = -٥أ \leftarrow أ = \frac{-١١}{٥}$

عندما $س = ٢$

$٦ = ٥ب \leftarrow ب = \frac{٦}{٥}$

نفس مثال(٤) (جـ) $\int \frac{\sqrt{س}}{س - \sqrt{س} - ٢} \, دس$

$ع = \sqrt{س} \Leftarrow ع^٢ = س$

$دس = \frac{دع}{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}$

$دس = ٢\sqrt{س} \, دع$

$= ٢ع \, دع$

$\int \frac{ع}{ع^٢ - ع - ٢} \, ٢ع \, دع$

$\int \frac{٢ع^٢}{ع^٢ - ع - ٢} \, دع$

$\int ٢ + \frac{\overset{*}{٢ع} + ٤}{ع^٢ - ع - ٢} \, دع$

$$\begin{array}{r|l} & ٢ \\ \hline ع^٢ - ع - ٢ & ٢ع^٢ \\ & ٢ع^٢ - ٢ع - ٤ \\ \hline & ٢ع + ٤ \end{array}$$

* $\frac{\text{٢ع} + ٤}{(\text{ع} - ٢)(\text{ع} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ع} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ع} + ١}$

$\text{٢ع} + ٤ = \text{أ}(\text{ع} + ١) + \text{ب}(\text{ع} - ٢)$

عند ع = ٢

$٨ = \text{٣أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{٨}{٣}$

عند ع = -١

$٢ = -\text{٣ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-٢}{٣}$

$\int ٢\,\text{دع} + \int \frac{\frac{٨}{٣}}{\text{ع} - ٢} + \frac{\frac{-٢}{٣}}{\text{ع} + ١}\,\text{دع}$

$\text{٢ع} + \frac{٨}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع} - ٢| - \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع} + ١| + \text{جـ}$

$٢\sqrt{\text{س}} + \frac{٨}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} - ٢| - \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} + ١| + \text{جـ}$

(ب) $\int \frac{\text{س} + ٢}{(\text{س}^٢ - \text{س})(\text{س} + ١)}\,\text{دس}$

$\int \frac{(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}\,\text{دس}$

$\frac{\text{س} + ٢}{\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} + ١}$

$\text{س} + ٢ = \text{أ}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س})(\text{س} + ١) + \text{جـ}(\text{س})(\text{س} - ١)$

عند س = ٠

$٢ = -\text{أ} \leftarrow \text{أ} = -٢$

عند س = ١

$٣ = \text{٢ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

عند س = -١

$١ = \text{٢جـ} \leftarrow \text{جـ} = \frac{١}{٢}$

$$\int \frac{-٢}{\text{س}} + \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س}-١} + \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س}+١} \; \text{دس}$$

$$-٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$$

⑤ $$\int \frac{١}{\text{س} - \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}} \; \text{دس}$$

$$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{\frac{١}{\text{س}}}$$

$$\int \frac{١}{\cancel{\text{س}}(١-\text{ع}^{٢})} \; \cancel{\text{س}} \, \text{دع} \qquad = \text{س} \, \text{دع}$$

$$\int \frac{١}{١-\text{ع}^{٢}} \; \text{دع}$$

$$\frac{١}{(١-\text{ع})(١+\text{ع})} = \frac{\text{أ}}{١-\text{ع}} + \frac{\text{ب}}{١+\text{ع}}$$

$$١ = \text{أ}(١+\text{ع}) + \text{ب}(١-\text{ع})$$

عندما $\text{ع} = -١$

$$١ = ٢\text{ب} \rightarrow \text{ب} = \frac{١}{٢}$$

عندما $\text{ع} = ١$

$$١ = ٢\text{أ} \rightarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\int \frac{\frac{١}{٢}}{١-\text{ع}} + \frac{\frac{١}{٢}}{١+\text{ع}} \; \text{دع}$$

$$\frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|١-\text{ع}| + \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{ع}| + \text{ث}$$

$$\frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|١-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ث}$$

س‌ـ ⓐ $\int \frac{-\text{س}+٧}{\text{س}^2+\text{س}-٢}\,د\text{س}$

$\int \frac{-\text{س}+٧}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)}\,د\text{س}$

$\frac{-\text{س}+٧}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)} = \frac{أ}{(\text{س}+٢)} + \frac{ب}{(\text{س}-١)}$

