التجزئة ومجموع ريمان

أولاً: التجزئة (σ)

تعريف: تسمى $\sigma_{ن}$ تجزئة للفترة [أ، ب] إذا كانت

$\sigma_{ن} = \{أ = س_{٠}، س_{١}، س_{٢}، س_{٣}، \dots، س_{ن} = ب\}$

ملاحظات على التعريف:

1. من شروط التجزئة:
   - أ- تبدأ بـ أ وتنتهي بـ ب
   - ب- يجب أن تكون الأرقام بداخل التجزئة مرتبة تصاعدياً $س_{٠} < س_{١} < س_{٢} \dots$
2. ن = عدد الفترات الجزئية
3. ن + ١ = عدد عناصر التجزئة.
4. طول الفترة الكلية = $\sum (س_{ر} - س_{ر-١})$

$ب - أ = \sum (س_{ر} - س_{ر-١})$

= مجموع أطوال الفترات الجزئية

مثال: إذا كانت [١، ٤] وكانت $\sigma_{٣}$ تجزئة للفترة [١، ٤]

$\sigma_{٣} = \{١، ٢، ٣، ٤\}$

[١، ٢] ← ١

[٢، ٣] ← ١

[٣، ٤] ← ١

٣

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٣ + ١ = ٤

سؤال: إذا كانت $\sigma_{٥} = \{-٣، ٠، ١، ٢، ٤، ٨\}$ تجزئة للفترة [−٣، ٨]

١- اكتبي الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٥}$

٢- جدي طول كل منها

٣- طول الفترة الكلية

[-٢، ٠] ← ٢

[٠، ١] ← ١

[١، ٢] ← ١

[٢، ٤] ← ٢

[٤، ٨] ← ٤

١٠

نشاط (٢) ص ١٦٦ :

الفترات الجزئية = [٢، ٤]، [٤، ٦]، [٦، ٨]، [٨، ١٠]

↓ ٢ ↓ ٢ ↓ ٢ ↓ ٢

أطوال الفترات الجزئية متساوية تسمى تجزئة منتظمة.

أما إذا كانت أطوال الفترات الجزئية غ. متساوية تسمى تجزئة غ. منتظمة

عدد عناصر التجزئة = ٥ = ن + ١

عدد الفترات الجزئية = ن = ٤

التجزئة المنتظمة :

[أ، ب] ← فترة كلية ، ءن تجزئة منتظمة

ءن = {أ = س٠، س١، س٢، س٣، ....، سن = ب}

القوانين :

١- طول الفترة الجزئية = طول الفترة الكلية / عدد الفترات الجزئية

ل = (ب - أ) / ن

٢- العنصر الأول = أ = س٠

العنصر الثاني = س١ = أ + ل

العنصر الثالث = س٢ = أ + ٢ل

سر = أ + ر ل   قانون العناصر في التجزئة المنتظمة.

٣- عدد الفترات الجزئية = ن

٤- عدد عناصر التجزئة = ن + ١

٥- الفترة الجزئية الأولى = [س٠ ، س١]

الفترة الجزئية الثانية = [س١ ، س٢]

الفترة الجزئية الرائية = [س ر-١ ، س ر]

مثال ١: إذا كانت ك٥ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ١٥]

جدي ١- العنصر الثالث

٢- الفترة الجزئية السادسة

٣- عدد عناصر التجزئة

ل = (ب - أ) / ن = (١٥ - ٠) / ٥ = ٣

العنصر الثالث = س٣ = أ + ل ر

= ٠ + ٣ × ٢ = ٦

الفترة الجزئية الرابعة = [س٣ ، س٤]

= [٩ ، ١٢]

س٣ = أ + ل × ٣

= ٠ + ٣ × ٣ = ٩

س٤ = ٩ + ٣ = ١٢

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٥ + ١

= ٦

مثال (٥) ص (١٦٦):

ل = (ب - أ) / ن

١/٣ = (ب - ٥) / ٦

٦ = ٣ب - ١٥

٢١ = ٣ب ⟸ ب = ٧

مثال(٦) : ص ١٦٧ :

$ح_{١٢}$ [-١ ، ١٩]

$ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٩ - -١}{١٢} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$

$س_٢ = أ + ٢ل$

$= -١ + \frac{٥}{٣} × ٢$

$= -١ + \frac{١٠}{٣} = \frac{٧}{٣}$

$س_٩ = -١ + \frac{٥}{٣} × ٩$

$= -١ + ١٥ = ١٤$

العنصر الثامن = $س_٧ = أ + ٧ل$

$= -١ + \frac{٥}{٣} × ٧$

$= -١ + \frac{٣٥}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$

الفترة الجزئية الخامسة = [$س_٤$ ، $س_٥$]

$س_٥ = -١ + \frac{٥}{٣} × ٥$

$= -١ + \frac{٢٥}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$

= [$\frac{١٧}{٣}$ ، $\frac{٢٢}{٣}$]

$س_٤ = \frac{٢٢}{٣} - \frac{٥}{٣} = \frac{١٧}{٣}$

سؤال:

① إذا جزئت الفترة [١ ، ٥] إلى فترات جزئية متساوية طول كل منها ٣ و جد عدد عناصر هذه التجزئة.

② إذا كان $ح_٥$ تجزئة للفترة [-٣ ، ٧] فإن $\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - س_{ر-١})$ = (طول الفترة الجزئية)

أ) ١٠   ب) ٤   جـ) ٢.٥   د) ٢١

مجموع أطوال الفترات الجزئية

٧ - -٣ = ١٠ الفترة الكلية

[١] $ل = \frac{ب - أ}{ن}$

$٠٫٢ = \frac{٥ - ١}{ن}$

$\frac{٠٫٢ ن}{٠٫٢} = \frac{٤}{٠٫٢}$

ن = ٢٠ ⇐ عدد الفترات الجزئية

عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٢١

تمارين ص١٧٠ :

م٥ : ك [−١، ٢]

ل = (ب − أ) / ن = (٢ − (−١)) / ٦ = ٣ / ٦ = ١ / ٢

ك = {−١ ، −٠،٥ ، ٠ ، ٠،٥ ، ١ ، ١،٥ ، ٢}

العنصر الثالث (س٣) = ٠   أ + ٢ل = −١ + ٢ × ١/٢

= −١ + ١ = ٠

الفترة الجزئية الرابعة [س٣ ، س٤]

= [١/٢ ، ١]   س٣ = −١ + ٣ × ١/٢

= ١/٢

م٦ :

س٤ = ٤

ك١٠ جـ؟! . [جـ ، ٧]

س٤ = أ + ٤ل

(٤ = جـ + ٤ ((٧ − جـ) / ١٠)) × ١٠

٤٠ = ١٠جـ + ٢٨ − ٤جـ

٤٠ = ٦جـ + ٢٨

−٢٨   −٢٨

١٢ = ٦جـ ⟸ **جـ = ٢**

مجموع ريمان

نظرية:

اذا كان ق(س) معرف على [أ، ب] وكانت $ط_ن$ تجزئة للفترة [أ، ب]
فإن مجموع ريمان للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة $ط_ن$

$$م(ط_ن ، ق) = \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - س_{ر-1}) \times ق(س^*_ر)$$

حيث الفترة الجزئية $[س_{ر-1} ، س_ر]$

$س^*_ر$ ← $س_{ر-1}$ بداية الفترة
أو
← $س_ر$ نهاية الفترة

لكن إذا كانت $ط_ن$ منتظمة

$$م(ط_ن ، ق) = ل \sum_{ر=1}^{ن} ق(س^*_ر)$$

ل ثابتة $= \frac{ب-أ}{ن}$

جدول:

الفترات الجزئية	$س^*_ر$	$س_ر - س_{ر-1}$	$ق(س^*_ر)$	$ق(س^*_ر)(س_ر - س_{ر-1})$

م(ط_ن ، ق)

مثال ٥ ص ١٦٨ :

$د(س) = س - ٢$ ، $ح_س = \{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

$ح_س$ $م(ح_س ، د) \leftarrow س_ر^* = س_{ر-١}$

الفترات الجزئية	$س_ر^*$	ل	$د(س_ر^*)$	$ل \cdot د(س_ر^*)$
[٣ ، ٤]	٣	١	١	١
[٤ ، ٥]	٤	١	٢	٢
[٥ ، ٦]	٥	١	٣	٣
				٦

$م(ح_س ، د) = ٦$

مثال (٨) :

$د(س) = س^٢ - ٢س$ ، $ح_٤$ ، $[-٣ ، ٥]$

$م(ح_٤ ، د)$ $س_ر^* = س_{ر-١}$

$$ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٥ - -٣}{٤} = ٢$$

$ح_٤ = \{-٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥\}$

الفترات الجزئية	$س^*_ر$ = $س_{ر-1}$	ل	ق($س^*_ر$)	ل ق($س^*_ر$)
[-٣، -١]	-٣	٢	٩+٦ = ١٥	٣٠
[-١، ١]	-١	٢	١+٢ = ٣	٦
[١، ٣]	١	٢	١-٢ = -١	-٢
[٣، ٥]	٣	٢	٩-٦ = ٣	٦

٤٠

$س^*_ر = س_{ر-١}$: م($ط_ن$، ق) = ل ∑ ق($س^*_ر$) ← $ط_ن$ تجزئة منتظمة

= ٢ ∑ ق(-٣) + ق(-١) + ق(١) + ق(٣)

= ٢ (١٥ + ٣ + -١ + ٣)

= ٢ (٢٠)

= **٤٠**

$س^*_ر = س_ر$: م($ط_٤$، ق) = ل × (ق(-١) + ق(١) + ق(٣) + ق(٥))

= ٢ (٣ + -١ + ٣ + ١٥)

= ٢ × ٢٠

= **٤٠** مش شرط يطلع نفس الجواب

ملاحظة :

$س^*_ر = س_{ر-١}$

م($ط_ن$، ق) = ل (م + $س_١$ + $س_٢$ + ... ، $س_{ن-١}$)

$س^*_ر = س_ر$

م($ط_ن$، ق) = ل ($س_١$ ، $س_٢$ + ... ، $س_ن$)

مثال (٩):

د(س) = لو س ، ح = {١، هـ، هـ٢، هـ٣} ، [١، هـ٣]

م(ح، د) ← سَر = سر

الفترات الجزئية	سر = سر	ل	د(سر)	ل د(سر)
[١، هـ]	هـ	هـ − ١	١	هـ − ١
[هـ، هـ٢]	هـ٢	هـ٢ − هـ	٢	٢(هـ٢ − هـ)
[هـ٢، هـ٣]	هـ٣	هـ٣ − هـ٢	٣	٣(هـ٣ − هـ٢)

