الوحدة الرابعة

التكامل غير المحدود

تعريف :

إذا كان م(س) ، ق(س) اقترانين وكان $\acute{م}$(س) = ق(س) فإن
م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

ملاحظات :

١- هنالك عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)
الفرق بين أي اقترانين منها يساوي عدد ثابت
بمعنى إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)
فإن (م - هـ)(س) = جـ

٢- تسمى الصورة العامة لجميع الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) ويرمز للتكامل غير المحدود بالرمز $\int$

٣- إذا علم أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) فإنه يمكن كتابة عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) وذلك بتغيير قيمة العدد الثابت.
وكذلك يمكن إيجاد التكامل غير المحدود للاقتران ق(س) وذلك بوضع جـ مكان العدد الثابت.

٤- إذا علم التكامل غير المحدود للاقتران ق(س) فإنه يمكن كتابة عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) وذلك بوضع عدد ثابت مكان جـ

قاعدة :

المشتقة المطلوب إيجاد الصورة العامة لأصلها

الصورة العامة للاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)

$\int$ ق(س) دس = م(س) + جـ

دليل المتغير

لـ إيجاد الصورة العامة لجميع الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢$

أوجدي: ١- الصورة العامة للاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)

٢- أوجدي ثلاثة اقترانات أصلية للاقتران ق(س)

① $\int \text{ق}(\text{س})\, د\text{س} = \int (٤\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢)\, د\text{س}$

$= \text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

② $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١٠$

$+١٥$

-١٠٠

إذا كان م(س) = جا ٢س − ٤ جتا س + ٢ اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س) أوجدي

① اقترانين أصليين آخرين للاقتران ق(س)

② $\text{ق}(\frac{\pi}{٢})$ ، $\text{قَ}(\frac{\pi}{٢})$

③ $\int \text{ق}(\text{س})\, د\text{س}$

① $\text{م}_{١}(\text{س}) = \text{جا}٢\text{س} - ٤\text{جتا}\text{س} + ١٠٠$

$\text{م}_{٢}(\text{س}) = \text{جا}٢\text{س} - ٤\text{جتا}\text{س} + ٣$

② $\text{ق}(\text{س}) = \text{مَ}(\text{س}) = ٢\text{جتا}٢\text{س} + ٤\text{جا}\text{س}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = ٢\text{جتا}\pi + ٤\text{جا}\frac{\pi}{٢}$

$= -٢ + ٤ = ٢$

$\text{قَ}(\text{س}) = -٤\text{جا}٢\text{س} + ٤\text{جتا}\text{س}$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٢}) = -٤\text{جا}\pi + ٤\text{جتا}\frac{\pi}{٢} = ٠$

③ $\int \text{ق}(\text{س})\, د\text{س} = \text{م}(\text{س}) + \text{جـ}$

$= \text{جا}٢\text{س} - ٤\text{جتا}\text{س} + \text{جـ}$

إذا كان $ق(س) = جاس + هـ^{س}$

اوجدي الصورة العامة لجميع الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)

$$\int ق(س)\, دس = \int (جاس + هـ^{س})\, دس$$

$$= -جتاس + هـ^{س} + جـ \quad \tfrac{1}{2} \text{ علامة}$$

ت) إذا كان $م(س) = هـ^{جا^2س+1}$ ، $ق(س) = جا٢س\, هـ^{جا^2س+1}$

١- بيني أن م(س) اقتران أصلي لـ ق(س)

٢- أوجدي $\int ق(س)\, دس$

① $م'(س) = ٢جاس\, جتاس\, هـ^{جا^2س+1}$

$= جا٢س\, هـ^{جا^2س+1} = ق(س)$

∴ م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

② $\int ق(س)\, دس = م(س) + جـ$

$= هـ^{جا^2س+1} + جـ$

ت) إذا كان $م(س) = لو_{هـ} ظا(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2})$

أثبتي أن م(س) اقتران أصلي للاقتران $ق(س) = قاس$

$$م'(س) = \frac{قا^2(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2}) \times \frac{1}{2}}{ظا(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2})}$$

$$= \frac{1}{٢جتا^2(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2}) \times \frac{جا(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2})}{\cancel{جتا(\frac{\pi}{4} + \frac{س}{2})}}} = \frac{1}{جا(\frac{\pi}{2} + س)} = \frac{1}{جتاس} = قاس$$

$جا(\frac{\pi}{2} + س) = جتا(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - س)$

$= جتا -س$

$= جتاس$

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية يمر منحناه بالنقطة (٢، ٥) وكان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س) بحيث مَ(١) = ٥ ، مً(١) = ٧

اكتبي قاعدة ق(س)

ق(س) = أ س٢ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

ق(٢) = ٥ ⟸ ٤أ + ٢ب + جـ = ٥ ---- (١)

مَ(س) = ق(س) لأنه أصلي

مَ(١) = ق(١) = ٥

ق(١) = أ + ب + جـ = ٥ ---- (٢)

مً(١) = قَ(١) = ٧

قَ(س) = ٢أ س + ب

قَ(١) = ٢أ + ب = ٧ ---- (٣)

٤أ + ٢ب + جـ = ٥

أ + ب + جـ = ٥ (−)

٣أ + ب = ٠

٢أ + ب = ٧

أ = −٧

٢أ + ب = ٧

−١٤ + ب = ٧ ⟸ ب = ٢١

أ + ب + جـ = ٥

−٧ + ٢١ + جـ = ٥ ⟸ جـ = −٩

ق(س) = −٧س٢ + ٢١س − ٩

إذا كان ق(س) = ٧ بيّني أن جميع الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) هي مستقيمات متوازية

م(س) = ∫ ق(س) دس

= ∫ ٧ دس = ٧س + ج

∴ جميع الاقترانات الأصلية هي مستقيمات ميلها = ٧

∴ هي مستقيمات متوازية

إذا كان م(س) = ٢ ظتاس − ٢ قتاس اقتران أصلي للاقتران ق(س) = ٢أ / (١+جتاس)

حيث س ∈ [π/٤ ، π/٢] ، أوجدي قيمة أ

م′(س) = ق(س)

م′(س) = −٢ قتا²س + ٢ قتاس ظتاس

−٢ قتا²س + ٢ قتاس ظتاس = ٢أ / (١+جتاس)

−٢ / جا²س + ٢جتاس / (جاس جاس) = ٢أ / (١+جتاس)

−٢ / جا²س + ٢جتاس / جا²س = ٢أ / (١+جتاس)

(−٢+٢جتاس) / جا²س = ٢أ / (١+جتاس)

٢(−١+جتاس) / جا²س = ٢أ / (١+جتاس)

(جتاس −١)(١+جتاس) = ~~٢~~أ جا²س

جتا²س − ١ = أ جا²س

− ~~جا²س~~ = أ ~~جا²س~~

$\boxed{أ = -1}$

~~٢~~(جتاس − ١) / (١ − جتا²س) = ~~٢~~أ / (١+جتاس)

(جتاس − ١)$^{-1}$ / ((١ − جتاس)(١+جتاس)) = أ / (١+جتاس)

$\boxed{أ = -1}$

إذا كان م(س) ، ل(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)

وكان ق(٢) = ٥ ، قَ(٢) = -٣

أوجد ما يلي:

① $\frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{م} - \text{ل})(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢}$

$= \text{مَ}(\text{س}) - \text{لَ}(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢}$

$= \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢} = ٠$

② $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(٥\text{م}(\text{س}) - ٢\text{ل}(\text{س})\right) \Big|_{\text{س}=٢}$

$= ٥\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{ق}(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢}$

$= ٣\text{ق}(٢)$

$= ٣ \times ٥ = ١٥$

③ $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(٥\text{ل}(\text{س}) - ٢\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^٢\right) \Big|_{\text{س}=٢}$

$= ٥\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{قَ}(\text{س}) + ٢\text{س} \Big|_{\text{س}=٢}$

$= ٥\text{ق}(٢) - ٢\text{قَ}(٢) + ٤$

$= ٥(٥) - ٢(-٣) + ٤$

$= ٢٥ + ٦ + ٤ = ٣٥$

④ $\left(٧\text{م}(\text{س}) - ٢\text{ل}(\text{س})\right)'' \Big|_{\text{س}=٢}$

$٧\text{م}''(\text{س}) - ٢\text{ل}''(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢}$

$٧\text{قَ}(\text{س}) - ٢\text{قَ}(\text{س}) \Big|_{\text{س}=٢}$

$٧\text{قَ}(٢) - ٢\text{قَ}(٢)$

$(٧ \times -٣) - (٢ \times -٣)$

$-٢١ + ٦ = -١٥$

//

$\left(٧\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{ق}(\text{س})\right)' \Big|_{\text{س}=٢}$

$\left(٥\text{ق}(\text{س})\right)' \Big|_{\text{س}=٢}$

$٥\text{قَ}(٢)$

$= ٥(-٣)$

$= -١٥$

إذا كان $\int$ د(س) دس = جتا ٢س + جا س + ج

أوجدي د(π) ، دَ(π)

$\frac{د}{دس}\left(\int د(س)\,دس\right) =$ د(س)

نشتق الطرفين

د(س) = −٢جا٢س + جتا س

د(π) = −٢ جا ٢π + جتا π

= ٠ + −١ = −١

دَ(س) = −٤جتا٢س − جا س

دَ(π) = −٤ جتا ٢π − جا π

= −٤

إذا كان $\int$ س² د(س) دس = س⁵ + هـ^س + ج

أوجدي د(٢) ، دَ(٢)

نشتق الطرفين

$\left.س^2\, د(س) = ٥س^4 + هـ^{س}\right|_{س=٢}$

٤د(٢) = ٨٠ + هـ²

د(٢) = ٢٠ + $\frac{هـ^2}{٤}$

نشتق الطرفين

$\left.س^2\, دَ(س) + د(س) \times ٢س = ٢٠س^3 + هـ^{س}\right|_{س=٢}$

٤دَ(٢) + ٤د(٢) = ١٦٠ + هـ²

٤دَ(٢) + ٨٠ + $\cancel{هـ^2}$ = ١٦٠ + $\cancel{هـ^2}$

دَ(٢) = $\frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠

إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int (\text{جتا}٢\text{س} + \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

أوجدي $\text{قَ}(\pi)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}٢\text{س} + \text{س}^{٢}$