$-\text{س}+٧ = أ(\text{س}-١) + ب(\text{س}+٢)$

عندما $\text{س} = ١$

$٦ = ٣ب \leftarrow ب = ٢$

عندما $\text{س} = -٢$

$٩ = -٣أ \leftarrow أ = -٣$

$\int \frac{-٣}{\text{س}+٢} + \frac{٢}{\text{س}-١}\,د\text{س}$

$-٣\,لو_{هـ}|\text{س}+٢| + ٢\,لو_{هـ}|\text{س}-١| + جـ$

ⓑ $\int \frac{\text{جاس}}{١٦-\text{جتا}^2\text{س}}\,د\text{س}$

$ع = \text{جتاس}$

$د\text{س} = \frac{دع}{-\text{جاس}}$

$\int \frac{\cancel{\text{جاس}}}{١٦-ع^2}\cdot\frac{-دع}{\cancel{\text{جاس}}}$

$\int \frac{١}{ع^2-١٦}\,دع$

$\frac{١}{(ع-٤)(ع+٤)} = \frac{أ}{ع-٤} + \frac{ب}{ع+٤}$

$١ = أ(ع+٤) + ب(ع-٤)$

$\int \frac{\frac{١}{٨}}{ع-٤} + \frac{\frac{-١}{٨}}{ع+٤}\,دع$

عندما $ع = -٤$

$١ = -٨ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٨}$

$\frac{١}{٨}\,لو_{هـ}|ع-٤| + \frac{-١}{٨}\,لو_{هـ}|ع+٤| + جـ$

عندما $ع = ٤$

$١ = ٨أ \leftarrow أ = \frac{١}{٨}$

$\frac{١}{٨}\,لو_{هـ}\left|\frac{\text{جتاس}-٤}{\text{جتاس}+٤}\right| + جـ$

⑦ $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{٢-\text{قتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{٢-(١+\text{ظتا}^{٢}\text{س})}\ \text{دس}$ $\leftarrow ٢-١-\text{ظتا}^{٢}\text{س}$

$\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{١-\text{ظتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{ظتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

$\int \frac{\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}{١-\text{ع}^{٢}} \quad \frac{\text{دع}}{-\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}$

$\int \frac{١}{\text{ع}^{٢}-١}\ \text{دع}$

$\frac{١}{(\text{ع}-١)(\text{ع}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ع}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{ع}+١}$

$١ = \text{أ}(\text{ع}+١) + \text{ب}(\text{ع}-١)$

عندما $\text{ع} = ١$

$١ = ٢\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$

عندما $\text{ع} = -١$

$١ = -٢\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$

$\int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ع}-١} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ع}+١}\ \text{دع}$

$\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}-١| - \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}+١| + \text{جـ}$

$\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}-١| - \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}+١| + \text{جـ}$

(د)

$$\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦} + \text{س}^{٣}} \, \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}(\text{س}^{٤} + \text{س})} \, \text{د س}$$

$$\int \frac{١}{\text{س}(\text{س}^{٣} + ١)} \, \text{د س}$$

$$\text{ع} = \text{س}^{٣} + ١$$

$$\text{دع} = ٣\text{س}^{٢} \, \text{د س} \qquad \text{د س} = \frac{\text{دع}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$\int \frac{١}{\text{س ع}} \cdot \frac{\text{دع}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$\frac{١}{٣}\int \frac{١}{\text{س}^{٣}\text{ع}} \, \text{دع}$$

$$\frac{١}{٣}\int \frac{١}{(\text{ع}-١)\text{ع}} \, \text{دع}$$

$$\frac{١}{(\text{ع}-١)\text{ع}} = \frac{\text{أ}}{\text{ع}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{ع}}$$

$$١ = \text{أ}(\text{ع}) + \text{ب}(\text{ع}-١)$$

عندما ع = ٠

$$١ = -\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -١$$

عندما ع = ١

$$\text{أ} = ١$$

$$\frac{١}{٣}\int \left(\frac{١}{\text{ع}-١} - \frac{١}{\text{ع}}\right) \text{دع}$$

$$\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}-١| - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{جـ}$$

$$\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣}| - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣}+١| + \text{جـ}$$

تمارين عامة ص (١٦٠)

سؤال ①: $\int (\text{م}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}))\ \text{ءس}$

$\int \text{جـ}\ \text{ءس}$

$\text{جـ س} + \text{جـ}$

(جـ) اقتران خطي

② $\text{ق}(\text{س}) = \int (٣\text{س}^{٢} - ٢)\ \text{ءس}$

$= \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

$= \text{س}^{٣} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٢) = ٨ - ٤ + \text{جـ}$