د(هـ) = لو هـ = ١

د(هـ٢) = لو هـ٢ = ٢

د(هـ٣) = لو هـ٣ = ٣

م(ح، د) = هـ − ١ + ٢هـ٢ − ٢هـ + ٣هـ٣ − ٣هـ٢

= ٣هـ٣ − هـ٢ − هـ − ١

مثال (١٠):

د(س) = ٢س ، ح٤ تجزئة منتظمة [−١، ١]

م(ح٤، د) = ؟

سَر = سر−١

ل = (١ − −١) / ٤ = ١/٢

ح٤ = {−١، −١/٢، ٠، ١/٢، ١}

الفترات الجزئية	س*ر	د(س*ر)	ل	ل د(س*ر)
[-١ ، -½]	-١	-أ	½	-أ/٢
[-½ ، ٠]	-½	-½ أ	½	-¼ × أ
[٠ ، ½]	٠	٠	½	٠
[½ ، ١]	½	½ أ	½	¼ أ

م(ى٤ ، د) = -أ/٢ + -أ/٤ + ٠ + أ/٤

٢ = -أ/٢

أ = -٤

س٣ : د(س) = ٦ - س² ، [١ ، ٥]

ى٤ ، م(ى٤ ، د) ، س*ر = سر

ل = (٥ - ١)/٤ = ١

ى٤ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

م = ل Σ د(سر)

= ١(د(٢) + د(٣) + د(٤) + د(٥))

= (٢ - ٣ - ١٠ - ١٩)

م = -٣٠

س٤: $د(س) = ٢ + هـ^{س}$ $[-١، ٢]$

$ط_م$ $م(ط_م، د)$ $س_ر^* = س_{ر-١}$

$ل = \frac{٢ - -١}{٣} = ١$

$ط_م = \{-١، ٠، ١، ٢\}$

$م = ل \sum د(س_ر)$

$= ١[د(-١) + د(٠) + د(١)]$

$= ١[٢ + \frac{١}{هـ} + ٣ + ٢ + هـ]$

$= ٧ + هـ + \frac{١}{هـ}$

س٥: $د(س) = \frac{م س}{س+٢}$ $[-١، ٨]$

$ط_ه = \{-١، ٠، ٢، ٣، ٦، ٨\}$ م ؟؟

$م(ط_ه، د) = ٦و٥$ $س_ر^* = س_{ر-١}$

الفترات الجزئية	$س_ر^* = س_{ر-١}$	ل	$د(س_ر^*)$	$ل د(س_ر^*)$
[-١، ٠]	-١	١	-م	-م
[٠، ٢]	٠	٢	٠	٠
[٢، ٣]	٢	١	$\frac{م}{٢}$	$\frac{م}{٢}$
[٣، ٦]	٣	٣	$\frac{٣م}{٥}$	$\frac{٩م}{٥}$
[٦، ٨]	٦	٢	$\frac{٣م}{٤}$	$\frac{٣م}{٢}$

د(-١) = -أ/١ = -أ

د(٠) = ٠

د(٢) = ٢أ/٤ = أ/٢

د(٣) = ٣أ/٥

د(٦) = ٦أ/٨ = ٣أ/٤

م(ط٥، د) = -أ + ٠ + أ/٢ + ٩أ/٥ + ٣أ/٢

٥,٦ = أ + ٩أ/٥

٥,٦ = ١٤أ/٥

٥,٦ × ٥ = ١٤أ

أ = ٢

س٦ : ط٨ [أ، ب] ، س٢ = ٢ ، ط٤ [أ، ب] ، س٤ = ٤

سر = أ + ر ل

٢ = أ + (ب − أ)/~~٨~~ ٤ × ١

(٢ = أ + (ب − أ)/٤) × ٤

٨ = ٤أ + ب − أ

٨ = ٣أ + ب ... (١)

س٤ = م + ل٤ ،

٤ = م + $\frac{ن - م}{١٢} \times ٤$) ٣

١٢ = ٣م + ن − م

١٢ = ٢م + ن ...... ①

٨ = ٣م + ن

---

٤ = −م ⟸ م = −٤

٨ = ٣م + ن

٨ = −١٢ + ن

ن = ٢٠

س٧ : ق(س) = جا س   س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ع٤ = {٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$}

م(ع٤ ، ق) $س_ر^* = س_{ر-١}$

الفترات الجزئية	$س_ر^*$	ل	ق($س_ر^*$)	ل ق($س_ر^*$)
[٠ ، $\frac{\pi}{٦}$]	٠	$\frac{\pi}{٦}$	٠	٠
[$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{١٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\pi}{١٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{\pi}{٢٤}$
[$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$]	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{١٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\pi}{١٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\pi}{١٢\sqrt{٢}}$
[$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\pi}{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}\pi}{١٢}$

م(ع٤ ، ق) = $\frac{\pi}{٢٤} + \frac{\pi}{١٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}\pi}{١٢}$

= $\frac{\pi}{١٢}\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٣}\right)$

س٥ : [٠ ، ١] ، ٨ن

① م(٨ن ، د) = ل ← $س^{*}_{ر} = س_{ر}$

② م(٨ن ، د) = ل ← $س^{*}_{ر} = س_{ر-١}$

① م(٨ن ، د) = $\frac{ب-أ}{ن}$ (د($س_{١}$) + د($س_{٢}$) + ... + د(١))

② م(٨ن ، د) = $\frac{ب-أ}{ن}$ (د(٠) + د($س_{١}$) + د($س_{٢}$) + ... + د($س_{ن-١}$))

ل - ل = $\frac{ب-أ}{ن}$ (د(١) - د(٠))

= $\frac{١}{ن}$ (د(١) - د(٠))

التكامل المحدود

إيجاد م(ق$_ن$ ، د) إذا كانت ن مجهولة

خطوات الحل :

١- نجد $ل = \frac{ب - أ}{ن}$

٢- نختار س$_ر^*$ الأفضل س$_ر^*$ = س$_ر$

٣- س$_ر$ = أ + ل ر نجدها بأبسط صورة .

٤- نجد د(س$_ر^*$)

٥- نكتب القانون م(ق$_ن$ ، د)

مثال (١١) ص (١٧١) :

$ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٦ - ٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$ ، $ل = \frac{٤}{ن}$

س$_ر$ = أ + ل ر

س$_ر$ = ٢ + $\frac{٤}{ن}$ ر

د(س$_ر$) = ٢(٢ + $\frac{٤}{ن}$ ر) + ٣

د(س$_ر$) = ٤ + $\frac{٨}{ن}$ ر + ٣

د(س$_ر$) = ٧ + $\frac{٨}{ن}$ ر

م(ق$_ن$ ، د) = $\sum_{ر=1}^{ن}$ ل د(س$_ر^*$)

= $\frac{٤}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (٧ + \frac{٨}{ن}$ ر$)$

ملاحظة 3 :

① $\sum_{ر=1}^{ن} أ = أ \times ن$

② $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$

③ $\sum_{ر=1}^{ن} (أ_ر \mp ب_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} أ_ر \mp \sum_{ر=1}^{ن} ب_ر$

$= \frac{4}{ن} \left[7ن + \frac{8}{ن} \times 4 \times \frac{ن(ن+1)}{2} \right]$

$= \frac{4}{ن} \left[7ن + 4ن + 4 \right]$

$= \frac{4}{ن} \left(11ن + 4 \right)$

$= \frac{44ن + 16}{ن}$

م = مساحة = $\lim_{ن \to \infty}$ م(ن)

$= \lim_{ن \to \infty} 44 + \frac{16}{ن}$

$= \boxed{44}$

note $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ}{ن} = 0$

قانون:

إذا كان ق(س) معرف على [أ، ب]

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ء س = نها$_{ن \to \infty}$ م(ح ن، ق)

خصائص نها$_{ن \to \infty}$ ق(س)

١- درجة البسط أكبر من درجة المقام تكون النهاية ← ∞ أو $-\infty$

٢- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام تكون النهاية = صفر

٣- إذا كانت درجة البسط = درجة المقام تكون النهاية $\frac{\text{معامل أعلى قوة في البسط}}{\text{معامل أعلى قوة في المقام}}$

مثال ①: إذا تم حساب مجموع ريمان للفترة [٣، ٥]

للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة ح ن وكان م(ح ن، ق) = $\frac{ن^٢ - ٣ن + ١}{٥ن^٢ + ٦ن - ٢}$

جد $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ء س = نها$_{ن \to \infty}$ م(ح ن، ق)

= نها$_{ن \to \infty}$ $\frac{ن^٢ - ٣ن + ١}{٥ن^٢ + ٦ن - ٢}$ = $\frac{١}{٥}$

② [١، ٤] م(ح ن، ق) = $\frac{ن^٣ - ٣ن}{٤ن^٥ + ٢}$

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) ء س = نها$_{ن \to \infty}$ $\frac{ن^٣ - ٢ن}{٤ن^٥ + ٢}$

= صفر

③ $[٠ ، ٤]$ $\quad م(ط_{ن} ، د) = ٣ + \dfrac{٢ن^{٢} - ١}{٤ن^{٣} - ٢}$

$$\int_{٠}^{٤} د(س) \, ء س = \lim_{ن \to \infty} ٣ + \dfrac{٢ن^{٢} - ١}{٤ن^{٣} - ٢}$$

$$= ٣ + \text{صفر}$$

$$= \boxed{٣}$$

مثال (٣) ص (١٧٣):

$د(س) = ٥ - ٤س \qquad [٠ ، ٣] \qquad س_{ر}^{*} = س_{ر}$

$\int_{٠}^{٣} د(س) \, ء س$ باستخدام تعريف التكامل المحدود.