$\text{قَ}(\text{س}) = -٢\,\text{جا}٢\text{س} + ٢\text{س}$

$\text{قَ}(\pi) = -٢\,\text{جا}٢\pi + ٢\pi$

$= ٠ + ٢\pi$

$= ٢\pi$

أوجدي $\int (\text{س}\,\text{قَ}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}\,\text{ق}(\text{س}))'\,\text{دس}$

$= \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$

$\int \left(\dfrac{\text{س}^{٢}\,\text{قَ}(\text{س}) - ٢\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٤}}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\right)'\,\text{دس}$

$= \dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

قواعد التكامل غير المحدود

① $\int \text{أ}\, \text{د}\text{س} = \text{أ}\text{س} + \text{ج}$

أوجدي التكاملات التالية:

1- $\int 5\, \text{د}\text{س} = 5\text{س} + \text{ج}$

2- $\int -3\, \text{د}\text{س} = -3\text{س} + \text{ج}$

3- $\int \frac{1}{2}\, \text{د}\text{ع} = \frac{1}{2}\text{ع} + \text{ج}$

4- $\int \pi\, \text{د}\text{ع} = \pi\text{ع} + \text{ج}$

5- $\int \text{د}\text{س} = \text{س} + \text{ج}$

6- $\int -\text{د}\text{ل} = -\text{ل} + \text{ج}$

7- $\int \text{ظا}\,\text{ص}\; \text{د}\text{س} = (\text{ظا}\,\text{ص})\text{س} + \text{ج}$

8- $\int \left(\frac{\text{ع}^2 + 1}{\sqrt[3]{\text{ع}^2 + 5\text{ع} + 2}} \right) \text{د}\text{س}$

$= \left(\frac{\text{ع}^2 + 1}{\sqrt[3]{\text{ع}^2 + 5\text{ع} + 2}} \right) \text{س} + \text{ج}$

② $\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ج}$ $\qquad \text{ن} \neq -1$

أوجدي التكاملات التالية:

1- $\int \text{س}^5\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^6}{6} + \text{ج}$

2- $\int \text{س}^{-3}\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{ج}$

3- $\int \text{س}^{\frac{2}{5}}\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{ج} = \frac{5}{7}\text{س}^{\frac{7}{5}} + \text{ج}$

4- $\int \text{س}^{-\frac{2}{3}}\, \text{د}\text{س} = 3\text{س}^{\frac{1}{3}} + \text{ج}$

5- $\int 7\text{ع}^{\frac{3}{4}}\, \text{د}\text{ع} = 7 \times \frac{4}{7} \text{ع}^{\frac{7}{4}} + \text{ج}$

$= 4\text{ع}^{\frac{7}{4}} + \text{ج}$

٦- $\int (٥س^{٤} - ٦س^{٢} + ٧)\, دس$

$= \frac{٥س^{٥}}{٥} - \frac{٦س^{٣}}{٣} + ٧س + ج$

$= س^{٥} - ٢س^{٣} + ٧س + ج$

٧- $\int (٣س^{-٥} + ٢س + ٤)\, دس$

$= \frac{٣س^{-٤}}{-٤} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٤س + ج$

ملاحظات:

* يمكن إيجاد تكاملات حاصل جمع أو طرح حدود جبرية مرفوعة لأي قوة لا تساوي -١

* إذا كانت العمليات الحسابية بين الحدود الجبرية ضرب أو قسمة نستطيع تحويلها إلى جمع أو طرح ثم نكامل على هذه القاعدة

خصائص التكامل غير المحدود:

① $\int أ\, ق(س)\, دس = أ \int ق(س)\, دس$

② $\int (ق \pm هـ)(س)\, دس = \int ق(س)\, دس \pm \int هـ(س)\, دس$

أوجدي التكاملات التالية:

① $\int (٤س^{٥} - ٣س^{-٢} + ٢)\, دس = \frac{٤س^{٦}}{٦} - \frac{٣س^{-١}}{-١} + ٢س + ج$

$= \frac{٢}{٣} س^{٦} + ٣س^{-١} + ٢س + ج$

② $\int (\frac{٣}{س^{٣}} + \sqrt[٥]{س^{٢}} - ٢)\, دس$

$= \int (٣س^{-٣} + س^{\frac{٢}{٥}} - ٢)\, دس$

$= \frac{٣س^{-٢}}{-٢} + \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} - ٢س + ج$

$= \frac{-٣}{٢س^{٢}} + \frac{٥}{٧} \sqrt[٥]{س^{٧}} - ٢س + ج$

③ $\int (س^{2}\sqrt{س} + \frac{5}{\sqrt{س}})\, د س = \int (س^{2} \times س^{\frac{1}{2}} + 5 س^{-\frac{1}{2}})\, د س$

$= \int (س^{\frac{5}{2}} + 5 س^{-\frac{1}{2}})\, د س$

$= 5 \times 2\, س^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{7} س^{\frac{7}{2}} + ث$

$= 10\sqrt{س} + \frac{2}{7}\sqrt{س^{7}} + ث$

④ $\int (س^{2} + 3)^{2} (2س)\, د س = \int (س^{4} + 6س^{2} + 9)(2س)\, د س$

$= \int (2س^{5} + 12س^{3} + 18س)\, د س$

$= \frac{2س^{6}}{6} + \frac{12 س^{4}}{4} + \frac{18س^{2}}{2} + ث$

$= \frac{1}{3} س^{6} + 3 س^{4} + 9 س^{2} + ث$

⑤ $\int (س^{2} + \frac{1}{س^{2}})^{2}\, د س = \int (س^{4} + 2 + \frac{1}{س^{4}})\, د س$

$= \int (س^{4} + 2 + س^{-4})\, د س$

$= \frac{س^{5}}{5} + 2س + \frac{س^{-3}}{-3} + ث$

$= \frac{1}{5} س^{5} + 2س - \frac{1}{3 س^{3}} + ث$

⑥ $\int \sqrt{ع^٤ + ١٠ع^٢ + ٢٥}\ ءع = \int \sqrt{(ع^٢+٥)(ع^٢+٥)}\ ءع$

$= \int \sqrt{(ع^٢+٥)^٢}\ ءع$

$= \int |ع^٢+٥|\ ءع$

$= \int (ع^٢+٥)\, ءع$ لأن $ع^٢+٥ > ٠$

$= \frac{ع^٣}{٣} + ٥ع + ث$

⑦ $\int \sqrt{س^٢ + \frac{١}{س^٢} + ٢}\ ءس$

$= \int \sqrt{س^٢ + ٢ + \frac{١}{س^٢}}\ ءس$

$\int \sqrt{(س + \frac{١}{س})(س + \frac{١}{س})}\ ءس$

$\int \sqrt{(س + \frac{١}{س})^٢}\ ءس$

$\int (س + س^{-٢})\ ءس$

$\frac{س^٢}{٢} + \frac{س^{-١}}{-١} + ث$

$\frac{س^٢}{٢} - \frac{١}{س} + ث$

⑧ $$\int \left(\frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}\right) \text{ءس}$$

$$\int \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}} \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س} + \text{ث}$$

⑨ $$\int \left(\frac{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٨}{\sqrt{\text{س}} - ٤}\right) \text{ءس}$$

$$\int \frac{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٤)}(\sqrt{\text{س}} + ٢)}{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٤)}} \text{ءس}$$

$$\int (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٢) \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س} + \text{ث}$$

⑩ $$\int \left(\frac{\text{س}^{٥} - ٣\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}\left(\text{س}^{٣} - ٣ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)}{\cancel{\text{س}^{٢}}} \text{ءس}$$

$$= \int (\text{س}^{٣} - ٣ + ٢\text{س}^{-٢}) \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٣\text{س} + \frac{٢\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ث}$$

$$\Rightarrow \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٣\text{س} - \frac{٢}{\text{س}} + \text{ث}$$

قواعد التكامل للاقترانات المثلثية :

① $\int$ جاس دس = -جتاس + ج

② $\int$ جتاس دس = جاس + ج

③ $\int$ قا^{2}س دس = ظاس + ج

④ $\int$ قتا^{2}س دس = -ظتاس + ج

⑤ $\int$ قاس ظاس دس = قاس + ج

⑥ $\int$ قتاس ظتاس دس = -قتاس + ج

ملاحظة :

$\int$ جتا (أس + ب) دس = $\frac{1}{أ}$ جا (أس + ب) + ج

وتعمم هذه الملاحظة لجميع الاقترانات الدائرية السابقة

أوجدي التكاملات التالية :

① $\int$(جتاس + قا^2 ٢س) دس

= جاس + $\frac{1}{2}$ ظا٢س + ج

③ $\int$(قتا (٢س+١) ظتا (٢س+١) + ٣س) دس

= $-\frac{1}{2}$ قتا (٢س+١) + $\frac{3س^2}{2}$ + ج

③ $\int$ ($\frac{٥}{\text{جتا٢س ظتا٢س}}$ + قتا²٥س) دس

= $\int$ (٥ قا٢س ظا٢س + قتا²٥س) دس

= $\frac{٥}{٢}$ قا٢س − $\frac{١}{٥}$ ظتا٥س + جـ

④ $\int$ ($\frac{\text{جاس}}{\text{جتا²س}}$) دس

$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس × جتاس}}$

ظاس قاس

$\int$ (ظاس قاس) دس

= قاس + جـ

⑤ $\int$ (جا(٤−٢س) + جتا٨س) دس

= $\frac{١}{٢}$ جتا(٤−٢س) + $\frac{١}{٨}$ جا٨س + جـ

ملاحظة: يمكن استخدام المتطابقات التالية في إيجاد تكاملات الاقترانات الدائرية:

① جتا²س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

② جا²س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

③ ظا²س = قا²س − ١

④ ظتا²س = قتا²س − ١

⑤ جاس جتاس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

⑥ $\int (\text{ظا}^2 ٣\text{س} + \text{جتا}^2 \frac{١}{٢}\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{قا}^2 ٣\text{س} - ١) + (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا س})\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{قا}^2 ٣\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جتا س} - \frac{١}{٢})\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{١}{٣}\text{ظا}\, ٣\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جا س} - \frac{١}{٢}\text{س} + \text{جـ}$

⑦ $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^2\, \text{ء}\text{س}$

$\int (\text{جا}^2\text{س} + ٢\,\text{جا س جتا س} + \text{جتا}^2\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$\int (١ + ٢\,\text{جا س جتا س})\, \text{ء}\text{س}$

$\int (١ + \text{جا}\,٢\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$\text{س} + \frac{-١}{٢}\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$