$٩ = ٤ + \text{جـ}$

$\boxed{\text{جـ} = ٥}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٥$

$\text{ق}(-٢) = -٨ + ٤ + ٥$

$= ١$ (د)

③ $\int \underbrace{٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}} = \text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{ع}\ \text{ءهـ}$

$\frac{\text{ق}}{\text{ع}}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\quad$ $\text{ءهـ} = ٢\text{س}\ \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{\cancel{\text{س}}}\ \text{س}^{\cancel{٢}}\ \text{ءس}$

$\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}\ \text{ءس}$

$\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underbrace{\text{ع}\ \text{ءهـ}}_{\text{س ءس}}$ (جـ)

④ $\int \text{قتا}^{٤}\text{س ظتاس دس}$ $\qquad$ ع = قتاس

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{قتاس ظتاس}}$

$\int \text{ع}^{\cancel{٤}\,٣}\ \cancel{\text{ظتا}}\text{س}\ \frac{\text{دع}}{-\cancel{\text{قتا}}\text{س}\ \cancel{\text{ظتا}}\text{س}}$

$-\int \text{ع}^{٣}\ \text{دع}$

$-\frac{\text{ع}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = -\frac{١}{٤}\ \text{قتا}^{٤}\text{س} + \text{جـ}$ ⑤

س٢: $\text{م}'(\text{س}) = \frac{-\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{١-\text{س}^{٢}}} = \frac{-\text{س}}{\sqrt{١-\text{س}^{٢}}}$

$\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ $\quad$ ∴ م(س) اقتران أصلي لـ ق(س)

س٣: $\text{ق}''(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{جاس}$ $\quad$ $\text{ق}'(١) = ٣$ $\quad$ $\text{ق}(١) = ٢$ $\quad$ ق(س)؟

$\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \text{س}^{٢} + ٣\text{جاس}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{جتاس} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(١) = ٠ - ٣ \times ١ + \text{جـ}$

$٣ = -٣ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٦$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{جتاس} + ٦$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{جتاس} + ٦\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٣}\ \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + \text{جـ}_{١}$

$= \frac{١}{١٢}\ \text{س}^{٤} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ق}(١) = ٠ - ٣ \times ٠ + ٠ + \text{جـ}_{١}$

$\boxed{٢ = \text{جـ}_{١}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{١٢}\ \text{س}^{٤} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + ٢$

س٤: ع = ٤ن + لو$_{هـ}$|ن+١|

ف(١) = ٨   ف(٣) ؟؟

ف = ∫ ع(ن) ءن

= ∫ ٤ن + لو$_{هـ}$ ن+١ ءن

= ∫٤ن ءن + ∫ لو$_{هـ}$ ن+١ ءن

* ف(٣) =

٢×(٣)^{٢} + ٣لو$_{هـ}$ ٣+١ − ٣ + لو$_{هـ}$|٣+١|

+٧ − ٢لو$_{هـ}$ ٢

= ١٨ + ٣لو$_{هـ}$ ٤ − ٣ + لو$_{هـ}$ ٤ +٧

− لو$_{هـ}$ ٢

= ٢٢ + ٣لو$_{هـ}$ ٤ − لو$_{هـ}$ ٤

= ٢٢ + ٢لو$_{هـ}$ ٤

ص = لو$_{هـ}$ ن+١   ءه = ءن

ءص = $\frac{١}{ن+١}$ ءن   ه = ن

← ∫ =

$\frac{٤ن^{٢}}{٢}$ + ن لو$_{هـ}$ ن+١ − ∫ $\frac{١}{ن+١}$ × ن ءن

٢ن^{٢} + ن لو$_{هـ}$ ن+١ − ∫ $\frac{ن+١-١}{ن+١}$ ءن

٢ن^{٢} + ن لو$_{هـ}$ ن+١ − ∫ $\boxed{\frac{ن+١}{ن+١}}^{١}$ − $\frac{١}{ن+١}$ ءن

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لو$_{هـ}$ ن+١ − ن + لو$_{هـ}$|ن+١| + جـ

ف(١) = ٢(١)^{٢} + (١) لو$_{هـ}$ ١+١ − ١ + لو$_{هـ}$|١+١| + جـ

٨ = ٢ + لو$_{هـ}$ ٢ − ١ + لو$_{هـ}$|٢| + جـ

٨ = ١ + ٢لو$_{هـ}$ ٢ + جـ

٨ − ١ − ٢لو$_{هـ}$ ٢ = جـ

٧ − ٢لو$_{هـ}$ ٢ = جـ

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لو$_{هـ}$ ن+١ − ن + لو$_{هـ}$|ن+١| + ٧ − ٢لو$_{هـ}$ ٢