① $ل = \dfrac{ب - أ}{ن} = \dfrac{٣ - ٠}{ن} = \dfrac{٣}{ن}$

② $س_{ر} = أ + ل ر$

$= ٠ + \dfrac{٣}{ن} ر = \dfrac{٣}{ن} ر$

③ $د(س_{ر}) = ٥ - ٤ \times \dfrac{٣}{ن} ر$

$= ٥ - \dfrac{١٢}{ن} ر$

④ $م(ط_{ن} ، د) = ل \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر})$

$= \dfrac{٣}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٥ - \dfrac{١٢}{ن} ر$

$= \dfrac{٣}{ن} \left(٥ن - \dfrac{١٢}{ن} \times \dfrac{ن(ن+١)}{٢} \right)$

$= \dfrac{٣}{ن} (٥ن - ٦ن - ٦)$

$= \dfrac{٣}{ن} (-ن - ٦) = -٣ - \dfrac{١٨}{ن}$

$\int^{٢}$ د(س) ءس = $\underset{ن \to \infty}{\text{نها}}$ ٣ − $\frac{١٨}{ن}$

= $\boxed{-٣}$

سؤال: باستخدام تعريف التكامل المحدود جد $\int_{-١}^{٤} (٢س - ٥)$ ءس

د(س) = ٢س − ٥   [−١، ٤] $س^*_ر = س_ر$

ل = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{٤ - -١}{ن} = \frac{٥}{ن}$

$س_ر$ = أ + ل ر

= −١ + $\frac{٥}{ن}$ ر

د($س_ر$) = ٢(−١ + $\frac{٥}{ن}$ ر) − ٥

= −٢ + $\frac{١٠}{ن}$ ر − ٥

= $\frac{١٠}{ن}$ ر − ٧

م(ع$_ن$، د) = ل $\sum$ د($س_ر$)

= $\frac{٥}{ن} \sum (\frac{١٠}{ن}$ ر − ٧)

= $\frac{٥}{ن} (\frac{١٠}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}$ − ٧ن)

= $\frac{٥}{ن}$ (٥ن + ٥ − ٧ن)

= $\frac{٥}{ن}$ (٥ − ٢ن) = $\frac{٢٥}{ن}$ − ١٠

$\underset{ن \to \infty}{\text{نها}}$ $\frac{٢٥}{ن}$ − ١٠ = −١٠

مثال (٢) ص (١٧٢):

د = (ن - م) / ن = (ن - ١) / ٥

سر = سر = م + د ر

= ١ + (ن - ١)/٥ ر

د(س) = ٥ (١ + (ن - ١)/٥ ر) - ٢

= ٥ + (ن - ١) ر - ٢

= ٣ + (ن - ١) ر

م (٥، ص) = ل $\sum_{ر=١}^{٥}$ د(سر)

٣٦ = (ن - ١)/٥ $\sum_{ر=١}^{٥}$ ٣ + (ن - ١) ر

٣٦ = (ن - ١)/٥ (٣ × ٥ + (ن - ١) × (٥ × ٦)/٢)

٣٦ = (ن - ١)/٥ × ١٥ + (ن - ١)/٥ × ١٥ (ن - ١)

٣٦ = ٣ن - ٣ + ٣ (ن² - ٢ن + ١).

٣٦ = ٣ن - ٣ + ٣ن² - ٦ن + ٣

٣٦ = ٣ن² - ٣ن

∴ ٣ن² - ٣ن - ٣٦ = ٠ ∴ [÷ ٣]

∴ ن² - ن - ١٢ = ٠ ∴

∴ (ن + ٣)(ن - ٤) = ٠ ∴

ن = -٣ ✗ [ن = ٤]

قابلية الاقتران للتكامل :

نظرية (١) :

إذا كان ق(س) متصل على [أ، ب] فإنه يكون قابل للتكامل على [أ، ب]

مثال : هل ق(س) = جاس قابل للتكامل على [٠، π]

ق(س) = جاس متصل ∀ س ∈ [٠، π] لأنه اقتران دائري

∴ ق(س) قابل للتكامل على [٠، π]

نظرية (2) :

إذا كان ق(س) قابل للتكامل على [أ، ب] وكان ق(س) = هـ(س)

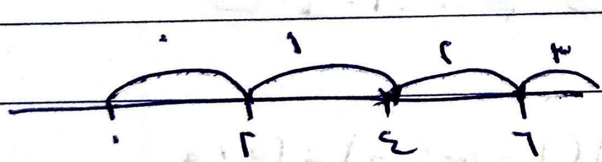
∀ س ∈ [أ، ب] ما عدا نقاط محصورة (معدودة)

فإن هـ(س) قابل للتكامل على [أ، ب]

مثال(٦) : ق(س) = [$\frac{1}{2}$ س] في [٤، ٦]

ابحثي في قابلية ق(س)

ل = $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = ٢



$\frac{1}{2}$ س = ٠

س = ٠

[$\frac{1}{2}$ س] = { ٢ ، ٤ ≤ س < ٦ ؛ ٣ ، س = ٦ (٣، ٦) }

نفرض هـ(س) = ٢ ∀ س ∈ [٤، ٦]

هـ(س) = ق(س) ما عدا س = ٦

∵ هـ(س) = ٢ قابل للتكامل ⇐ ق(س) قابل للتكامل على [٤، ٦]

مثال (٧):

د(س) = (س² − ١) / (س + ١)   [−٢ ، ٢]

مجال د(س) ⟸ س + ١ = ٠

س = −١

د(س) = (س − ١)(س + ١) / (س + ١)

د(س) = س − ١

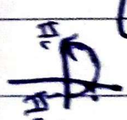
نفرض هـ(س) = س − ١   ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]

هـ(س) = د(س) ماعدا س = −١

∵ هـ(س) قابل للتكامل لأنه كثير حدود

د(س) قابل للتكامل.

س: د(س) = (جتا³س − ١) / (جتاس − ١)   [−$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$]



جتاس − ١ = ٠ ⟸ جتاس = ١   س = ٠ ∈ [−$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$]

د(س) = (جتاس − ١)(جتا²س + جتاس + ١) / (جتاس − ١)

د(س) = جتا²س + جتاس + ١

نفرض هـ(س) = جتا²س + جتاس + ١   ∀ س ∈ [−$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$]

هـ(س) متصل فهو قابل للتكامل ∴ هـ(س) = د(س) ماعدا س = ٠

∴ د(س) قابل للتكامل.

تمارين ص(١٧٥):

س١ -: د(س) = ٢ - ٥س وكانت ق ن [-١، ٢]

$$ل = \frac{٤}{ن}$$

$$س_ر = -١ + \frac{٤}{ن} ر$$

$$د(س_ر) = ٢ - ٥\left(-١ + \frac{٤}{ن} ر\right)$$

$$= ٢ + ٥ - \frac{٢٠}{ن} ر$$

$$= ٧ - \frac{٢٠}{ن} ر$$

$$م(ق_ن، د) = ل \sum_{ر=١}^{ن} د(س_ر)$$

$$= \frac{٤}{ن} \sum \left(٧ - \frac{٢٠}{ن} ر\right)$$

$$= \frac{٤}{ن} \left(٧ن - \frac{٢٠}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$

$$= \frac{٤}{ن} \times (٧ن - ١٠ن - ١٠)$$

$$= \frac{٤}{ن} \times (-٣ن - ١٠)$$

$$= -١٢ - \frac{٤٠}{ن}$$

$$\int_{-١}^{٣} د(س) ءس = \lim_{ن \to \infty} م(ق_ن، د)$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \left(-١٢ - \frac{٤٠}{ن}\right)$$

$$= -١٢$$

س٢ : ق(س) = أ هـ(س) + ب

م(ق، ن، هـ) = $\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن}$ ق(س$_ر$)

= $\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن}$ (أ هـ(س$_ر$) + ب)

= $\frac{1}{ن}$ × أ $\sum_{ر=1}^{ن}$ هـ(س$_ر$) + $\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن}$ ب

= أ × $\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن}$ هـ(س$_ر$) + $\frac{1}{ن}$ × ن × ب

= أ × م(هـ، ن، هـ) + ب

س٤ - $\int_{-1}^{4} \frac{1}{2}$ دس

ق(س) = $\frac{1}{2}$ [-١، ٤]   س$_ر^*$ = س$_ر$

١) ل = $\frac{٤ - -١}{ن}$ = $\frac{٥}{ن}$

٢) س$_ر^*$ = -١ + $\frac{٥}{ن}$ ر

٣) ق(س$_ر$) = $\frac{1}{2}$

م(ق، ن، ق) = $\frac{٥}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{2}$

= $\frac{٥}{ن}$ × $\frac{1}{2}$ × ن

= $\frac{٥}{٢}$

$\int_{-1}^{4}$ ق(س) دس = $\frac{٥}{٢}$

(ب) $\int_{1}^{2} (4 - 6\text{س})\, \text{ء س}$

$\text{د}(\text{س}) = 4 - 6\text{س}$ $[1 ، 2]$ $\text{س}_\text{ر}^{*} = \text{س}_\text{ر}$

$\text{ل} = \frac{1}{\text{ن}}$ $\text{س}_\text{ر} = 1 + \frac{1}{\text{ن}}\text{ر}$

$\text{د}(\text{س}_\text{ر}) = 4 - 6\left(1 + \frac{1}{\text{ن}}\text{ر}\right)$

$= 4 - 6 - \frac{6}{\text{ن}}\text{ر}$

$= -2 - \frac{6}{\text{ن}}\text{ر}$

$\text{م}(\text{ن} ، \text{د}) = \frac{1}{\text{ن}} \sum -2 - \frac{6}{\text{ن}}\text{ر}$

$= \frac{1}{\text{ن}}\left(-2\text{ن} - \frac{6}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right)$

$= \frac{1}{\text{ن}}\left(-2\text{ن} - 3\text{ن} - 3\right)$

$= \frac{1}{\text{ن}}\left(-5\text{ن} - 3\right)$

$= \frac{-5\text{ن} - 3}{\text{ن}}$

$\int_{1}^{2} 4 - 6\text{س}\, \text{ء س} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{-5\text{ن} - 3}{\text{ن}}$

$= -5$

العلاقة بين التفاضل والتكامل

مثال (١) ص (١٧٧):

① $\int_{-٢}^{٣} ٤س^{٣} - ١ \; دس$

$= \left. س^{٤} - س \right|_{-٢}^{٣}$

$= (٨١ - ٣) - (١٦ + ٢)$

$= ٧٨ - ١٨$

$= ٦٠$

② $\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{س} \; دس$

$\int_{٤}^{٩} ٣ (س)^{\frac{١}{٢}} \; دس$

$\left. ٣ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right|_{٤}^{٩}$

$\left. ٢ (\sqrt{س})^{٣} \right|_{٤}^{٩}$

$٢ \times ٢٧ - ٢ \times ٨ = ٣٨$

③ $\int_{١}^{٢} هـ^{س} \; دس$

$\left. هـ^{س} \right|_{١}^{٢}$

$هـ^{٢} - هـ$

مثال (٢) ص (١٧٧) :

$\int_{-٣}^{٧}$ ق(س) ءس = م(س) $\Big|_{-٣}^{٧}$

= م(٧) − م(−٣)

= ١٢ − ٤ = ٨

مثال (٣) ص (١٧٨) :

ق(س) = ٤ س^{٣} [−٢، ٤]

ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) ءص

= $\int_{-٢}^{س}$ ٤ص^{٣} ءص

= ص^{٤} $\Big|_{-٢}^{س}$

= س^{٤} − ١٦

ت(−٢) = ٠

ت(١) = ١ − ١٦ = −١٥

مثال (٤) ص (١٧٨):

$د(س) = س^{٢} + جا ٢س$ $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$ت(س) = \int_{م}^{س} د(ص) \, ء ص$