⑧ $\int (\frac{١}{\text{ظا}^2(٥-\text{س})} + ٤\,\text{جا}\,٢\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$\int (\text{ظتا}^2(٥-\text{س}) + ٤\,\text{جا}\,٢\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$\int (\text{قتا}^2(٥-\text{س}) - ١ + ٤\,\text{جا}\,٢\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$= +\,\text{ظتا}(٥-\text{س}) - \text{س} - ٢\,\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$

$$\text{⑨}\quad \int \left(\frac{\text{جتا}\,2\text{س}}{\text{جتاس} - \text{جاس}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتاس} - \text{جاس}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}\,(\text{جتاس} + \text{جاس})}{\cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}} \,\text{ءس}$$

$$= \text{جاس} - \text{جتاس} + \text{ث}$$

$$\text{⑩}\quad \int \left(\frac{1 + \text{جا}\,2\text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\cancel{(\text{جاس} + \text{جتاس})}\,(\text{جاس} + \text{جتاس})}{\cancel{(\text{جاس} + \text{جتاس})}} \,\text{ءس}$$

$$= -\text{جتاس} + \text{جاس} + \text{ث}$$

(١١) $\int \sqrt{١ + \text{جا}٢\text{س}} \; \text{ءس} \quad , \quad \text{س} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$$\int \sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}} \; \text{ءس}$$

$$\int \sqrt{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}} \; \text{ءس}$$

$$\int |\text{جاس} + \text{جتاس}| \; \text{ءس} = \int (\text{جاس} + \text{جتاس}) \; \text{ءس}$$

$$= -\text{جتاس} + \text{جاس} + \text{ث}$$

جاس ، جتاس
في الربع الأول (+)

ث**

$١ + \text{جاس}$

$\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س}\,\text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س}$

(١٢) $\int \sqrt{١ + \text{جاس}} \; \text{ءس} \quad , \quad \text{س} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$$\int \sqrt{\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س}\,\text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س}} \; \text{ءس}$$

$$\int \sqrt{(\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س})^{٢}} \; \text{ءس}$$

$$\int |\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س}| \; \text{ءس}$$

$$\int (\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س}) \; \text{ءس}$$

$$-٢\,\text{جتا}\frac{١}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{ث}$$

بنختار المناسب
$1 - 2\,\text{جا}^2 س$
$2\,\text{جتا}^2 س - 1$
لو كان -1 اخترنا الأولى

(١٣) $\int \sqrt{\text{جتا}\, س + 1}\ \text{ء}س \qquad س \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

$= \int \sqrt{2\,\text{جتا}^2 \frac{1}{2} س - 1 + 1}\ \text{ء}س$

$= \int \sqrt{2}\ \sqrt{\text{جتا}^2 \frac{1}{2} س}\ \text{ء}س$

$= \sqrt{2} \int \left|\text{جتا}\, \frac{1}{2} س\right| \text{ء}س$

$= \sqrt{2} \int \text{جتا}\, \frac{1}{2} س\ \text{ء}س$

$= 2\sqrt{2}\ \text{جا}\, \frac{1}{2} س + \text{ث}$

نستخدم
$1 - 2\,\text{جا}^2 س$

(١٤) $\int \sqrt{1 - \text{جتا}\, 2س}\ \text{ء}س \qquad س \in]0 , \frac{\pi}{4}[$

$\int \sqrt{1 - (1 - 2\,\text{جا}^2 س)}\ \text{ء}س$

$\int \sqrt{1 - 1 + 2\,\text{جا}^2 س}\ \text{ء}س$

$\int \sqrt{2}\ \sqrt{\text{جا}^2 س}\ \text{ء}س$

$\sqrt{2} \int |\text{جا}\, س|\ \text{ء}س$

$= -\sqrt{2}\ \text{جتا}\, س + \text{ث}$

* مهم *

(15)
$$\int \frac{\text{ءس}}{1-\text{جاس}} \times \frac{1+\text{جاس}}{1+\text{جاس}}$$

$$= \int \left(\frac{1+\text{جاس}}{1-\text{جا}^2\text{س}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس قاس}\right) \text{ءس}$$

$$= \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{ث}$$

(16)
$$\int \frac{3}{\text{جتاس}+1} \,\text{ءس} \times \frac{\text{جتاس}-1}{\text{جتاس}-1}$$

$$= 3\int \left(\frac{\text{جتاس}-1}{\text{جتا}^2\text{س}-1}\right) \text{ءس}$$

$$= 3\int \frac{\text{جتاس}-1}{-\text{جا}^2\text{س}} \,\text{ءس}$$

$$= -3\int \left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\right) \text{ءس}$$

$$= -3\int \left(\text{ظتاس قتاس} - \text{قتا}^2\text{س}\right) \text{ءس}$$

$$= -3\left(-\text{قتاس} + \text{ظتاس}\right) + \text{ث}$$

١) $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{جـ}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \left(\frac{1}{\text{س}}\right) \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

$\int \left(\frac{\text{ك}}{\text{أس}+\text{ب}}\right) \text{ءس} = \frac{\text{ك}}{\text{أ}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{أس}+\text{ب}| + \text{جـ}$

أوجدي التكاملات التالية:

١) $\int (2\text{س} + \text{هـ}^{4\text{س}+1})\ \text{ءس}$

$= \text{س}^2 + \frac{1}{4}\ \text{هـ}^{4\text{س}+1} + \text{جـ}$

٢) $\int \left(\frac{5}{3\text{س}+2} + 4\text{هـ}^{2\text{س}+1}\right) \text{ءس}$

$= \frac{5}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |3\text{س}+2| + 2\ \text{هـ}^{2\text{س}+1} + \text{جـ}$

٣) $\int \left(\frac{3}{\text{س}} + \frac{2}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{\text{س}^2}\right) \text{ءس}$

$\int \left(\frac{3}{\text{س}} + 2\text{س}^{-\frac{1}{2}} + \text{س}^{-2}\right) \text{ءس}$

$= 3\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + 2 \times \frac{2}{1}\ \text{س}^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

$= 3\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + 4\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

④ $\int \left(\dfrac{س+٣}{س^{٢}-٩} \right) ء س$

$\int \dfrac{\cancel{(س+٣)}^{\,١}}{(س-٣)\cancel{(س+٣)}} ء س$

$= لو_{هـ} |س-٢| + جـ$

بنقسم القوة اللي جوا على اللي برا

⑤ $\int \sqrt[٣]{هـ^{٦س-١٢}}\; ء س$

$= \int \left(هـ^{٢س-٤} \right) ء س$

$= \dfrac{١}{٢} هـ^{٢س-٤} + جـ$

⑥ $\int \left(هـ^{س^{٢}+٣س-٢} \times هـ^{٥-س-س^{٢}} \right) ء س$

$\int \left(هـ^{٢س+٣} \right) ء س$

$= \dfrac{١}{٢} هـ^{٢س+٣} + جـ$

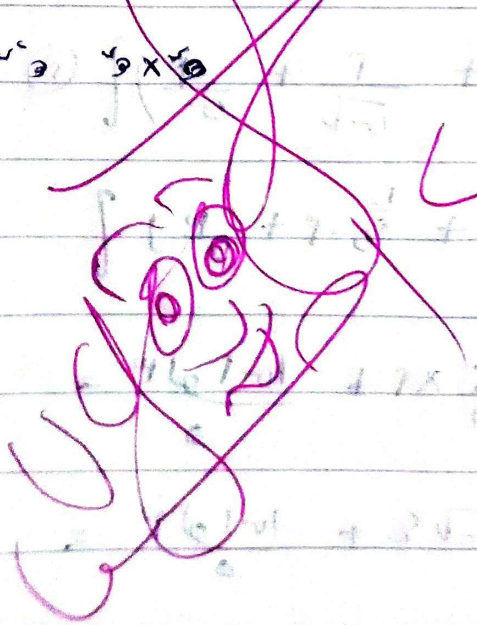
$هـ^{س} \times هـ^{س}$ $هـ^{٢س}$

⑦ $\int \left(\dfrac{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٦}{هـ^{س} - ٣} \right) ء س$

$\int \dfrac{(هـ^{س}+٢)\cancel{(هـ^{س}-٣)}}{\cancel{(هـ^{س}-٣)}} ء س$

$\int (هـ^{س}+٢) ء س$

$هـ^{س} + ٢س + جـ$



(٨)

$$\int \left(\frac{\left[هـ^{٢س+٣} \right]^{٢}}{هـ^{٣س-٢}} \right) د س$$

$$= \int \left(\frac{هـ^{٤س+٦}}{هـ^{٣س-٢}} \right) د س$$

$$= \int هـ^{س+٨} \, د س$$

$$= هـ^{س+٨} + ث$$

الدرس الثالث

التطبيقات الهندسية والفيزيائية للتكامل غير المحدود

أولاً: التطبيقات الهندسية:

تعريف: إذا كان ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند أي نقطة هو

$\text{م} = \text{قَ(س)}$ فإن $\int \text{قَ(س)}\ \text{دس} = \text{ق(س)} + \text{جـ}$

ثم نجد قيمة جـ من خلال المعطيات الواردة في السؤال.