* ف(ن) =

س٥ : ① $\int س\sqrt{س^2-٣}\ دس$

$ع = \sqrt{س^2-٣}$

$\int \cancel{س}\ ع\ \dfrac{ع\ دع}{\cancel{س}}$ $\qquad$ $دس = \dfrac{دع}{\dfrac{٢س}{٢\sqrt{س^2-٣}}}$

$\int ع^2\ دع$

$= \dfrac{ع\ دع}{س}$

$\dfrac{ع^2}{٢} + جـ$

$\dfrac{١}{٢}\left(\sqrt{س^2-٣}\right)^3 + جـ$

② $\int \dfrac{١}{س^{١٠}+س}\ دس$

$\int \dfrac{١}{س(س^9+١)}\ دس$ $\qquad$ $ع = س^9+١$

$دس = \dfrac{دع}{٩س^8}$

$\int \dfrac{١}{سع}\ \dfrac{دع}{٩س^8}$

$\dfrac{١}{٩}\int \dfrac{١}{س^9ع}\ دع$ $\qquad$ $س^9 = ع-١$

$\dfrac{١}{٩}\int \dfrac{١}{(ع-١)ع}\ دع$ $\qquad$ $\dfrac{١}{(ع-١)ع} = \dfrac{م}{ع-١} + \dfrac{ن}{ع}$

$١ = م(ع) + ن(ع-١)$

$\dfrac{١}{٩}\int \dfrac{١}{ع-١} + \dfrac{-١}{ع}\ دع$ $\qquad$ $ع = ٠ ، \quad ١ = -ن \Leftarrow ن = -١$

$ع = ١ \quad ١ = م \Leftarrow م = ١$

$\dfrac{١}{٩}\left(لو_{هـ}|ع-١| - لو_{هـ}|ع|\right) + جـ$

$\dfrac{١}{٩}\left(لو_{هـ}|س^9| - لو_{هـ}|س^9+١|\right) + جـ$

③ ∫ قا^{2} √س ء س

ع = √س

ء س = ءع / (١ / ٢√س) = ٢ع ~~ع~~ ءع

∫ $\underbrace{\text{قا}^{2}\text{ع}}_{\text{ءهـ}}$ $\underbrace{\text{٢ع}}_{\text{ص}}$ ءع

ص = ٢ع   ءهـ = قا^{2}ع ءع

ء ص = ٢ءع   هـ = ظاع

×   −∫

٢ع ظاع − ∫ ٢ ظاع ءع

ع ظاع +   ٢ لو$_{\text{هـ}}$ |جتاع| + ث

٢√س ظا√س + ٢ لو$_{\text{هـ}}$ |جتا√س| + ث

④ ∫ قا(٣س+١) ظا(٣س+١) ءس

$\frac{1}{3}$ قا(٣س+١) + ث

⑤ ∫ (س^{2}+١) جتا س ء س

ص = س^{2}+١   ءهـ = جتاس ءس

ءص = ٢س ءس   هـ = جاس

(س^{2}+١) جاس + ∫ ٢س جاس ء س

ص = ٢س   ءهـ = جاس ءس

ءص = ٢ءس   هـ = −جتاس

(س^{2}+١) جاس + ٢س جتاس − ∫ ٢جتاس ء س

(س^{2}+١) جاس + ٢س جتاس − ٢جاس + ث

② $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\ \text{د س}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)$ $\quad \text{د هـ} = \text{د س}$

$\text{د ع} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}$ ، $\text{س} \xleftarrow{-\int} \text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - \int \frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-١}\ \text{د س}$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢\text{س}^{٢} & \text{س}^{٢}-١ \\ ٢\text{س}^{٢}-٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - \int ٢\ \text{د س} - \int \frac{٢}{\text{س}^{٢}-١}\ \text{د س}$

$\frac{٢}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} = \frac{\text{م}}{\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$

$٢ = \text{م}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-١)$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - ٢\text{س} - \int \left(\frac{١}{\text{س}-١} + \frac{-١}{\text{س}+١} \right) \text{د س}$ $\quad \text{س} = -١$

$٢ = -٢\text{ب} \Rightarrow \text{ب} = -١$

$\text{س} = ١$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - ٢\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$ $\quad ٢ = ٢\text{م} \Rightarrow \text{م} = ١$

⑦ $\int \frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^3+\text{س}}\,\text{ء س}$