$= \int_{٠}^{س} ص^{٢} + جا ٢ص \, ء ص$

$\frac{ص^{٣}}{٣} - \frac{١}{٢} جتا ٢ص \Big|_{٠}^{س}$

$\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{١}{٢} جتا ٢س - (٠ - \frac{١}{٢})$

$\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{١}{٢} جتا ٢س + \frac{١}{٢}$

$ت(٠) = ٠$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} د(س) \, ء س = ت(\frac{\pi}{٤})$

$= \frac{\pi^{٣}}{١٩٢} - ٠ + \frac{١}{٢}$

$= \frac{\pi^{٣}}{١٩٢} + \frac{١}{٢}$

$\frac{(\frac{\pi}{٤})^{٣}}{٣} = \frac{\pi^{٣}}{٣ \times ٦٤}$

$= \frac{\pi^{٣}}{١٩٢}$

مثال ١٠١ ص ١٧٩ :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^{٥}\text{س}\ \text{جتا س}\ \text{ءس}$$

$\text{ع} = \text{جا س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{\text{جا جتا س}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ع جتا}}$

عندما س = ٠

ع = ١

عندما س = $\frac{\pi}{2}$

ع = ٢

$$\int_{1}^{2} \text{ع}^{\not{٥}\,٤}\ \text{جتا س}\ \frac{\text{ءع}}{\not{\text{ع}}\ \text{جتا س}}$$

$$\frac{\text{ع}^{٥}}{٥}\Big|_{1}^{2}$$

$$\frac{٣٢}{٥} - \frac{١}{٥} = \frac{٣١}{٥}$$

تمارين ص (١٨٠) :

(٣) $\int_{0}^{4} (3 + \sqrt{\text{س}})^{2}\ \text{ءس}$

$$\int_{0}^{4} 9 + 6\sqrt{\text{س}} + \text{س}\ \ \text{ءس}$$

$$9\text{س} + \not{6}^{\,2} \times \frac{2}{\not{3}} \times \text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{2}\ \Big|_{0}^{4}$$

$$9\text{س} + 4(\sqrt{\text{س}})^{3} + \frac{\text{س}^{2}}{2}\ \Big|_{0}^{4}$$

$(36 + 32 + 8) - (0)$

$= \boxed{76}$

(٣) $\int_{1}^{2} س(س^2 - 3)^3 \, دس$

$ع = س^2 - 3$

$دس = \frac{دع}{2س}$

عندما $س = 1$

$ع = -2$

عندما $س = 2$

$ع = 1$

$\int_{-2}^{1} س(ع)^3 \, \frac{دع}{2س}$

$\frac{1}{2} \left[\frac{ع^4}{4} \right]_{-2}^{1}$

$\frac{1}{8}(1 - 16) = \frac{-15}{8}$

(٤) $\int_{1}^{هـ} لو_{هـ} س \, دس$

$ص = لو_{هـ} س \quad دو = دس$

$دص = \frac{1}{س} دس \quad و = س$

$س لو_{هـ} س \Big|_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ} 1 \, دس$

$(هـ لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} 1) - س \Big|_{1}^{هـ}$

$هـ - (هـ - 1) = هـ - هـ + 1 = 1$

③ $\int_{0}^{2} 120\, س^{2} (س - 1)^{3}\, دس$

$ع = س - 1$

$دس = دع$

$س = 0 \Leftarrow ع = -1$

$س = 2 \Leftarrow ع = 1$

$\int_{-1}^{1} 120\, س^{2}\, ع^{3}\, دع$

$ع = س - 1$

$س = ع + 1$

$س^{2} = (ع + 1)^{2}$

$= ع^{2} + 2ع + 1$

$\int_{-1}^{1} 120 (ع^{2} + 2ع + 1) ع^{3}\, دع$

$\int_{-1}^{1} 120 (ع^{5} + 2ع^{4} + ع^{3})\, دع$

$120 \left(\frac{ع^{6}}{6} + \frac{2ع^{5}}{5} + \frac{ع^{4}}{4} \right) \Big|_{-1}^{1}$

$120 \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) \right)$

$\boxed{96}$

س٢ : $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ ، س ∈ [١، ٤]

ت(س) ؟؟

$\text{ت}(\text{س}) = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص}$

$= \int_{0}^{\text{س}} \frac{\text{ص}}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$ $\quad +1-1$

$= \int_{0}^{\text{س}} \frac{\text{ص}+1-1}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$

$\int_{0}^{\text{س}} \frac{\text{ص}+1}{\text{ص}+1}\, \text{دص} - \int_{0}^{\text{س}} \frac{1}{\text{ص}+1}\, \text{دص}$

$\text{ص}\Big|_{0}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1|\Big|_{0}^{\text{س}}$

$\text{س} - \left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| - \text{لو}_{\text{هـ}} 1\right)$

$\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1|$

س٣ : $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^2 + \text{أ} & -٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{ب س} + 1 & ٣ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$

هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) في [−٢، ٥]

أ، ب ؟؟

ق(-٢) = ٠ ∴

٨ + م = ٠ ∴

م = -٨

$\underset{س \to ٣^{+}}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \to ٣^{-}}{نهـا}$ ق(س)

٣ن + ١ = ١٨ - ٨

٣ن + ١ = ١٠

٣ن = ٩

ن = ٣

س٤ : $\int_{\frac{١}{٢}}^{س}$ د(ص) دص = س + جا π س + جـ

جـ ؟؟ د(٢) ؟؟ س > $\frac{١}{٢}$

ق($\frac{١}{٢}$) = ٠ ∴

$\frac{١}{٢}$ + جا $\frac{π}{٢}$ + جـ = ٠ ∴

$\frac{١}{٢}$ + ١ + جـ = ٠ ∴

جـ = $-\frac{٣}{٢}$

د(س) = قَ(س)

= ١ + π جتا π س

د(٢) = ١ + π جتا ٢π

= ١ + π

س٥ : $\text{ق}(\text{س}) = \int_{\text{م}}^{\text{س}} (\text{م} + \text{هـ}^{\text{ص}})\, \text{دص}$

$\text{ق}'(٢) = -١$ م؟؟

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) = \text{م} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ق}'(٢) = \text{م} + \text{هـ}^{٢}$

$-١ = \text{م} + \text{هـ}^{٢}$

$\text{م} = -\text{هـ}^{٢} - ١$

س٦ : $\int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})(\text{س} - ١)^{٥}\, \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س} - ١$

$\text{دس} = \text{دع}$

عندما $\text{س} = ٠$

$\text{ع} = -١$

عندما $\text{س} = ١$

$\text{ع} = ٠$

$\int_{-١}^{٠} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\, \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$\text{ع}^{٢} = (\text{س} - ١)^{٢}$

$\int_{-١}^{٠} (\text{ع}^{٢} - ١)\, \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١$

$\text{ع}^{٢} - ١ = \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$\int_{-١}^{٠} \text{ع}^{٧} - \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$\left[\frac{\text{ع}^{٨}}{٨} - \frac{\text{ع}^{٦}}{٦}\right]_{-١}^{٠}$

$$٠ - \left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٦} \right)$$

$$٠ - \left(\frac{٦ - ٨}{٤٨} \right)$$

$$٠ - \left(\frac{-٢}{٤٨} \right) = \frac{٢}{٤٨} = \frac{١}{٢٤}$$

خصائص التكامل المحدود :

مثال (1) ص (181) :

① $\int_{-٤}^{٦} د س = ١(٦ - -٤) = ١٠$

② $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} -٣ جا س \, د س = ٠$

③ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}} \, د س$

$\int_{١}^{٢} \left(\frac{٣س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٧س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٢}} \right) د س$

$\int_{١}^{٢} ٣س^{٢} - ٧ + ٥س^{-٢} \, د س$

$\left[س^{٣} - ٧س + ٥ \times \frac{س^{-١}}{-١} \right]_{١}^{٢}$

$\left[س^{٣} - ٧س - \frac{٥}{س} \right]_{١}^{٢}$

$\left(٨ - ١٤ - \frac{٥}{٢} \right) - \left(١ - ٧ - ٥ \right)$

$-٦ - \frac{٥}{٢} + ١١$

$٥ - \frac{٥}{٢} = \frac{١٠ - ٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$

مثال (٢) ص(١٨٢) :

$$\int_{٣أ+١}^{٥أ+٢} ٤ \; دس = ٣٦$$

$$٤(٢+٥أ-٣أ-١) = ٣٦$$

$$٤(٢أ+١) = ٣٦$$

$$٢أ+١ = ٩$$

$$٢أ = ٨$$

$$\boxed{أ = ٤}$$

مثال (٣) ص(١٨٢) :

$$\int_{٣}^{٦} د(س) \; دس = ١٠$$

① $$\int_{٣}^{٣} د(س) \; دس = ٠$$

② $$\int_{٦}^{٣} د(س) \; دس = -١٠$$

مثال (٤) ص(١٨٢) :

$$\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^٢+٤} \; دس \quad في \; [٠،٥]$$

نبحث في إشارة $د(س) = \frac{٣س}{س^٢+٤}$ ↗

$$\frac{٣س}{س^٢+٤} = ٠$$

$٣س = ٠$ ∴ $س = ٠$

[++++] من ٠ إلى ٥

$٣س \geq ٠$ ∴ $\forall س \in [٠،٥]$

$س^٢+٤ \geq ٠$ ∴ $\forall س \in [٠،٥]$

∴ $$\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^٢+٤} \; دس \geq ٠$$

مثال (٥) ص (١٨٣):

$$\int_{1}^{2} (\text{س}^{2} - 1)\,\text{د س} \leq \int_{1}^{2} (2\text{س} + 2)\,\text{د س}$$

نفرض د(س) = (س² − ١) − (٢س + ٢)

= س² − ١ − ٢س − ٢

= س² − ٢س − ٣

نبحث في إشارة د(س)

∴ س² − ٢س − ٣ = ٠

∴ (س + ١)(س − ٣) = ٠

س = −١ ، س = ٣

+ + + [− −] + + + +
(−١ ، ٣ ؛ ١ ، ٢)

∴ د(س) ≤ ٠

∴ (س² − ١) − (٢س + ٢) ≤ ٠

س² − ١ ≤ ٢س + ٢

$$\Leftarrow \int_{1}^{2} (\text{س}^{2} - 1)\,\text{د س} \leq \int_{1}^{2} (2\text{س} + 2)\,\text{د س}$$

مثال (٦) ص (١٨٣):