ملاحظة: $\int \text{قَ(س)}\ \text{دس} = \text{ق(س)} + \text{جـ}$

إذا كان ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة هو

$\text{م} = ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥$ ، اكتب قاعدة ق(س) علماً أن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (−١ ، ٣)

$\text{ق(س)} = \int \text{قَ(س)}\ \text{دس}$

$= \int (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥)\ \text{دس}$

$= \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \text{جـ}$ لكن $\text{ق}(-١) = ٣$

$\text{ق}(-١) = -١ + ٢ + ٥ + \text{جـ} = ٣$

$\text{جـ} = -٣$

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٣$

إذا كان ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند أي نقطة $\text{م} = \text{جتا}٢\text{س} + \text{جا س}$

اكتب قاعدة الاقتران ق(س) علماً أن منحنى ق(س) يقطع محور السينات

عندما $\text{س} = \pi$

ق(س) = ∫ قَ(س) دس = ∫(جتا٢س + جاس) دس

= $\frac{1}{2}$ جا٢س − جتاس + جـ   لكن ق(π) = ٠

ق(π) = $\frac{1}{2}$ جا٢π − جتاπ + جـ = ٠

١ + جـ = ٠ ⇐ جـ = −١

ق(س) = $\frac{1}{2}$ جا٢س − جتاس − ١

إذا كان قً(س) = ٦س − ٢ وكان للمنحنى ق(س) نقطة حرجة هي (٢، ٥)

اكتبي قاعدة ق(س)

ق(٢) = ٥   قَ(٢) = ٠

قَ(س) = ∫ قً(س) دس

= ∫(٦س − ٢) دس

قَ(س) = ٣س² − ~~٢~~٢س + جـ١

قَ(٢) = ١٢ − ٤ + جـ١ = ٠

جـ١ = −٨

قَ(س) = ٣س² − ٢س − ٨

ق(س) = ∫ قَ(س) دس

= ∫(٣س² − ٢س − ٨) دس

ق(س) = س³ − س² − ٨س + جـ

ق(٢) = ٨ − ٤ − ١٦ + جـ = ٥

جـ = ١٧   ق(س) = س³ − س² − ٨س + ١٧

إذا كان قً(س) = -١٢س وكانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند س = ٢ هي ص = ٢س - ٣ ، اكتبي قاعدة ق(س)

ص = ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = م = ٢

قَ(س) = ∫ قً(س) دس = ∫ -١٢س دس

قَ(س) = -٦س^{٢} + جـ

قَ(٢) = -٢٤ + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٢٦

قَ(س) = -٦س^{٢} + ٢٦

ق(س) = ∫ (-٦س^{٢} + ٢٦) دس

= -٢س^{٣} + ٢٦س + جـ

ق(٢) = -١٦ + ٥٢ + جـ = ١ ⟸ جـ = -٣٥

ق(س) = -٢س^{٣} + ٢٦س - ٣٥

إذا كان قً(س) = ٤ - ٦س وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطتين (١، ٢) (-١، ٩)
اكتبي قاعدة ق(س)

قَ(س) = ∫ (٤ - ٦س) دس

= ٤س - ٣س^{٢} + جـ$_{١}$

ق(س) = ∫ (٤س - ٣س^{٢} + جـ$_{١}$) دس

= ٢س^{٢} - س^{٣} + جـ$_{١}$س + جـ

ق(١) = ٢ - ١ + جـ$_{١}$ + جـ = ٣

جـ$_{١}$ + جـ = ٢ ... (١)

ق(-١) = ٨ + ٨ - ~~...~~ ٢جـ$_{١}$ + جـ = ٩

-٢جـ$_{١}$ + جـ = ٧

جـ$_{١}$ + جـ = ٢ (٢)

-٣جـ = -٩

$\boxed{\text{جـ}_{١} = ٣}$

جـ + جـ$_{١}$ = ٢

جـ + ٣ = ٢

جـ = -١

ق(س) = ٢س^{٢} - س^{٣} + ٣س - ١

ثانياً : التطبيقات الفيزيائية للتكامل غير المحدود

تعريف : إذا تحرك جسيم في خط مستقيم وكان بعده عن نقطة الانطلاق = ف(ن) وكانت سرعته اللحظية ع(ن) وتسارعه اللحظي ت(ن) فإن

① $\int \text{ع}(\text{ن})\, \text{د}\text{ن} = \text{ف}(\text{ن}) + \text{جـ}$

② $\int \text{ت}(\text{ن})\, \text{د}\text{ن} = \text{ع}(\text{ن}) + \text{جـ}$

يتحرك جسيم في خط مستقيم وكان تسارع هذا الجسيم في أي لحظة هو ت(ن) = ١٢ن − ٢ فإذا كانت سرعة الجسم بعد ثانيتين = ٧ وحدات سرعة وإزاحته بعد ثانية واحدة = ١٠ وحدات أوجدي إزاحة هذا الجسم في أي لحظة

$\text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن})\, \text{د}\text{ن}$

$= \int (١٢\text{ن} - ٢)\, \text{د}\text{ن}$

$= ٦\text{ن}^{٢} - ٢\text{ن} + \text{جـ}_{١}$ لكن $\text{ع}(٢) = ٧$

$\text{ع}(٢) = ٢٤ - ٤ + \text{جـ}_{١} = ٧$

$\therefore \text{جـ}_{١} = -١٣$

$\text{ع}(\text{ن}) = ٦\text{ن}^{٢} - ٢\text{ن} - ١٣$

$\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{د}\text{ن}$

$= \int (٦\text{ن}^{٢} - ٢\text{ن} - ١٣)\, \text{د}\text{ن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = ٢\text{ن}^{٣} - \text{ن}^{٢} - ١٣\text{ن} + \text{جـ}$ لكن $\text{ف}(١) = ١٠$

$٢ - ١ - ١٣ + \text{جـ} = ١٠$

$\text{جـ} = ٢٢$

$\text{ف}(\text{ن}) = ٢\text{ن}^{٣} - \text{ن}^{٢} - ١٣\text{ن} + ٢٢$

ع(٠) = ٠

يتحرك جسم من السكون فإذا كان تسارعه في أي لحظة هو ت(ن) = جتا ن − جا ٢ن ، فإذا كان بعده عن نقطة الانطلاق عندما ن = $\frac{\pi}{٢}$ تساوي ١٠ وحدات أوجد ف(π)

ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن

= $\int$ (جتا ن − جا ٢ن) دن

= جا ن + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ن + جـ   لكن تحرك الجسم من السكون

⇐ ع(٠) = ٠ ∴

ع(٠) = جا ٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٠ + جـ١ = ٠

جـ١ = − $\frac{١}{٢}$

ع(ن) = جا ن + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ن − $\frac{١}{٢}$

ف(ن) = $\int$ (جا ن + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ن − $\frac{١}{٢}$) دن

= − جتا ن + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ن − $\frac{١}{٢}$ ن + جـ   لكن ف($\frac{\pi}{٢}$) = ١٠

− جتا $\frac{\pi}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ جا π − $\frac{\pi}{٤}$ + جـ = ١٠

جـ = ١٠ + $\frac{\pi}{٤}$

ف(ن) = − جتا ن + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ن − $\frac{١}{٢}$ ن + ١٠ + $\frac{\pi}{٤}$

ف(π) = − جتا π + $\frac{١}{٤}$ جا ٢π − $\frac{١}{٢}$ π + ١٠ + $\frac{\pi}{٤}$

= −١ + ٠ − $\frac{\pi}{٢}$ + ١٠ + $\frac{\pi}{٤}$

= ٩ − $\frac{\pi}{٤}$

قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض فإذا كان سرعة هذا الجسم بعد ٣ ث تساوي ٤٠ م/ث ، فإذا كان تسارع هذا الجسم في أي لحظة = -٣٢ م/ث² ، أوجد ارتفاع هذا الجسم بعد ٣ ث.

ع(ن) = ∫ -٣٢ دن

= -٣٢ن + جـ١   لكن ع(٣) = ٤٠

-٩٦ + جـ١ = ٤٠

جـ١ = ١٣٦

ع(ن) = -٣٢ن + ١٣٦

ف(ن) = ∫(-٣٢ن + ١٣٦) دن

= -١٦ن² + ١٣٦ن + جـ   لكن ف(٠) = ٠

جـ = ٠

ف(ن) = -١٦ن² + ١٣٦ن

ف(٣) = -١٦×٩ + ١٣٦×٣

= -١٤٤ + ٤٠٨

= ٢٦٤

قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح برج يرتفع ٥٠م عن سطح الأرض فإذا كانت السرعة الابتدائية = ٦٤ وحدة (م/ث) وتسارعه اللحظي = -٣٢ م/ث² أوجد ارتفاع الجسم عن سطح الأرض في أي لحظة

ع(ن) = ∫ -٣٢ دن

= -٣٢ن + جـ١   لكن ع(٠) = ٦٤

جـ١ = ٦٤

ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤

ف(ن) = ∫ (-٣٢ن + ٦٤) ءن

= -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ج

ارتفاع الجسم عن سطح البرج ← ف(٠) = ٠

ارتفاع الجسم عن سطح الأرض ← ف(٠) = ارتفاع البرج

ف(٠) = ٥٠

لأن المطلوب ارتفاع الجسم عن سطح الأرض

ج = ٥٠

ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٥٠

طرق التكامل

أولاً : التكامل بالتعويض

ملاحظة : يستخدم التكامل بالتعويض عادةً لإيجاد تكاملات حاصل ضرب أو قسمة اقترانين أحدهما مرفوع لقوة ويكون مشتقته = الاقتران الآخر أو من مضاعفاته أو من نفس النوع

نفرض هذا الاقتران ع ثم نجد قيمة دس حيث $\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{م. الفرض}}$

ثم نجري التكامل المطلوب بدلالة ع

① $\int (2\text{س}+1)\underbrace{(\text{س}^2+\text{س}+5)}_{\text{ع}}{}^{10}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ع} = \text{س}^2+\text{س}+5$

$\dfrac{\text{دع}}{\text{دس}} = (2\text{س}+1)$

$\text{دع} = (2\text{س}+1)\ \text{دس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{(2\text{س}+1)}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{م. الفرض}}$

$\int (2\text{س}+1)\ \text{ع}^{10}\ \text{دس}$

$\int \cancel{(2\text{س}+1)}\ \text{ع}^{10}\ \dfrac{\text{دع}}{\cancel{(2\text{س}+1)}}$

$= \dfrac{\text{ع}^{11}}{11} + \text{جـ}$

$= \dfrac{1}{11}(\text{س}^2+\text{س}+5)^{11} + \text{جـ}$

(٥) $\int \frac{٣ - ٢س}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٣س + ٥}}\, دس$ الحصة ١٣

نفرض $ع = س^٢ - ٣س + ٥$

$دس = \frac{دع}{٢س - ٣}$

$= \int (٣ - ٢س)(س^٢ - ٣س + ٥)^{-\frac{١}{٣}}\, دس$

$= \int \cancel{(٣ - ٢س)}^{-١}\,(ع)^{-\frac{١}{٣}} \times \frac{دع}{\cancel{(٢س - ٣)}}$

$= -\frac{٣}{٢}\, ع^{\frac{٢}{٣}} + ث$

$= -\frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{(س^٢ - ٣س + ٥)^٢} + ث$

(٦) $\int (س - ٣)(س^٢ - ٦س + ١)^٧\, دس$ ، $ع = س^٢ - ٦س + ١$

$دس = \frac{دع}{٢س - ٦} = \frac{دع}{٢(س - ٣)}$

$= \int \cancel{(س - ٣)}\, ع^٧\, \frac{دع}{٢\cancel{(س - ٣)}}$

$= \frac{١}{٢}\, \frac{ع^٨}{٨} + ث = \frac{١}{١٦}(س^٢ - ٦س + ١)^٨ + ث$

(٤) $\int \frac{\text{٥جا٢س}}{(\text{٣}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٥}}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{٣} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{٢جتاس جاس}}$