$\int \frac{\cancel{\text{س}^2+1}}{\text{س}(\cancel{\text{س}^2+1})}\,\text{ء س}$

$\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{ء س}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{1-\text{ظا}^2\text{س}}\,\text{ء س}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{ظاس}$

$\text{ء س} = \frac{\text{ء ع}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{1-\text{ع}^2}\,\frac{\text{ء ع}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{1-\text{ع}^2}\,\text{ء ع}$ $\qquad$ $1+\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$1+\text{ع}^2 = \text{قا}^2\text{س}$

$\int \frac{1+\text{ع}^2}{1-\text{ع}^2}\,\text{ء ع}$ $\qquad$ $\text{ع}^2+1 \;\big)\; -\text{ع}^2+1 \quad -1$

$\int -1\,\text{ء ع} + \int \frac{2}{1-\text{ع}^2}\,\text{ء ع}$ $\qquad$ $\frac{\text{ع}^2-1}{2}$

$-\text{ع} + \int \left(\frac{1}{1-\text{ع}} + \frac{1}{1+\text{ع}}\right)\text{ء ع}$ $\qquad$ $\frac{2}{(1-\text{ع})(1+\text{ع})} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ع}} + \frac{\text{ب}}{1+\text{ع}}$

$-\text{ع} - \text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{ع}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{ع}| + \text{ث}$ $\qquad$ $2 = \text{أ}(1+\text{ع}) + \text{ب}(1-\text{ع})$

$\text{ع} = -1 \quad 2 = 2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = 1$

$-\text{ظاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{ظاس}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{ظاس}| + \text{ث}$ $\qquad$ $\text{ع} = 1 \quad 2 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = 1$

⑨ $\int (\text{جتا}^{4}\text{س} - \text{جا}^{4}\text{س})\ \text{ءس}$

$\int (\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س})(\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س})\ \text{ءس}$

$\int \text{جتا}٢\text{س} \times ١\ \text{ءس}$

$\frac{1}{2}\ \text{جا}٢\text{س} + \text{ج}$

⑩ $\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{8}\ \text{قتاس}\ \text{ءس}$

$\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{7} (\text{قتاس} + \text{ظتاس})\ \text{قتاس}\ \text{ءس}$

$\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{7} (\text{قتا}^{2}\text{س} + \text{قتاس}\ \text{ظتاس})\ \text{ءس}$

$\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{7} \left(\frac{1}{\text{جا}^{2}\text{س}} + \frac{1}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right) \text{ءس}$

$\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{7} \left(\int \frac{1}{\text{جا}^{2}\text{س}} + \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س}}\right)$

⑪ $\int$ (س^{٨} − ٦س)^{٦} ءس

$\int$ (س (س^{٧} − ٦))^{٦} ءس

$\int$ س^{٦} (س^{٧} − ٦)^{٦} ءس   ع = س^{٧}

ءس = $\frac{\text{ءع}}{\text{٧س}^{٦}}$

$\int$ $\cancel{\text{س}^{٦}}$ (ع − ٦)^{٦} $\frac{\text{ءع}}{\text{٧}\cancel{\text{س}^{٦}}}$

$\frac{١}{٧}$ $\int$ (ع − ٦)^{٦} ءع

$\frac{١}{٧}$ × $\frac{١}{٧}$ (ع − ٦)^{٧} + جـ

$\frac{١}{٤٩}$ (س^{٧} − ٦)^{٧} + جـ

س٦ : س د′(س) + د(س) = جتا س   د(س) ؟؟

د(π) = ∴

(س د(س))′ = جتا س

$\int$ (س د(س))′ ءس = $\int$ جتا س ءس

س د(س) = جا س + جـ   د(π) = ∴

π د(π) = جا π + جـ

٠ = ٠ + جـ ⟸ جـ = ∴

د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

س ⑩ $\int (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{٨}\ \text{قتاس}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{قتاس} + \text{ظتاس}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{دع}}{-\text{قتاس}\,(\text{ظتاس} + \text{قتاس})}$$

$$= \frac{\text{دع}}{-\text{قتاس} \times \text{ع}}$$

$$\int \text{ع}^{\overset{٧}{\cancel{٨}}}\ \cancel{\text{قتا}}\text{س}\ \frac{\text{دع}}{-\cancel{\text{قتا}}\text{س} \times \cancel{\text{ع}}}$$

$$\int -\text{ع}^{٧}\ \text{دع}$$

$$\frac{-\text{ع}^{٨}}{٨} + \text{ج}$$

$$-\frac{١}{٨}\,(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{٨} + \text{ج}$$