د(س) ≤ ٤

$$\int_{1}^{3} \text{د(س)}\,\text{د س} \leq \int_{1}^{3} 4\,\text{د س}$$

$$\int_{1}^{3} \text{د(س)}\,\text{د س} \leq 4(3 - 1)$$

$$\int_{1}^{3} \text{د(س)}\,\text{د س} \leq 8$$

أكبر قيمة $\int_{1}^{3} \text{د(س)}\,\text{د س} = 8$

$\int_{1}^{3} 5\, ق(س)\, دس = 5 \times 8 = 40$

مثال (٧) ص (١٨٤):

$\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس + \int_{4}^{9} ق(س)\, دس = \int_{-1}^{9} ق(س)\, دس$

مثال (٨) ص (١٨٤):

$\int_{2}^{6} ق(س)\, دس = 3 \qquad \int_{8}^{6} ق(س)\, دس = -5$

$\int_{2}^{8} 2\, ق(س)\, دس = ؟$

$\int_{2}^{8} ق(س)\, دس = \int_{2}^{6} ق(س)\, دس + \int_{6}^{8} ق(س)\, دس$

$= 3 + 5 = 8$

$\int_{2}^{8} 2\, ق(س)\, دس = 2 \times 8 = 16$

مثال (٩) ص (١٨٤):

$ق(س) = \begin{cases} 3س^2 & -1 \le س \le 2 \\ 4س + 2 & 2 < س \le 4 \end{cases}$

عندما $-1 \le س \le 2$

$ت(س) = \int_{-1}^{س} 3ص^2\, دص$

$= ص^3 \Big|_{-1}^{س}$

$= س^3 + 1$

عندما $2 < س \le 4$

$ت(س) = ت(2) + \int_{2}^{س} 4ص + 2\, دص$

$= 9 + [2ص^2 + 2ص]_{2}^{س}$

$= 9 + 2س^2 + 2س - (8 + 4)$

$= 9 + 2س^2 + 2س - 12$

$= 2س^2 + 2س - 3$

$$ت(س) = \begin{cases} س^3 + 1 & -1 \le س \le 2 \\ 2س^2 + 2س - 3 & 2 < س \le 4 \end{cases}$$

نشاط صفحة (185):

$$د(س) = \begin{cases} 3س^2 - 7 & س > 2 \\ 2س & س \le 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{3} د(س)\, دس = \int_{-2}^{2} د(س)\, دس + \int_{2}^{3} د(س)\, دس$$

$$= \int_{-2}^{2} 2س\, دس + \int_{2}^{3} (3س^2 - 7)\, دس$$

$$= س^2 \Big|_{-2}^{2} + س^3 - 7س \Big|_{2}^{3}$$

$$= 4 - 4 + (27 - 21) - (8 - 14)$$

$$= 0 + 6 - (-6) = 12$$

مثال (1) صفحة (185):

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{1 + هـ^س} \quad \text{نضيف } + هـ^س - هـ^س$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1 + هـ^س - هـ^س}{1 + هـ^س}\, دس$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1 + هـ^س}{1 + هـ^س} - \frac{هـ^س}{1 + هـ^س}\, دس$$

$\int_{1}^{2} ١ \, \text{دس} - \int$

$\int_{1}^{2} \frac{١ - \text{ه}^{\text{س}}}{١ + \text{ه}^{\text{س}}} \, \text{دس}$

$\text{س} - \frac{\text{لو}|١ + \text{ه}^{\text{س}}|}{\text{ه}} \Big|_{1}^{2}$

$٢ - \frac{\text{لو}|١ + \text{ه}^{٢}|}{\text{ه}} - ١ + \frac{\text{لو}|١ + \text{ه}|}{\text{ه}}$

$١ + \frac{\text{لو}|١ + \text{ه}|}{\text{ه}} - \frac{\text{لو}|١ + \text{ه}^{٢}|}{\text{ه}}$

$١ + \frac{\text{لو}\frac{١ + \text{ه}}{١ + \text{ه}^{٢}}}{\text{ه}}$

مثال (١١) ص (١٨٦):

$\int_{0}^{2} \text{س ق(س) دس} = ٨ \qquad \text{ق}(٢) = ٥$

$\int_{0}^{2} \text{س}^{٢} \, \text{قَ(س) دس}$

$\text{ه} = \text{س}^{٢} \qquad \text{دع} = \text{قَ(س) دس}$

$\text{ده} = ٢\text{س دس} \qquad \text{ع} = \text{ق(س)}$

$\text{س}^{٢} \text{ق(س)} \Big]_{0}^{2} - ٢\int_{0}^{2} \text{س ق(س) دس}$

$٤\text{ق}(٢) - ٠ - (٢ \times ٨)$

$٤ \times ٥ - ١٦$

$٢٠ - ١٦ = ٤$

مثال (١٣) ص(١٨٦):

$$\int_{2}^{\text{أ}} \frac{4}{\text{س}^2-1}\, d\text{س} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2} \qquad \text{أ}?? \qquad \text{أ} > 1$$

$$\frac{4}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1}$$

$$4 = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}+1)$$

عندما $\text{س} = 1$

$$4 = 2\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 2}$$

عندما $\text{س} = -1$

$$4 = -2\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -2}$$

$$\int_{2}^{\text{أ}} \left(\frac{-2}{\text{س}+1} + \frac{2}{\text{س}-1}\right) d\text{س}$$

$$-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| \Big]_{2}^{\text{أ}} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2}$$

$$2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right|\right)\Big]_{2}^{\text{أ}} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2}$$

$$\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{أ}-1}{\text{أ}+1}\right| - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{2-1}{2+1}\right|\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{أ}-1}{\text{أ}+1} - \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{3} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{أ}-1}{\text{أ}+1} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{3}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١-م}{١+م} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١-م}{١+م} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١-م}{١+م} = \frac{١}{٢}$$

$$١+م = ٢-٢م$$

$$\boxed{م = ٣}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١-م}{١+م} - \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{٣} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٣}{٢}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \left(٣ \times \frac{١-م}{١+م}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{١-م}{١+م} \div \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١-م}{١+م} \times ٣$$

$$\frac{(١-م)\,٣}{١+م} = \frac{٣}{٢}$$

$$\boxed{م = ٣}$$

تمارين صـ ١٨٧ (١ :

س١ : (أ) $\int_{0}^{\pi} \text{جا}^{2}\text{س} \; \text{د}\text{س}$

$$\int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س}\right) \text{د}\text{س}$$

$$\left[\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\,\text{جا}\,2\text{س}\right]_{0}^{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\text{جا}\,2\pi}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\,\text{جا}\,0\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

(ب) $\int_{0}^{2} \left(1 + \text{هـ}^{\text{س}}\right)^{2} \text{د}\text{س}$

$$\int_{0}^{2} \left(1 + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{2\text{س}}\right) \text{د}\text{س}$$

$$\left[\text{س} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}}\right]_{0}^{2}$$

$$2 + 2\,\text{هـ}^{2} + \frac{\text{هـ}^{4}}{2} - \left(0 + 2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$2 + 2\,\text{هـ}^{2} + \frac{\text{هـ}^{4}}{2} - 2 - \frac{1}{2}$$

$$2\,\text{هـ}^{2} + \frac{\text{هـ}^{4}}{2} - \frac{1}{2}$$

(ه) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (س+1)(س^2+4)\ د س$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} س^3 + 4س + س^2 + 4\ د س$

$\left. \frac{س^4}{4} + 2س^2 + \frac{س^3}{3} + 4س \right|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$

$\frac{(\sqrt{3})^4}{4} + 2(\sqrt{3})^2 + \frac{(\sqrt{3})^3}{3} + 4\sqrt{3} - \left(\frac{(-\sqrt{3})^4}{4} + 2(-\sqrt{3})^2 + \frac{(-\sqrt{3})^3}{3} + -4\sqrt{3}\right)$

$\frac{(\sqrt{3})^4}{4} + 2(\sqrt{3})^2 + \frac{(\sqrt{3})^3}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^4}{4} - 2(\sqrt{3})^2 + \frac{(\sqrt{3})^3}{3} + 4\sqrt{3}$

$\frac{2(\sqrt{3})^3}{3} + 8\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} + 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3}$

(و) $\int_{-2}^{1} \frac{س^3 - 27}{س^2 + 3س + 9}\ د س$

$\int_{-2}^{1} \frac{(س-3)(س^2 + 3س + 9)}{(س^2 + 3س + 9)}\ د س$

$\left. \frac{س^2}{2} - 3س \right|_{-2}^{1}$

$(\frac{1}{2} - 3) - (2 + 6)$

$\frac{1}{2} - 3 - 8 = \frac{1}{2} - 11 = \frac{1 - 22}{2} = \frac{-21}{2}$

س: ⑤ $\int_{1}^{2} (س^{2} + ٢)\, ء س \ge \int_{1}^{2} (٢س - ١)\, ء س$

نفرض $د(س) = س^{2} + ٢ - ٢س + ١$

$= س^{2} - ٢س + ٣$

$م = ب^{2} - ٤أجـ$

$= ٤ - ٤ \times ١ \times ٣$

$= ٤ - ١٢ = -٨$ المميز سالب العبارة لا تحلل.

$د(س) \ge ٠ \quad \forall س \in [١، ٢]$

$\therefore (س^{2} + ٢) - (٢س - ١) \ge ٠ \quad \forall س \in [١، ٢]$

$س^{2} + ٢ \ge ٢س - ١ \quad \forall س \in [١، ٢]$

$\int_{1}^{2} (س^{2} + ٢)\, ء س \ge \int_{1}^{2} (٢س - ١)\, ء س$

⑥ $\int_{2}^{3} (س^{2} + ٢)\, ء س \ge ٠$

$س^{2} + ٢ \ge ٠ \quad \forall س \in [٢، ٣]$

$\therefore \int_{2}^{3} (س^{2} + ٢)\, ء س \ge ٠$

س٣: (أ) $\int_{٥}^{٧} \text{س}^{٣} \, \text{د س} + \int_{١}^{٥} \text{س}^{٣} \, \text{د س}$

$= \int_{١}^{٧} \text{س}^{٣} \, \text{د س}$

(ب) $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢} \, \text{د س} - \int_{٤}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢} \, \text{د س}$

$= \int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢} \, \text{د س} + \int_{٢}^{٤} \sqrt{\text{س}+٢} \, \text{د س}$

$= \int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}+٢} \, \text{د س}$

(ج) $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢} \, \text{د س} - \int_{٣}^{١} ٤ \, \text{د س} + \int_{٣}^{٥} \text{س}^{٢}+٤ \, \text{د س}$

$\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢} \, \text{د س} + \int_{١}^{٣} ٤ \, \text{د س} + \int_{٣}^{٥} \text{س}^{٢}+٤ \, \text{د س}$

$\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}+٤ \, \text{د س} + \int_{٣}^{٥} \text{س}^{٢}+٤ \, \text{د س}$