$\int \text{٥جا٢س}\,(\text{٣}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})^{-\text{٥}}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{دع}}{-\text{جا٢س}}$

$\int \text{٥جا٢س}\,(\text{ع})^{-\text{٥}}\,\frac{\text{دع}}{-\text{جا٢س}}$

$= \frac{-\text{٥ع}^{-\text{٤}}}{-\text{٤}} + \text{ث}$

$= \frac{\text{٥}}{\text{٤}(\text{٣}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٤}}} + \text{ث}$

(٥) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{(\text{٤}+\text{هـ}^{\text{٢س}})^{\text{٥}}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\,(\text{٤}+\text{هـ}^{\text{٢س}})^{-\text{٥}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{٤} + \text{هـ}^{\text{٢س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{\text{٢هـ}^{\text{٢س}}}$

$\int \cancel{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,(\text{ع})^{-\text{٥}}\,\frac{\text{دع}}{\text{٢}\cancel{\text{هـ}^{\text{٢س}}}}$

$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\frac{\text{ع}^{-\text{٤}}}{-\text{٤}} + \text{ث}$

$-\frac{\text{١}}{\text{٨}}\,(\text{٤}+\text{هـ}^{\text{٢س}})^{-\text{٤}} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{(3+\frac{1}{س})^4}{س^2}\, دس$

$\int (3+\frac{1}{س})^4\, س^{-2}\, دس$ $\qquad ع = 3+\frac{1}{س}$

$دس = \frac{دع}{\frac{-1}{س^2}}$

$\int (ع)^4\, س^{-2}\, -س^2\, دع$

$دس = -س^2\, دع$

$-\frac{ع^5}{5} + جـ$

$-\frac{1}{5}\left(3+\frac{1}{س}\right)^5 + جـ$

⑦ $\int \frac{\sqrt[3]{س^3+3}}{س^5}\, دس$

لازم يكون برا القوس في كسر وإذا ما في احنا بنجيبه بإخراج عامل مشترك

$= \int \frac{\sqrt[3]{س^3(1+\frac{3}{س^3})}}{س^5}\, دس$

$= \int \frac{\sqrt[3]{س^3}\,\sqrt[3]{(1+\frac{3}{س^3})}}{س^5}\, دس$ $\qquad ع = 1+\frac{3}{س^3}$

$دس = \frac{دع}{\frac{-3\times 3}{س^4}}$

$= \int \frac{\cancel{س}\,(1+\frac{3}{س^3})^{\frac{1}{3}}}{س^{4}}\, دس$ $\qquad = \frac{س^4\, دع}{-9}$

$= \int \frac{ع^{\frac{1}{3}}}{\cancel{س^4}} \times \frac{\cancel{س^4}\, دع}{-9}$

$= \frac{-1}{9} \times \frac{3}{4}\, ع^{\frac{4}{3}} + جـ = \frac{-1}{12}\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{س^3}\right)^4} + جـ$

نخرج أعلى قوة موجودة عامل مشترك

(1) $\int \frac{\text{د}\text{س}}{\text{س}^{5} + \text{س}}$

$\int \frac{\text{د}\text{س}}{\text{س}^{5}\left(1 + \frac{1}{\text{س}^{4}}\right)}$ $\qquad$ $\text{ع} = 1 + \frac{1}{\text{س}^{4}}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ع}}{-4\text{س}^{-5}}$

$\int \frac{-\cancel{\text{س}^{5}}}{\cancel{\text{س}^{5}}\,\text{ع}} \; \frac{\text{د}\text{ع}}{4}$ $\qquad$ $\text{د}\text{س} = \frac{-\text{س}^{5}\,\text{د}\text{ع}}{4}$

$-\frac{1}{4} \int \frac{1}{\text{ع}}\, \text{د}\text{ع}$

$= -\frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ع}| + \text{ج}$

$= -\frac{1}{4} \text{لو}_{\text{هـ}} \left|1 + \frac{1}{\text{س}^{4}}\right| + \text{ج}$

(2) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{5} + 3\text{س}^{3}}\; \text{د}\text{س}$

$\int \sqrt[3]{\text{س}^{3}(\text{س}^{2} + 3)}\; \text{د}\text{س}$

$\int \sqrt[3]{\text{س}^{3}}\; \sqrt[3]{\text{س}^{2} + 3}\; \text{د}\text{س}$

$\int \text{س}\, (\text{س}^{2} + 3)^{\frac{1}{3}}\, \text{د}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{س}^{2} + 3$, $\quad \text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ع}}{2\text{س}}$

$\int \cancel{\text{س}}\, (\text{ع})^{\frac{1}{3}}\, \frac{\text{د}\text{ع}}{2\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\, \text{ع}^{\frac{4}{3}} + \text{ج} = \frac{3}{8}\, \text{ع}^{\frac{4}{3}} + \text{ج} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(\text{س}^{2} + 3)^{4}} + \text{ج}$

(10) $\int (\text{س}^9 + \text{س})^7 \, \text{د}\text{س}$

$\int \left(\text{س}(\text{س}^8 + 1)\right)^7 \, \text{د}\text{س}$

$\int \text{س}^7 (\text{س}^8 + 1)^7 \, \text{د}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{س}^8 + 1$

$\text{د}\text{س} = \dfrac{\text{د}\text{ع}}{8\,\text{س}^7}$

$\int \cancel{\text{س}^7} (\text{ع})^7 \dfrac{\text{د}\text{ع}}{8\,\cancel{\text{س}^7}}$

$= \dfrac{1}{8} \, \dfrac{\text{ع}^8}{8} + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{64} (\text{س}^8 + 1)^8 + \text{ث}$

(11) $\int \dfrac{(\text{س} + 2)^{11}}{(\text{س} + 5)^{13}} \, \text{د}\text{س}$ $\qquad$ $\dfrac{\text{س}^n}{\text{ص}^n} = \left(\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^n$

$\text{س}^n \text{ص}^n = (\text{س}\text{ص})^n$

$= \int \dfrac{(\text{س} + 2)^{11}}{(\text{س} + 5)^{11} (\text{س} + 5)^2} \, \text{د}\text{س}$

$= \int \left(\dfrac{\text{س} + 2}{\text{س} + 5}\right)^{11} \times \dfrac{1}{(\text{س} + 5)^2} \, \text{د}\text{س}$

$\text{ع} = \dfrac{\text{س} + 2}{\text{س} + 5}$

$\text{د}\text{س} = \dfrac{\text{د}\text{ع}}{\dfrac{\text{س} + 5 - \text{س} - 2}{(\text{س} + 5)^2}} = \dfrac{(\text{س} + 5)^2 \, \text{د}\text{ع}}{3}$

$= \int (\text{ع})^{11} \times \dfrac{1}{(\text{س} + 5)^2} \times \dfrac{(\text{س} + 5)^2 \, \text{د}\text{ع}}{3}$

$= \dfrac{1}{3} \, \dfrac{\text{ع}^{12}}{12} + \text{ث} = \dfrac{1}{36} \left(\dfrac{\text{س} + 2}{\text{س} + 5}\right)^{12} + \text{ث}$

(١٢)

$$\int \frac{س^{١٧}}{(س+٣)^{١٩}}\,ءس$$

$$\int \frac{س^{١٧}}{(س+٣)^{١٧}(س+٣)^{٢}}\,ءس$$

$$\int \left(\frac{س}{س+٣}\right)^{١٧} \frac{١}{(س+٣)^{٢}}\,ءس \qquad ع = \frac{س}{س+٣}$$

$$ءس = \frac{ءع}{\frac{س+٣-س}{(س+٣)^{٢}}}$$

$$\int (ع)^{١٧} \frac{١}{\cancel{(س+٣)^{٢}}} \frac{\cancel{(س+٣)^{٢}}\,ءع}{٣}$$

$$ءس = \frac{(س+٣)^{٢}\,ءع}{٣}$$

$$\frac{١}{٣}\,\frac{ع^{١٨}}{١٨} + ج$$

$$\frac{١}{٥٤}\left(\frac{س}{س+٣}\right)^{١٨} + ج$$

(١٣)

$$\int س^{٣}(س^{٢}+٣)^{٦}\,ءس \qquad ع = س^{٢}+٣$$

$$ءس = \frac{ءع}{٢س}$$

$$= \int س^{٣} ع^{٦}\,\frac{ءع}{٢\cancel{س}}$$

$$= \frac{١}{٢}\int س^{٢} ع^{٦}\,ءع \qquad لكن\ ع = س^{٢}+٣$$

$$س^{٢} = ع - ٣$$

$$= \frac{١}{٢}\int (ع-٣)\,ع^{٦}\,ءع = \frac{١}{٢}\int (ع^{٧} - ٣ع^{٦})\,ءع$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{ع^{٨}}{٨} - \frac{٣ع^{٧}}{٧}\right) + ج = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٨}(س^{٢}+٣)^{٨} - \frac{٣}{٧}(س^{٢}+٣)^{٧}\right) + ج$$

(١٤) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{س+٣}}\, دس$

$= \int س^{٢} (س+٣)^{-\frac{1}{2}}\, دس$ $\quad$ $ع = س+٣$ ، $دس = دع$

$= \int س^{٢}\, ع^{-\frac{1}{2}}\, دع$ $\quad$ R₁ $\quad$ $ع - ٣ = س$ ، $ع^{٢} - ٦ع + ٩ = س^{٢}$

لا تنسى نرجع للفرض

$= \int (ع^{٢} - ٦ع + ٩)\, ع^{-\frac{1}{2}}\, دع$

$= \int (ع^{\frac{3}{2}} - ٦ع^{\frac{1}{2}} + ٩ع^{-\frac{1}{2}})\, دع$

$= \frac{2}{5} ع^{\frac{5}{2}} - ٦ \times \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}} + ٩ \times \frac{2}{1} ع^{\frac{1}{2}} + ث$

$= \frac{2}{5} \sqrt{(س+٣)^{٥}} - ٤\sqrt{(س+٣)^{٣}} + ١٨\sqrt{س+٣} + ث$

(١٥) $\int س^{١٤} (س^{٥}+١)^{٤}\, دس$ $\quad$ $ع = س^{٥} + ١$ ، $دس = \frac{دع}{٥س^{٤}}$

$\int س^{١٤}\, ع^{٤}\, \frac{دع}{٥س^{٤}}$

$= \frac{1}{5} \int س^{١٠}\, ع^{٤}\, دع$ $\quad$ نعوض $ع = س^{٥} + ١$

$س^{٥} = ع - ١$ بالتربيع

$= \frac{1}{5} \int (ع^{٢} - ٢ع + ١)\, ع^{٤}\, دع$ $\quad$ $س^{١٠} = ع^{٢} - ٢ع + ١$

$$= \frac{١}{٥} \int (\text{ع}^{٩} - ٢\text{ع}^{٨} + \text{ع}^{٧})\, \text{دع}$$

$$= \frac{١}{٥} \left(\frac{\text{ع}^{١٠}}{١٠} - \frac{٢\text{ع}^{٩}}{٩} + \frac{\text{ع}^{٨}}{٨} \right) + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٥} \left(\frac{١}{١٠} (\text{س}^{٥}+١)^{١٠} - \frac{٢}{٩} (\text{س}^{٥}+١)^{٩} + \frac{١}{٨} (\text{س}^{٥}+١)^{٨} \right) + \text{ث}$$

(١٧) $\int \text{س}^{٧} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٥} \text{دس}$

$$= \int \text{س}^{٧} \left(\frac{\text{س}+١}{\text{س}} \right)^{٥} \text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{\cancel{٧}\,٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\cancel{\text{س}^{٥}}} \text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{٢} (\text{س}+١)^{٥}\, \text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س} + ١$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{١}$$

$$= \int \text{س}^{٢} (\text{ع})^{٥}\, \text{دع} \qquad (\text{س})^{٢} = (\text{ع} - ١)^{٢}$$

$$= \int (\text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ١)(\text{ع}^{٥})\, \text{دع} \qquad \text{س}^{٢} = \text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ١$$

$$= \int (\text{ع}^{٧} - ٢\text{ع}^{٦} + \text{ع}^{٥})\, \text{دع}$$

$$= \frac{\text{ع}^{٨}}{٨} - \frac{٢\text{ع}^{٧}}{٧} + \frac{\text{ع}^{٦}}{٦} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٨} (\text{س}+١)^{٨} - \frac{٢}{٧} (\text{س}+١)^{٧} + \frac{١}{٦} (\text{س}+١)^{٦} + \text{ث}$$

أو

$$\int س^{٢}\, س^{٥} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٥} دس$$

$$\int س^{٢} \left(س\left(١ + \frac{١}{س}\right)\right)^{٥} دس$$

$$\int س^{٢} (س+١)^{٥} دس \qquad ع = س + ١$$

$$دس = دع$$

$$= \int س^{٢}\, ع^{٥}\, دع \qquad ع - ١ = س$$

$$= \int (ع^{٢} - ٢ع + ١)\, ع^{٥}\, دع \qquad س^{٢} = ع^{٢} - ٢ع + ١$$

$$= \int ع^{٧} - ٢ع^{٦} + ع^{٥}\, دع$$

$$= \frac{ع^{٨}}{٨} - \frac{٢ع^{٧}}{٧} + \frac{ع^{٦}}{٦} + جـ$$

$$= \frac{١}{٨}(س+١)^{٨} - \frac{٢}{٧}\left((س+١)^{٧}\right) + \frac{١}{٦}(س+١)^{٦} + جـ$$

(١٧) $$\int س\, جتا(س^{٢} + ٣)\, دس$$

$R_2 \Leftarrow$ (P) أي اقتران دائري

زاوية ليست خطية فرض

(ب) أي اقتران اسي طبيعي

الاس ليس خطي فرض

$$ع = س^{٢} + ٣$$

$$دس = \frac{دع}{٢س}$$

$$\int س\, جتا ع\, \frac{دع}{٢س}$$

$$\frac{١}{٢} جا ع + جـ = \frac{١}{٢} جا(س^{٢}+٣) + جـ$$

(١٨) $\int \frac{\text{جا}^2\sqrt{٥س+١}}{\sqrt{٥س+١}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \sqrt{٥س+١}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\frac{٥}{٢\sqrt{٥س+١}}}$

$\text{دس} = \dfrac{٢\sqrt{٥س+١}\ \text{دع}}{٥}$

$= \int \frac{\text{جا}^2\text{ع}}{\cancel{\sqrt{٥س+١}}} \times \frac{٢\cancel{\sqrt{٥س+١}}}{٥}\,\text{دع}$

$= \frac{٢}{٥}\int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{ع}\right)\text{دع}$

$= \frac{٢}{٥}\left(\frac{١}{٢}\text{ع} - \frac{١}{٤}\,\text{جا}٢\text{ع}\right) + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٥}\left(٢\sqrt{٥س+١} - \frac{١}{٤}\,\text{جا}٢\sqrt{٥س+١}\right) + \text{ث}$

(١٩) $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{جا}(\text{ظاس})\ \text{جتا}(\text{ظاس})\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{ظاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{جاع}\ \text{جتاع}\ \dfrac{\text{دع}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{ع}\ \text{دع}$

$= -\frac{١}{٤}\,\text{جتا}٢\text{ع} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤}\,\text{جتا}(٢\,\text{ظاس}) + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{ه^{\frac{1}{س}+1}}{س^2} \, دس$

$ع = 1 + \frac{1}{س}$

$دع = \frac{-1}{س^2} دس$

$دس = \frac{دع}{\frac{-1}{س^2}}$

$دس = -س^2 \, دع$

$\int \frac{ه^ع}{\cancel{س^2}} - \cancel{س^2} \, دع$

$\int - ه^ع \, دع$

$- ه^ع + ج$

$- ه^{\frac{1}{س}+1} + ج$

⑪ **

$\int ه^{س^2 + 2 لو_ه س} \, دس$

$= \int ه^{س^2} \times ه^{لو_ه س^2} \, دس$

$ه^{لو_ه (د(س))} = د(س)$

$= \int س \, ه^{س^2} \, دس$

$ه^{لو_ه (د(س))} = د(س)$

$ع = س^2$

$دس = \frac{دع}{2س}$

$= \int \cancel{س} \, ه^ع \, \frac{دع}{2\cancel{س}}$

$= \frac{1}{2} ه^ع + ج$

$= \frac{1}{2} ه^{س^2} + ج$

(22) $\int$ جتا^3 س دس

* عندما تكون القوة فردية نفك وحدة

جتا^2 س الباقي من القوة الفردية نستخدم لها المتطابقة الأساسية

$\int$ جتا س جتا^2 س دس

$\int$ جتا س (1 - جا^2 س) دس

ع = جا س

دس = $\frac{\text{دع}}{\text{جتا س}}$

$\int$ ~~جتا س~~ (1 - ع^2) $\frac{\text{دع}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

ع - $\frac{\text{ع}^3}{3}$ + جـ

جا س - $\frac{1}{3}$ جا^3 س + جـ

(23) $\int$ جا^3 3س دس

$\int$ جا 3س جا^2 3س دس

$\int$ جا 3س (1 - جتا^2 3س) دس

ع = جتا 3س

دس = $\frac{\text{دع}}{\text{-3جا 3س}}$

$\int$ ~~جا 3س~~ (1 - ع^2) $\frac{\text{دع}}{\text{-3}\cancel{\text{جا 3س}}}$

$-\frac{1}{3}$ (ع - $\frac{\text{ع}^3}{3}$) + جـ

$-\frac{1}{3}$ جتا 3س + $\frac{1}{9}$ جتا^3 3س + جـ

(٢٤) $\int \text{جا}^{5}\,\text{٢س}\ \text{دس}$

$\int \text{جا٢س}\ \text{جا}^{4}\,\text{٢س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جا٢س}\ (\text{جا}^{2}\,\text{٢س})^{2}\ \text{دس}$

$= \int \text{جا٢س}\ (1 - \text{جتا}^{2}\,\text{٢س})^{2}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{جتا٢س}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{-\text{٢جا٢س}}$

$= \int \text{جا٢س}\ (1-\text{ع}^{2})^{2}\ \dfrac{\text{دع}}{-\text{٢جا٢س}}$

$= -\frac{1}{2} \int (1 - 2\text{ع}^{2} + \text{ع}^{4})\ \text{دع}$

$= -\frac{1}{2} \left(\text{ع} - \dfrac{2\text{ع}^{3}}{3} + \dfrac{\text{ع}^{5}}{5}\right) + \text{ث}$

$= -\frac{1}{2} \left(\text{جتا٢س} - \frac{2}{3}\,\text{جتا}^{3}\,\text{٢س} + \frac{1}{5}\,\text{جتا}^{5}\,\text{٢س}\right) + \text{ث}$

(٢٥) $\int \text{ظا}^{3}\,\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{ظاس}\ \text{ظا}^{2}\,\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{قاس}$

$= \int \text{ظاس}\ (\text{قا}^{2}\,\text{س} - 1)\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \int \cancel{\text{ظاس}}\ (\text{ع}^{2} - 1)\ \dfrac{\text{دع}}{\text{قاس}\ \cancel{\text{ظاس}}}$ $\qquad$ لكن $\text{ع} = \text{قاس}$

$$= \int \left(\frac{\text{ع}^2 - 1}{\text{ع}} \right) \text{دع}$$

$$= \int \left(\text{ع} - \frac{1}{\text{ع}} \right) \text{دع}$$

$$= \frac{\text{ع}^2}{2} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ع}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قاس}| + \text{جـ}$$

(26) $$\int \text{جتا}^3\text{س} \ \text{جا}^4\text{س} \ \text{دس}$$

$$= \int \text{جتاس} \ \text{جتا}^2\text{س} \ \text{جا}^4\text{س} \ \text{دس}$$

$$= \int \text{جتاس} \left(1 - \text{جا}^2\text{س} \right) \text{جا}^4\text{س} \ \text{دس}$$

$\text{ع} = \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{\text{جتاس}}$

$$= \int \cancel{\text{جتاس}} \left(1 - \text{ع}^2 \right) \text{ع}^4 \ \frac{\text{دع}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \left(\text{ع}^4 - \text{ع}^6 \right) \text{دس}$$

$$= \frac{\text{ع}^5}{5} - \frac{\text{ع}^7}{7} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\text{جا}^5\text{س} \right) - \frac{1}{7} \left(\text{جا}^7\text{س} \right) + \text{جـ}$$

(٧) $\int جا^3 س \; جتا^5 س \; ءس$

فردي مع فردي بنبطأ بأي واحد والأسهل ولكن الأحسن نوزع على الأصغر القوة

$= \int جا س \; جا^2 س \; جتا^5 س \; ءس$

$= \int جا س \,(1 - جتا^2 س)\, جتا^5 س \; ءس$ $\qquad ع = جتا س$

$ءس = \frac{ءع}{-جا س}$

$= \int جا س \,(1 - ع^2)\, ع^5 \; \frac{ءع}{-جا س}$

$= -\int (ع^5 - ع^7)\, ءع$

$= -\left(\frac{ع^6}{6} - \frac{ع^8}{8}\right) + ث$

$= -\left(\frac{1}{6} جتا^6 س - \frac{1}{8} جتا^8 س\right) + ث$

(٨) $\int جا^3 س \; جتا^3 س \; ءس$

1- بشتغل على جا س

2- بشتغل على جتا س

3- $(جا س \; جتا س)^3$

$= \int (جا س \; جتا س)^3 \; ءس$

للعلم فقط الخيار الثالث من الحل طرق.