$\int_{١}^{٥} \text{س}^{٢}+٤ \, \text{د س}$

(د) $\int_{٢}^{٥} (\text{س}-١) \, \text{د س} + \int_{٧}^{٥} \frac{١-\text{س}^{٢}}{\text{س}+١} \, \text{د س}$

$\int_{٢}^{٥} (\text{س}-١) \, \text{د س} + \int_{٧}^{٥} \frac{(١-\text{س})(١+\text{س})}{(\text{س}+١)} \, \text{د س}$

$\int_{٢}^{٥} \text{س}-١ \, \text{د س} + \int_{٧}^{٥} ١-\text{س} \, \text{د س}$

$$\int_{٢}^{٥} (س-١)\,دس - \int_{٧}^{٥} (س-١)\,دس$$

$$\int_{٢}^{٥} (س-١)\,دس + \int_{٥}^{٧} (س-١)\,دس$$

$$\int_{٢}^{٧} (س-١)\,دس$$

س٤ : $\int_{١}^{٥} د(س)\,دس = ٧$

(أ) $\int_{١}^{٥} ٢د(س) - ٣س + ١ \,دس$

$$٢\int_{١}^{٥} د(س)\,دس - \int_{١}^{٥} ٣س\,دس + \int_{١}^{٥} ١\,دس$$

$$٢(٧) - \left[\frac{٣س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٥} + ١(٥-١)$$

$$١٤ - \left(\frac{٧٥}{٢} - \frac{٣}{٢}\right) + ٤$$

$$١٤ - ٣٦ + ٤ = -١٨$$

(ب) $\int_{١}^{٥} ٢م\,د(س)\,دس = ١$

$$٢م \int_{١}^{٥} د(س)\,دس = ١$$

$$٢م \times ٧ = ١$$

$$١٤م = ١$$

$$\boxed{م = \frac{١}{١٤}}$$

س٥ : $\int_{1}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$

(أ) $\int_{1}^{5} (٣\text{د}(\text{س}) - ٢)\,\text{دس}$

$٣\int_{1}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{5} ٢\,\text{دس}$

$٣(٨) - ٢(٥ - ١)$

$٢٤ - ٨ = ١٦$

(ب) $\int_{3}^{7} ٤\,\text{د}(\text{س} - ٢) - ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{س} - ٢$

$\text{دس} = \text{دع}$

$\text{س} = ٣ \Leftarrow \text{ع} = ١$

$\text{س} = ٧ \Leftarrow \text{ع} = ٥$

$\int_{1}^{5} ٤\,\text{د}(\text{ع})\,\text{دع} - \int_{3}^{7} ٢\text{س}\,\text{دس}$

$٤(٨) - \text{س}^{٢}\Big|_{3}^{7}$

$٣٢ - (٤٩ - ٩)$

$٣٢ - ٤٠ = -٨$

س٦: $\int_{٢}^{٧} ٣\,\text{د}(س)\,دس = ٩ \Leftarrow \int_{٢}^{٧} \text{د}(س)\,دس = ٣$

$\int_{٢}^{٤} ٥\,\text{د}(س)\,دس = ١٠ \Leftarrow \int_{٢}^{٤} \text{د}(س)\,دس = ٢$

$\int_{٤}^{٧} ٢\,\text{د}(س)\,دس$

$\int_{٤}^{٧} \text{د}(س)\,دس = \int_{٤}^{٢} \text{د}(س)\,دس + \int_{٢}^{٧} \text{د}(س)\,دس$

$= -٢ + ٣$

$= ١$

$٢\int_{٤}^{٧} \text{د}(س)\,دس = ٢ \times ١$

$= ٢$

س٧: $\text{د}(س) = \begin{cases} أس + ١ & ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س^٢ & ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

$\int_{١}^{٣} \text{د}(س)\,دس = ١٨$ ، أ ؟؟

$\int_{١}^{٣} \text{د}(س)\,دس = \int_{١}^{٢} أس + ١\,دس + \int_{٢}^{٣} ٣س^٢\,دس$

$١٨ = \frac{أس^٢}{٢} + س\Big|_{١}^{٢} + س^٣\Big|_{٢}^{٣}$

$١٨ = ٢أ + ٢ - \frac{أ}{٢} - ١ + ٢٧ - ٨$

١٨ = (٢أ - أ) ÷ ٢ + ٢٠

-٢ = (٤أ - أ) ÷ ٢

-٤ = ٣أ

أ = -٤ ÷ ٣

م٨ : ∫ من ١ إلى ن [٤س - ∫ من -١ إلى ٢ ٣ع² ءع] ءس = ١٢

ن = ؟

∫ من ١ إلى ن [٤س - ع³ | من -١ إلى ٢] ءس = ١٢

∫ من ١ إلى ن [٤س - (٨ + ١)] ءس = ١٢

∫ من ١ إلى ن [٤س - ٩] ءس = ١٢

٢س² - ٩س | من ١ إلى ن = ١٢

٢ن² - ٩ن - ٢ + ٩ = ١٢

٢ن² - ٩ن - ٥ = ٠ ∴

(٢ن + ١)(ن - ٥) = ٠ ∴

٢ن + ١ = ٠ ∴ **ن = ٥**

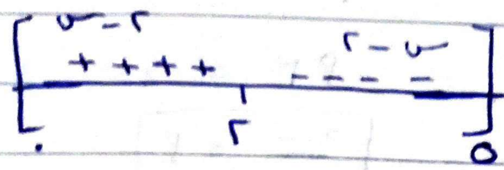
٢ن = -١

ن = -١ ÷ ٢

س٩ : $\text{ق}(\text{س}) = |٢ - \text{س}|$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٥]$

$\therefore ٢ - \text{س} = ٠$

$\text{س} = ٢$



عندما $٠ \le \text{س} \le ٢$

$$\text{ت}(\text{س}) = \int_{٠}^{\text{س}} ٢ - \text{ص} \ \text{د}\text{ص}$$

$$= ٢\text{ص} - \frac{\text{ص}^٢}{٢} \Big|_{٠}^{\text{س}}$$

$$= ٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}$$

عندما $٢ \le \text{س} \le ٥$

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{ت}(٢) + \int_{٢}^{\text{س}} \text{ص} - ٢ \ \text{د}\text{ص}$$

$$= ٢ + \frac{\text{ص}^٢}{٢} - ٢\text{ص} \Big|_{٢}^{\text{س}}$$

$$= ٢ + \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} - ٢ + ٤$$

$$= \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} + ٤$$

د(س) = { $٣س - \frac{س^2}{٢}$ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
$\frac{س^2}{٢} - ٢س + ٤$ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

تمارين عامة (٢٠١٠) :

س١ : أ- ح٦ ، = {أ ، ١ ، ...... ، ١٧ ، ب} [أ ، ب] أ ؟؟

س ر = أ + ل ر

$١ = أ + \frac{ب - أ}{١٠}$ × ١٠

١٠ = ١٠أ + ب − أ

١٠ = ٩أ + ب

١٨ = أ + ب

−٨ = ٨أ

أ = −١ (ب)

ب − ١٧ = ١ − أ

ب + أ = ١٨

٢- ح٥ د(س) = ٥ [١ ، ٢]

$ل = \frac{٢-١}{ن} = \frac{١}{ن}$

س ر = أ + ل ر

$= ١ + \frac{١}{ن}$ ر

د(س ر) = ٥

$م(ح ، د) = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٥$

$= \frac{١}{ن} \times ٥ن$

= ٥

٣. $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$ $\quad [١ ، ٢]$

$\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\text{ن} ، \text{ه})$ ؟!

$\text{ل} = \frac{٢ - ١}{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}}$

$\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ل}\,\text{ر}$

$= ١ + \frac{١}{\text{ن}}\,\text{ر}$

$\text{د}(\text{س}_\text{ر}) = ٢\left(١ + \frac{١}{\text{ن}}\,\text{ر}\right) + ١$

$= ٢ + \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر} + ١$

$= \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر} + ٣$

$\text{م}(\text{ن} ، \text{ه}) = \frac{١}{\text{ن}} \sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر} + ٣$

$= \frac{١}{\text{ن}}\left(\frac{٢}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} + ٣\text{ن} \right)$

$= \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{ن} + ١ + ٣\text{ن} \right)$

$= \frac{١}{\text{ن}}\left(٤\text{ن} + ١ \right)$

$= ٤ + \frac{١}{\text{ن}}$

$\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\text{ن} ، \text{ه}) = \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} ٤ + \frac{١}{\text{ن}} = ٤$ $\quad$ (ب)

٤- $\int_{2}^{3} د(س)\, دس = 6$

$\int_{2}^{7} (4 + د(س))\, دس = 30 \Leftarrow \int_{2}^{7} 4\, دس + \int_{2}^{7} د(س)\, دس = 30$

$4(5) + \int_{2}^{7} د(س)\, دس = 30$

$\int_{3}^{7} 2\, د(س)\, دس$ ؟؟

$20 + \int_{2}^{7} د(س)\, دس = 30$

$\int_{2}^{7} د(س)\, دس = 10$

$\int_{3}^{7} د(س)\, دس = \int_{3}^{2} د(س)\, دس + \int_{2}^{7} د(س)\, دس$

$= -6 + 10 = 4$

$2\int_{3}^{7} د(س)\, دس = 2(4) = 8$ (أ)

٥- $\int د(س)\, دس = قا^2 س - ظا^2 س + س^2 + جـ$

$د(س) = 2\, قاس\, قاس\, ظاس - 2\, ظاس\, قاس\, قاس\, ظاس + 2س$

$= 2\, قا^2 س\, ظاس - 2\, ظاس\, قا^2 س + 2س$

$= 2س$

$\int_{-1}^{2} د'(س)\, دس = د(س) \Big|_{-1}^{2}$

$= د(2) - د(-1)$

$= 4 - (-2)$

$= 6$ (د)

٦- $\int_{1}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\ \text{د}\text{س}$

$\int_{1}^{2} \sqrt{(\text{س} - 1)(\text{س} - 1)}\ \text{د}\text{س}$

$\int_{1}^{2} \sqrt{(\text{س} - 1)^2}\ \text{د}\text{س}$

$\int_{1}^{2} |\text{س} - 1|\ \text{د}\text{س}$

$\left[\frac{\text{س}^2}{2} - \text{س}\right]_{1}^{2}$

$(2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$- \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ (ج)

٧- $\int_{1}^{2} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}{\text{س} + 2}\ \text{د}\text{س} + \int_{1}^{2} \frac{\text{س} + 1}{\text{س} + 2}\ \text{د}\text{س}$

$= \int_{1}^{2} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 + \text{س} + 1}{\text{س} + 2}\ \text{د}\text{س}$