$= \int \left(\frac{1}{2} جا 2س\right)$ ...

$= \frac{1}{8} \int جا^3 2س \; ءس$

$= \frac{1}{8} \int جا 2س \; جا^2 2س \; ءس$

$\frac{1}{8} \int جا 2س \,(1 - جتا^2 2س)\; ءس$ $\qquad ع = جتا 2س$

$ءس = \frac{ءع}{-\frac{1}{2} جا 2س}$

$\frac{1}{8} \int جا 2س \,(1 - ع^2)\; \frac{ءع}{-\frac{1}{2} جا 2س}$

$\frac{1}{8} \times -2 \int (1 - ع^2)\, ءع \Leftarrow -\frac{1}{4}\left(ع - \frac{ع^3}{3}\right) + ث = -\frac{1}{4}\left(جتا 2س - \frac{1}{3} جتا^3 2س\right) + ث$

ت (٢٩) $\int \text{ظتاس} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس} \; \text{د س}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}$

$\text{د س} = \dfrac{\text{د ع}}{\dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}$

$\int \cancel{\text{ظتاس}} \; \text{ع} \; \dfrac{\text{د ع}}{\cancel{\text{ظتاس}}}$

$\text{د س} = \dfrac{\text{د ع}}{\text{ظتاس}}$

$= \dfrac{\text{ع}^2}{2} + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{2} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس})^2 + \text{ث}$

ت (٣٠) $\int \text{ظاس} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتاس})^5 \; \text{د س}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتاس}$

$\int \cancel{\text{ظاس}} \; \text{ع}^5 \; \dfrac{\text{د ع}}{-\cancel{\text{ظاس}}}$

$\text{د س} = \dfrac{\text{د ع}}{\dfrac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}}$

$\dfrac{-\text{ع}^6}{6} + \text{ث}$

$-\dfrac{1}{6} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتاس})^6 + \text{ث}$

$= \dfrac{\text{د ع}}{-\text{ظاس}}$

(٢١) $\int \text{جا}^{8}\text{س}\ \text{قا}^{10}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{جا}^{8}\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^{10}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{جا}^{8}\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^{8}\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{جا}^{8}\text{س}}{\text{جتا}^{8}\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{ظا}^{8}\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{جا}^{8}\text{س}\ \text{قا}^{8}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\int (\text{جا س قا س})^{8}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right)^{8}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{ظا}^{8}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{ظا س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$\int \text{ع}^{8}\ \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}\ \frac{\text{دع}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$

$= \frac{\text{ع}^{9}}{9} + \text{ج} = \frac{1}{9}(\text{ظا}^{9}\text{س}) + \text{ج}$

* قاعدة *

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{ء}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{ج}$$

(32) $$\int \left(\frac{3\text{س}^2 + 3\text{س} - 2}{\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 - 2\text{س} + 5} \right) \text{ء}\text{س}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^3 + \tfrac{1}{2}\text{س}^2 - 2\text{س} + 5| + \text{ج}$$

لأن البسط مشتقة المقام.

(33) $$\int \left(\frac{\text{س} + 3}{\text{س}^2 + 6\text{س} - 1} \right) \text{ء}\text{س} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 + 6\text{س} - 1| + \text{ج}$$ لأن البسط م. المقام

(34) $$\int \left(\frac{\text{جا}2\text{س}}{5 + \text{جتا}^2\text{س}} \right) \text{ء}\text{س} \times \frac{-1}{-1}$$

-2 جاس جتاس

$-$ جا2س

$$= -\,\text{لو}_{\text{هـ}} |5 + \text{جتا}^2\text{س}| + \text{ج}$$ لأن البسط م. المقام.

(35) $$\int \left(\frac{\text{هـ}^{5\text{س}+1}}{\text{هـ}^{5\text{س}+1} + 10} \right) \text{ء}\text{س} \times \frac{5}{5}$$

$5\,\text{هـ}^{5\text{س}+1}$

$$\frac{1}{5}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{5\text{س}+1} + 10| + \text{ج}$$

(٣٦) $\int \text{ظاس}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{دس} \times \frac{-1}{-1}$

$-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{ج}$ لأن البسط م. المقام .

(٣٧) $\int \text{ظتا٥س}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{جتا٥س}}{\text{جا٥س}}\ \text{دس} \times \frac{5}{5}$

$\frac{1}{5}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا٥س}| + \text{ج}$ لأن البسط م. المقام

(٣٨) $\int \text{قاس}\ \text{دس} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$

هذه الطريقة فقط في حالة قاس و قتاس

$= \int \left(\frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\right) \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{ج}$

(٣٩) $\int \text{قتا}\,٣\text{س}\ \text{د}\text{س}$ $\frac{\text{قتا}\,٣\text{س} - \text{ظتا}\,٣\text{س}}{\text{قتا}\,٣\text{س} - \text{ظتا}\,٣\text{س}}$ ← بوضطنا + مضروب في -١ بالبسط $\boxed{\frac{-٣}{-٣}}$

$$\int \frac{\text{قتا}^٢\,٣\text{س} - \text{قتا}\,٣\text{س}\ \text{ظتا}\,٣\text{س}}{\text{قتا}\,٣\text{س} - \text{ظتا}\,٣\text{س}}\ \text{د}\text{س} \times \frac{٣}{٣}$$

$$= \frac{١}{٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{قتا}\,٣\text{س} - \text{ظتا}\,٣\text{س} \right| + \text{جـ}$$

(٤٠) مرتين في ت

$$\int \frac{\text{د}\text{س}}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \right) \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \right| + \text{جـ}$$ لأن البسط م. المقام

* قاعدة *

$$\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{\text{أ}} \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$$

(٤١) $\int (٥\text{س}+٣)^٧\ \text{د}\text{س}$

$$\frac{١}{٥} \frac{(٥\text{س}+٣)^٨}{٨} + \text{جـ}$$

(٤٢) $\int \frac{٣}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}\ \text{د}\text{س}$

$$\int ٣(٢\text{س}+١)^{\frac{-١}{٣}}\ \text{د}\text{س} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{٢} (٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢\text{س}+١)^٢} + \text{جـ}$$

ت مكرر (93) $\int \frac{دس}{س^2+4س+4}$

$\int \frac{دس}{(س+2)^2} = \int (س+2)^{-2}\, دس$

$= \frac{(س+2)^{-1}}{-1} + جـ$

$= \frac{-1}{س+2} + جـ$

* قاعدة *

$\int ق(س)\, دس = م(س) + جـ$

مهمة *** $\int ق(أس+ب)\, دس = \frac{1}{أ} م(أس+ب) + جـ$

$R_3 \leftarrow$ أي تركيب ليس خطي فرض

تكامل أي تركيب ليس خطي فرض دائماً

(94) $م(س) = س^2 + 3س - 2$ اقتران أصلي للاقتران ق(س)

أوجد $\int ق(3س+1)\, دس$

$= \frac{1}{3} م(3س+1) + جـ$

$= \frac{1}{3}\left((3س+1)^2 + 3(3س+1) - 2\right) + جـ$

$= \frac{1}{3}\left(9س^2 + 6س + 1 + 9س + 3 - 2\right) + جـ$

$$٣س^٣ + ٥س + \frac{س^٢}{٢} + جـ$$

$$= ٣س^٣ + ٥س + جـ$$

(45) إذا كان م(س) = جتا٥س + ظا س اقتران أصلي للاقتران ق(س)

أوجدي $\int \frac{ق(\frac{1}{س})}{س^٢} \, دس$

$ع = \frac{1}{س}$

$دس = \frac{دع}{\frac{-1}{س^٢}}$

$= -س^٢ \, دع$

$$\int \frac{ق(ع)}{\cancel{س^٢}} \times -\cancel{س^٢} \, دع$$

$$= -م(ع) + جـ$$

$$= -(جتا ٥ع + ظا ع) + جـ$$

$$= -\left(جتا \frac{٥}{س} + ظا \frac{1}{س}\right) + جـ$$

(46) 2022 ت $\int \left(\frac{1}{(1+هـ^س)}\right) دس$

طريقة أخرى وبطلع مباشرة

نضرب البسط والمقام بـ $\frac{هـ^س}{هـ^س}$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{هـ^س} + 1} \, دس = \int \left(\frac{1}{\frac{هـ^س + 1}{هـ^س}}\right) دس$$

$$= \int \frac{هـ^س}{1 + هـ^س} \, دس = \frac{لو|1 + هـ^س|}{هـ} + جـ$$

(47) $\int \left(\frac{1}{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس} \times \frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$

$= \int \left(\frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{-\text{س}}+1}\right) \text{دس} \times \frac{-1}{-1}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{-\text{س}}+1| + \text{ج}$

أو $\int \left(\frac{1+\text{هـ}^{\text{س}}-\text{هـ}^{\text{س}}}{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\frac{1+\text{هـ}^{\text{س}}}{1+\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس}$

$= \int \left(1 - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس}$

$= \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{ج}$

ثانياً: التكامل بالأجزاء

ملاحظة:

يستخدم التكامل بالأجزاء عادةً لإيجاد حاصل ضرب أو قسمة اقترانين مختلفين من حيث النوع وتكون المشتقة النونية لأحدهما عدد ثابت والآخر اقتران يمكن إيجاد تكامله نفرض الاقتران الأول ق والاقتران الثاني مشتقة د هـ ثم نطبق القاعدة $\int \text{ق} \cdot \text{هـَ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ} \, \text{قَ}$

أوجدي التكاملات التالية:

① $\int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}} \underbrace{\text{جتاس}\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{جتاس}\ \text{دس}$