$= \int_{1}^{2} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} + 2}{\text{س} + 2}\ \text{د}\text{س}$

$= \int_{1}^{2} \frac{(\text{س} + 2)(\text{س} + 1)}{(\text{س} + 2)}\ \text{د}\text{س}$

$= \int_{1}^{2} \text{س} + 1\ \text{د}\text{س}$

$\left[\frac{\text{س}^2}{2} + \text{س}\right]_{1}^{2} = (2 + 2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)$

$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{8 - 3}{2} = \frac{5}{2}$ (ب)

اقتران متكامل ت(س)

٨- ق(س) = $\int_{1}^{س} \frac{ص}{ص^2+1}$ دص + $\int_{1}^{4}$ جا^{2}س دس

ق(٤)

ت/(س) = ق(س)

ق/(س) = $\frac{س}{س^2+1}$ + صفر مشتقة التكامل

المحدود = صفر

ق/(س) = $\frac{س}{س^2+1}$

ق/(٤) = $\frac{4}{(4)^2+1}$ = $\frac{4}{17}$ (ب)

٩- $\bar{د}(س) = ٣س - ٢$

$د(٣) - د(-١)$ ؟؟

$\int \bar{د}(س)\, ءس = \int ٣س - ٢\, ءس$

$د(س) = \frac{٣س^٢}{٢} - ٢س + جـ$

$د(٣) - د(-١)$

$\frac{٢٧}{٢} - ٦ + جـ - (\frac{٣}{٢} + ٢ + جـ)$

$\frac{٢٧}{٢} - ٦ + \cancel{جـ} - \frac{٣}{٢} - ٢ - \cancel{جـ}$

$\frac{٢٤}{٢} - ٨$

$١٢ - ٨ = ٤$ (جـ)

١٠- $د(س) = س\, لو_هـ س$ $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{هـ}{٢}} \bar{د}(س)\, ءس$

$\bar{د}(س) = س \times \frac{١}{س} + لو_هـ س$

$\bar{د}(س) = ١ + لو_هـ س$ $\bar{د}(س) \Big|_{\frac{١}{٢}}^{\frac{هـ}{٢}}$

$\bar{د}(\frac{هـ}{٢}) - \bar{د}(\frac{١}{٢})$

$(١ + لو_هـ \frac{هـ}{٢}) - (١ + لو_هـ \frac{١}{٢})$

$\cancel{١} + لو_هـ \frac{هـ}{٢} - \cancel{١} - لو_هـ \frac{١}{٢}$

$= لو_هـ \frac{هـ}{٢} \times ٢ = لو_هـ هـ = ١$ (أ)

س٤ : ح١٢ تجزئة منتظمة [أ، ب] $\quad$ $س_٢ = ١٢$

$س_٣ = ٧$

أ، ب ؟؟

$$ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{ب - أ}{١٢}$$

$$س_ر = أ + ل ر$$

$$س_٢ = أ + \frac{ب - أ}{\not{١٢}\ ٦} \times \not{٢}\ ١$$

$$٢\times\quad ١٢ = أ + \frac{ب - أ}{٦} \quad \times ٢$$

$$٢٤ = ٢أ + ب - أ$$

$$٢٤ = أ + ب \quad --- (١)$$

$$س_٣ = أ + \frac{ب - أ}{\not{١٢}\ ٤} \times \not{٣}\ ١$$

$$٤\times\quad ٧ = أ + \frac{ب - أ}{٤} \quad \times ٤$$

$$٢٨ = ٤أ + ب - أ$$

$$٢٨ = ٣أ + ب \quad --- (٢)$$

$$٢٤ = أ + ب \quad (-)$$

$$٤ = ٢أ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$$

$$٢٤ = أ + ب$$

$$٢٤ = ٢ + ب \Leftarrow \boxed{ب = ٢٢}$$

مثال٣: [٢، ١٠]   د(س) = ٣هـ(س) + س

م(ع، هـ) = ٦

م(ع، هـ)   سَ*ر = سر

ل = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{١٠ - ٢}{٤}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

ع = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

م(ع، د) = ل $\sum_{ر=١}^{٤}$ هـ(سر*)

= ٢ Σ هـ(٤) + هـ(٦) + هـ(٨) + هـ(١٠)

= ٢ (٣هـ(٤)+٤ + ٣هـ(٦)+٦ + ٣هـ(٨)+٨ + ٣هـ(١٠) +١٠)

م(ع، هـ) = ٦

ل Σ هـ(سر*) = ٦

٢ Σ هـ(سر*) = ٦

Σ هـ(سر*) = ٣

= ٢(٣ Σ هـ(سر*) + ٢٨)

= ٢(٣ × ٣ + ٢٨)

= ٢(٩ + ٢٨)

= ٢(٣٧)

= ٧٤

س٤ : أوجد $\int_{1}^{5} ٣س \, ءس$

$د(س) = ٣س \quad [١ ، ٥] \quad س^*_ر = س_ر$

$ل = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٥ - ١}{ن} = \frac{٤}{ن}$

$س_ر = أ + ل ر$

$= ١ + \frac{٤}{ن} ر$

$د(س^*_ر) = ٣(١ + \frac{٤}{ن} ر)$

$= ٣ + \frac{١٢}{ن} ر$

$م(ط_ن ، د) = ل \sum د(س^*_ر)$

$= \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٣ + \frac{١٢}{ن} ر$

$= \frac{٤}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٣ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١٢}{ن} ر \right)$

$= \frac{٤}{ن} \left(٣ن + \frac{١٢}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} \right)$

$= \frac{٤}{ن} \left(٣ن + ٦ن + ٦ \right)$

$= \frac{٤}{ن} \left(٩ن + ٦ \right)$

$= ٣٦ + \frac{٢٤}{ن}$

$\int_{1}^{5} ٣س \, ءس = \lim_{ن \to \infty} م(ط_ن ، د) = \lim_{ن \to \infty} ٣٦ + \frac{٢٤}{ن}$

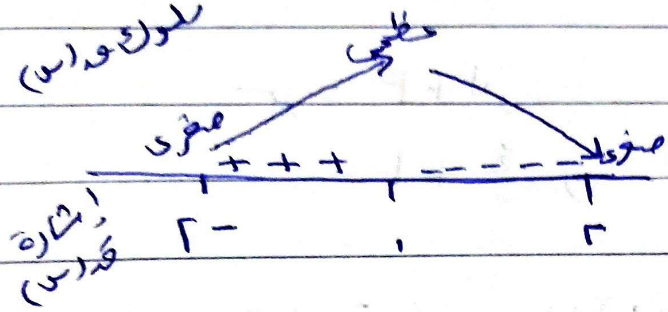
$= ٣٦$

س٥ : $\le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\ دس \le ٨$

نجد القيم القصوى المطلقة للاقتران $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$

$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}}$

$س = ٠$



عند س = -٢ قيمة صغرى مطلقة $ق(-٢) = \sqrt{٤ - ٤} = ٠$

عند س = ٠ قيمة عظمى مطلقة $ق(٠) = \sqrt{٤ - ٠} = ٢$

عند س = ٢ قيمة صغرى مطلقة $ق(٢) = \sqrt{٤ - ٤} = ٠$

$٠ \le \sqrt{٤ - س^٢} \le ٢$

$\int_{-٢}^{٢} ٠\ دس \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\ دس \le \int_{-٢}^{٢} ٢\ دس$

$٠ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\ دس \le ٢(٢ - -٢)$

$٠ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\ دس \le ٨$

س٦ : $\int_{1}^{3}$ ق(س) ء س = س^{٢} − ٢$\sqrt{س}$ ق(٤) ، قَ(٤)

ن(س) = س^{٢} − ٢$\sqrt{س}$

ق(س) = نَ(س)

= ٢س − $\frac{١}{\sqrt{س}}$

ق(٤) = ٨ − $\frac{١}{٤}$ = ٧ $\frac{٣}{٤}$

قَ(س) = ٢ + $\frac{١ \times ٢}{٢\sqrt{س} \times ٤ س}$

= ٢ + $\frac{١}{٤ س \sqrt{س}}$

قَ(٤) = ٢ + $\frac{١}{٤ \times ٤ \times ٢}$

= ٢ + $\frac{١}{٣٢}$ = $\frac{٦٥}{٣٢}$

سؤال: ق(س) =
- ٣س² + ٢جـس ، ٢ ≤ س ≤ ٣
- أس − ب ، ٣ < س ≤ ٥

هو الاقتران المكامل للاقتران هـ(س) المتصل في [٢، ٥]

(م)

ق(٢) = ٠

٨ + ٤جـ = ٠

٤جـ = − ٨

جـ = −٢

نها ق(س) (س ← ٣⁺) = نها ق(س) (س ← ٣⁻)

٣أ − ب = ١٨ + −١٢

٣أ − ب = ٦ ... (١)

هـ(س) = قَ(س) =
- ٤س + −٤ ، ٢ < س ≤ ٣
- أ ، ٣ < س ≤ ٥

قَ(٣)⁺ = قَ(٣)⁻

أ = ١٢ − ٤

أ = ٨

٣أ − ب = ٦

٢٤ − ب = ٦ ⟸ ب = ٢٤ − ٦ = ١٨

(ب) $\int_{٢}^{٤} \text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} = \text{ق}(٤) - \text{ق}(٢)$

$= ٨ \times ٤ - ١٨$

$= ٣٢ - ١٨$

$= ١٤$

س٨ :

(أ) $\int_{١}^{٢} ٥٦ (\text{س} - ٢)^{٢} (\text{س} - ١)^{٥}\, \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س} - ١$

$\text{دس} = \text{دع}$

عندما $\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ع} = ٠$

عندما $\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ع} = ١$

$\int_{٠}^{١} ٥٦ (\text{س} - ٢)^{٢}\, \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$\text{ع} = \text{س} - ١$

$\text{س} = \text{ع} + ١$

$\text{س} - ٢ = \text{ع} + ١ - ٢$

$\text{س} - ٢ = \text{ع} - ١$

$\int_{٠}^{١} ٥٦ (\text{ع} - ١)^{٢}\, \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$٥٦ \int_{٠}^{١} (\text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ١)\, \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$٥٦ \int_{٠}^{١} \text{ع}^{٧} - ٢\text{ع}^{٦} + \text{ع}^{٥}\, \text{دع}$

$٥٦ \left(\frac{\text{ع}^{٨}}{٨} - \frac{٢\text{ع}^{٧}}{٧} + \frac{\text{ع}^{٦}}{٦} \right) \Big|_{٠}^{١}$

$٥٦ \left(\frac{١}{٨} - \frac{٢}{٧} + \frac{١}{٦} - ٠ \right)$

$\frac{٥٦}{٨} - \frac{٢ \times ٥٦}{٧} + \frac{٥٦}{٦}$

$٧ - ١٦ + \frac{٥٦}{٦} = -٩ + \frac{٥٦}{٦} = \frac{-٥٤ + ٥٦}{٦}$

$= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

س٥ : ق(س) ≤ هـ(س) ∀ س ∈ [١ ، ٥]

$\int_{٧}^{٣}$ ق(س - ٢) د س ≥ $\int_{٣}^{-١}$ هـ(س + ٢) د س

ق(س) ≤ هـ(س)

$\int_{١}^{٥}$ ق(س) د س ≤ $\int_{١}^{٥}$ هـ(س) د س

نفرض ع = س - ٢

$-\int_{٥}^{١}$ ق(ع) د ع ≤ $-\int_{٥}^{١}$ هـ(ل) د ل [×-١] د س = د ع

س = ٧ ⟸ ع = ٥

س = ٣ ⟸ ع = ١

$\int_{٧}^{٣}$ ق(س - ٢) د س

= $\int_{٥}^{١}$ ق(ع) د ع

$\int_{٥}^{١}$ ق(س) د س ≥ $\int_{٥}^{١}$ هـ(س) د س

نفرض ل = س + ٢

د س = د ل

س = ٣ ⟸ ل = ٥

س = -١ ⟸ ل = ١

$\int_{٧}^{٣}$ ق(س - ٢) د س ≥ $\int_{٣}^{-١}$ هـ(س + ٢) د س

$\int_{٣}^{-١}$ هـ(س + ٢) د س = $\int_{٥}^{١}$ هـ(ل) د ل

س: ① $\int_{ه}^{ه^2} لو_ه س \; دس$

$ص = لو_ه س \qquad دع = دس$

$دص = \frac{1}{س} دس \qquad ع = س$

$س لو_ه س \Big|_{ه}^{ه^2} - \int_{ه}^{ه^2} 1 \; دس$

$(ه^2 لو_ه ه^2 - ه لو_ه ه) - س \Big|_{ه}^{ه^2}$

$(2ه^2 - ه) - (ه^2 - ه)$

$2ه^2 - ه - ه^2 + ه$

$ه^2$

④ $\int_{3}^{5} \frac{س+5}{س^2 - س} \; دس$

$\frac{س+5}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1}$

$س+5 = أ(س-1) + ب(س)$

$س = 1$

$\boxed{ب = 6}$

$س = 0$

$5 = -أ \Leftarrow \boxed{أ = -5}$

$\int_{3}^{5} \frac{-5}{س} + \frac{6}{س-1} \; دس$

$-5 لو_ه |س| + 6 لو_ه |س-1| \Big|_{3}^{5}$

$(-5 لو_ه 5 + 6 لو_ه 4) - (-5 لو_ه 3 + 6 لو_ه 2)$

$5 لو_ه \frac{3}{5} + 6 لو_ه 2$

(د) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

$\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢}(\text{س}^{٢}+١)}\ \text{ءس}$

$\int_{٠}^{٢} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\ \text{ءس}$ $\qquad \text{ع} = \text{س}^{٢} + ١$

$\int_{٠}^{٢} \text{س}\,(\text{ع})^{\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{ءع}}{٢\text{س}}$ $\qquad \text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{٢\text{س}}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٥}$ $\qquad \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ع} = ١$

$\frac{١}{٣}\,(\sqrt{\text{ع}})^{٣} \Big|_{١}^{٥}$ $\qquad \text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ع} = ٥$

$\frac{١}{٣}\,(\sqrt{٥})^{٣} - \frac{١}{٣} \times ١$

$\frac{١}{٣}\left((\sqrt{٥})^{٣} - ١\right)$

(هـ) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{ءس}$

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}}\ \text{ءس}$

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٣}\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}^{٢}}}}\ \text{ءس}$ $\qquad \text{ع} = ١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{\frac{-١\times٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}}$

$= \frac{-\text{س}^{٣}\,\text{ءع}}{٢}$

$$\int_{٢}^{\frac{٥}{٤}} \frac{١}{س^{٣}\,(ع)^{\frac{١}{٢}}} \cdot \frac{-س^{٣}\,دع}{٢}$$

$س = ١ \Leftarrow ع = ٢$

$س = ٢ \Leftarrow ع = ١ + \frac{١}{٤}$

$= \frac{٤+١}{٤} = \frac{٥}{٤}$

$$\frac{-١}{٢} \int_{٢}^{\frac{٥}{٤}} ع^{\frac{-١}{٢}}\,دع$$

$$\frac{-١}{٢} \left(٢ ع^{\frac{١}{٢}} \right) \Big|_{٢}^{\frac{٥}{٤}}$$

$$\frac{-١}{٢} \left(٢\sqrt{\frac{٥}{٤}} - ٢\sqrt{٢} \right)$$

$$\frac{-١}{٢} \left(٢\frac{\sqrt{٥}}{٢} - ٢\sqrt{٢} \right)$$

$$= \frac{-١}{٢} \left(\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٢} \right)$$

$$= \frac{-\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

س١١ :

$$\int_{١}^{٣} حا^{٢}س + هـ^{س}\,دس + \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{١}^{٣} حا^{٢}س + جتا^{٢}س + هـ^{س}\,دس$$

$$= \int_{١}^{٣} ١ + هـ^{س}\,دس$$

$$= س + هـ^{س} \Big|_{١}^{٣}$$

$$= ٣ + هـ^{٣} - (١ + هـ)$$

$$= ٣ + هـ^{٣} - ١ - هـ$$

$$= ٢ + هـ^{٣} - هـ$$

س٤١ : $ع(ن) = \begin{cases} ٥ن^{٢} & ، \ ٠ \le ن \le ٢ \\ ٢٤ - ٢ن & ، \ ٢ < ن \le ١٢ \end{cases}$

(أ) $ف(٥) = \int_{٠}^{٥} ع(ن)\, دن = \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\, دن + \int_{٢}^{٥} ٢٤ - ٢ن\, دن$

$= \frac{٥ن^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢} + ٢٤ن - ن^{٢} \Big|_{٢}^{٥}$

$= \frac{١٩٣}{٣}$ م

(ب) $ع(ن) = ٠$ عندما $٠ \le ن \le ٢$

$٥ن^{٢} = ٠$

$ن = ٠$

عندما $٢ < ن \le ١٢$

$٢٤ - ٢ن = ٠$

$٢ن = ٢٤ \Leftarrow ن = ١٢$ يتوقف الجسم عن الحركة عندما $ن = ١٢$

$ف(١٢) = \int_{٠}^{١٢} ع(ن)\, دن$

$= \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\, دن + \int_{٢}^{١٢} ٢٤ - ٢ن\, دن$

$= \frac{٣٤٠}{٣}$ وحدة مسافة

س١ : $ق'(س) = ق(س)$ ، $ق(س) \neq ٠$

(أ)

$$\int (ق(س))^{ن} \, دس$$

$ع = ق(س)$

$دس = \frac{دع}{ق'(س)}$

$\frac{دع}{ق(س)} = \frac{دع}{ع}$

$$\int ع^{ن} \frac{دع}{ع}$$

$$\int ع^{ن-١} \, دع$$

$$\frac{ع^{ن}}{ن} + ج$$

$$\frac{١}{ن} (ق(س))^{ن} + ج$$

(ب)

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = ١$$

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} \, دس = \int ١ \, دس$$

$$لو_{هـ} |ق(س)| = س + ج$$

$$|ق(س)| = هـ^{س+ج}$$

$$|ق(س)| = هـ^{س} \times هـ^{ج}$$

$(هـ^{ج} = أ)$ ثابت

$$|ق(س)| = أ \, هـ^{س}$$

$$ق(س) = \pm أ \, هـ^{س}$$

س١٦ : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{\text{س}+١}\, \text{د}\text{س} = \text{م}$

$\text{ع} = ٢\text{س}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ع}}{٢}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ع} = ٠$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow \text{ع} = \pi$

$\text{م} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جا}\,\text{ع}}{\frac{\text{ع}}{٢}+١} \times \frac{\text{د}\text{ع}}{٢}$

$\text{م} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جا}\,\text{ع}}{(\text{ع}+٢)}\, \text{د}\text{ع}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\, \text{د}\text{س}$

$\int_{0}^{\pi} \text{جتا}\,\text{س}\, (\text{س}+٢)^{-٢}\, \text{د}\text{س}$

$\text{ق} = \text{جتا}\,\text{س} \quad \text{د}\text{هـ} = (\text{س}+٢)^{-٢}\, \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{ق} = -\text{جا}\,\text{س}\, \text{د}\text{س} \quad \text{هـ} = \frac{(\text{س}+٢)^{-١}}{-١}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\, \text{د}\text{س} = \frac{-\text{جتا}\,\text{س}}{(\text{س}+٢)} \Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جا}\,\text{س}}{(\text{س}+٢)}\, \text{د}\text{س}$

$= \left(\frac{-\text{جتا}\,\pi}{(\pi+٢)} + \frac{\text{جتا}\,٠}{٢} \right) - \text{م}$

$= \frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - \text{م}$

س ١٧ :

$$\int_{1}^{3} \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} = \int_{1}^{3} \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} - \int_{1}^{3} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}} \times \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{3} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$$

$\text{ع} = \frac{1}{\text{س}}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{دع} = \frac{-1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}} \times \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \frac{1}{\text{س}} \times \text{ق}(\text{س}) \Big|_{1}^{3} + \int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}^{2}} \times \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} = \left[\frac{1}{\text{س}}\,\text{ق}(\text{س}) \Big|_{1}^{3}\right] + \int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{ق}(3) - \text{ق}(1) = 2 - 2 = 0$$

$\text{ق}(3) = 6$

$\text{ق}(1) = \frac{6}{3} = 2$

الحل الآخر :

$$\int_{1}^{3} \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} = \int_{1}^{3} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}}\right)'\,\text{دس}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}} \Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{\text{ق}(3)}{3} - \frac{\text{ق}(1)}{1}$$

$$= \frac{6}{3} - 2 = \text{صفر}$$

تمارين ص(١٧٥)

س٣ - : ق(س) = ٢س   [١ ، ن]

م (ك ن ، ق) = ٣٥ + $\frac{٢}{ن}$

ن ؟؟

$\int_{١}^{ن}$ ق(س) ءس = $\lim_{ن \to \infty}$ م(ك ن ، ق)

$\int_{١}^{ن}$ ٢س ءس = $\lim_{ن \to \infty}$ ٣٥ + $\frac{٢}{ن}$

$س^{٢} \Big|_{١}^{ن}$ = ٣٥

$ن^{٢}$ - ١ = ٣٥

$ن^{٢}$ = ٣٦

ن = ٦