$\text{دق} = 1\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \text{جاس}$

$= \text{س جاس} - \int \text{جاس}\ \text{دس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

② $\int \underbrace{(4\text{س}+2)}_{\text{ق}} \underbrace{\text{هـ}^{2\text{س}+1}\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = 4\text{س}+2$ ، $\text{دهـ} = \text{هـ}^{2\text{س}+1}$

$\text{دق} = 4\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}+1}$

$= (4\text{س}+2)\left(\frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}+1}\right) - 2\int \text{هـ}^{2\text{س}+1}\ \text{دس}$

$= (2\text{س}+1)\,\text{هـ}^{2\text{س}+1} - \text{هـ}^{2\text{س}+1} + \text{جـ}$

* إذا كانت الزاوية خطية لا يوجد فرض

③ $\int \underbrace{6\text{س}}_{\text{ق}} \underbrace{\text{جا}(2\text{س}+1)\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = 6\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{جا}(2\text{س}+1)\ \text{دس}$

$\text{دق} = 6\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{-1}{2}\text{جتا}(2\text{س}+1)$

$= -3\text{س}\ \text{جتا}(2\text{س}+1) + 3\int \text{جتا}(2\text{س}+1)\ \text{دس}$

$= -3\text{س}\ \text{جتا}(2\text{س}+1) + \frac{3}{2}\text{جا}(2\text{س}+1) + \text{جـ}$

الأسس خطي لا يوجد فرض

(٤) $\int \underbrace{\text{س}^2}_{\text{ق}} \; \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}+1}\,\text{د س}}_{\text{دهـ}}$

ق = س^2 ، دهـ = $\text{هـ}^{\text{س}+1}$ د س

دق = ٢ س د س ، هـ = $\text{هـ}^{\text{س}+1}$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+1} - \int \underbrace{2\text{س}}_{\text{ق}} \; \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}+1}\,\text{د س}}_{\text{دهـ}}$

ق = ٢ س ، دهـ = $\text{هـ}^{\text{س}+1}$ د س

دق = ٢ د س ، هـ = $\text{هـ}^{\text{س}+1}$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+1} - \left(2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+1} - \int 2\,\text{هـ}^{\text{س}+1}\,\text{د س}\right)$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+1} - 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+1} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}+1} + \text{جـ}$

نستخدم الأجزاء حسب قوة س إذا ١ نستخدم الأجزاء مرة واحدة
وإذا ٢ سنستخدم الأجزاء مرتين

(٥) $\int (4\text{س}^2+4)\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{د س}$

$= \int (4\text{س}^2+4)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}\right)\text{د س}$

$= \int \underbrace{(2\text{س}^2+2)}_{\text{مباشر}} + \underbrace{(2\text{س}^2+2)}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{جتا}\,2\text{س}\ \text{د س}}_{\text{دهـ}}$

ق = $2\text{س}^2 + 2$ ، دهـ = جتا ٢ س د س

دق = ٤ س د س ، هـ = $\frac{1}{2}$ جا ٢ س

$$= \left(\frac{2\text{س}^3}{3} + 2\text{س}\right) + (\text{س}^2+1)\,\text{جا}2\text{س} - \int \underbrace{2\text{س}}_{\text{ص}}\;\underbrace{\text{جا}2\text{س}\;\text{دس}}_{\text{دهـ}}$$

$\text{ص} = 2\text{س}$ $\qquad$ $\text{دهـ} = \text{جا}2\text{س}\;\text{دس}$

$\text{دص} = 2\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}$

$$= \frac{2}{3}\text{س}^3 + 2\text{س} + (\text{س}^2+1)\,\text{جا}2\text{س} - \left(-\text{س}\,\text{جتا}2\text{س} + \int \text{جتا}2\text{س}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{2}{3}\text{س}^3 + 2\text{س} + (\text{س}^2+1)\,\text{جا}2\text{س} + \text{س}\,\text{جتا}2\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س} + \text{ث}$$

6) $\int (4\text{س}+1)\,\text{جا}^2 2\text{س}\;\text{دس}$

$$\int (4\text{س}+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}4\text{س}\right)\text{دس}$$

$\text{ص} = 4\text{س}+1$ $\qquad$ $\text{دهـ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}4\text{س}\;\text{دس}$

$\text{دص} = 4\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\,\text{جا}4\text{س}$

$$(4\text{س}+1)\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right) - \int 4\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right)\text{دس}$$

$$(4\text{س}+1)\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right) - \int 2\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا}4\text{س}\;\text{دس}$$

$$(4\text{س}+1)\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right) - \left(\text{س}^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\,\text{جتا}4\text{س}\right) + \text{ث}$$

$$(4\text{س}+1)\left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right) - \text{س}^2 - \frac{1}{8}\,\text{جتا}4\text{س} + \text{ث}$$

7) $\int \text{س}^{5}\,\text{جتا}(\text{س}^{3}+2)\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{3}+2$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{3\text{س}^{2}}$

$= \int \text{س}^{\cancel{5}\,3}\,\text{جتاع}\,\dfrac{\text{دع}}{3\cancel{\text{س}^{2}}}$

$= \dfrac{1}{3}\int \text{س}^{3}\,\text{جتاع}\,\text{دع}$ لكن $\text{ع} = \text{س}^{3}+2 \Leftarrow \text{ع} - 2 = \text{س}^{3}$

$= \dfrac{1}{3}\int \underbrace{(\text{ع}-2)}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{جتاع}\,\text{دع}}_{\text{دهـ}}$ ، $\text{ق} = \text{ع}-2$ ، $\text{دق} = \text{دع}$ ، $\text{دهـ} = \text{جتاع}\,\text{دع}$ ، $\text{هـ} = \text{جاع}$

$= \dfrac{1}{3}\left[(\text{ع}-2)\,\text{جاع} - \int \text{جاع}\,\text{دع}\right]$

$= \dfrac{1}{3}\left[(\text{ع}-2)\,\text{جاع} + \text{جتاع}\right] + \text{ث}$

$= \dfrac{1}{3}\left[\text{س}^{3}\,\text{جا}(\text{س}^{3}+2) + \text{جتا}(\text{س}^{3}+2)\right] + \text{ث}$

8) $\int \text{هـ}^{\sqrt{2\text{س}+3}}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \sqrt{2\text{س}+3}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2\text{س}+3}}}$

$\int \text{ع}\,\underbrace{\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{دع}}_{\text{دهـ}}$

$= \sqrt{2\text{س}+3}\,\text{دع}$

$= \text{ع}\,\text{دع}$

$= \text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - \int \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{دع}$ ، $\text{ق} = \text{ع}$ ، $\text{دق} = \text{دع}$ ، $\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{دع}$ ، $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ع}}$

$= \text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$

$= \sqrt{2\text{س}+3}\;\text{هـ}^{\sqrt{2\text{س}+3}} - \text{هـ}^{\sqrt{2\text{س}+3}} + \text{ث}$

(9) $\int \underbrace{4س}_{ق} \underbrace{\text{قا}^2 2س\ دس}_{ده}$

ق $= 4س$ $\times$ ده $=$ قا$^2 2س$ دس

دق $= 4$ $\xleftarrow{-2}$ ه $= \frac{1}{2}$ ظا $2س$

$= 2س$ ظا $2س - \int 2$ ظا $2س$ دس

$= 2س$ ظا $2س - 2\int \frac{\text{جا}2س}{\text{جتا}2س}$ دس $\quad \frac{-2\times}{-2}$

$=$ $2س$ ظا $2س$ $+$ $\frac{\text{لو}|\text{جتا}2س|}{ه}$ $+$ ث

(15) $\int \frac{س\ \text{جتا}س}{\text{جا}^3س}$ دس

$= \int \frac{س\ \text{جتا}س}{\text{جا}س} \times \frac{1}{\text{جا}^2س}$ دس

$= \int \underbrace{س}_{ق}\ \underbrace{\text{ظتا}س\ \text{قتا}^2س\ دس}_{ده}$

ق $= س$ ده $=$ ظتاس قتا^{2}س دس

دق $=$ دس $\xleftarrow{-2}$ ه $= \int$ ظتاس قتا^{2}س دس

$= \frac{-1}{2}$ ظتا^{2}س

ع $=$ ظتاس

دس $= \frac{-دع}{\text{قتا}^2س}$

$= \int$ ع قتا^{2}س $\times \frac{-دع}{\text{قتا}^2س}$

$= \frac{-ع^2}{2} = \frac{-1}{2}$ ظتا^{2}س

$= \frac{-1}{2}$ س ظتا^{2}س $+ \frac{1}{2}\int$ ظتا^{2}س دس

$= -\frac{1}{2}$ س ظتا^{2}س $+ \frac{1}{2}\int($قتا^{2}س $-1)$ دس

$= -\frac{1}{2}$ س ظتا^{2}س $+ \frac{1}{2}(-$ظتاس $-$ س$) +$ ث

(11)

$$\int \underbrace{\text{٢س}}_{\text{و}}\ \underbrace{\text{قا}^2\text{س ظاس دس}}_{\text{ده}}$$

$\text{و} = \text{٢س}$

$\text{دو} = \text{٢}$

$\text{ده} = \text{قا}^2\text{س ظاس دس}$

$\text{ه} = \int \text{قا}^2\text{س ظاس دس}$

$\text{ع} = \text{ظاس}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ع}\ \dfrac{\text{دع}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$\int \text{ع دع} = \dfrac{\text{ع}^2}{\text{٢}}$

$= \dfrac{1}{2}\ \text{ظا}^2\text{س}$

$\text{س ظا}^2\text{س} - \int \text{ظا}^2\text{س دس}$

$\text{س ظا}^2\text{س} - \int (\text{قا}^2\text{س} - 1)\ \text{دس}$

$\text{س ظا}^2\text{س} - (\text{ظاس} - \text{س}) + \text{ث}$

(12) * اللوغاريتم يكامل فقط بالأجزاء *

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ $\text{دع} = \text{د س}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$ $\text{ع} = \text{س}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int 1\ \text{د س} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

(13) $\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٩}\ \text{د س}$

$= \int ٩\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ $\text{دع} = ٩\,\text{س}^{٢}\,\text{د س}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$ $\text{ع} = ٣\,\text{س}^{٣}$

$= ٣\,\text{س}^{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{د س} = ٣\,\text{س}^{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س}^{٣} + \text{جـ}$

(14) $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}\ \text{د س}$

$\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}$ $\text{دع} = \text{د س}$

$\text{دص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$ $\text{ع} = \text{س}$

$\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢} - ٢\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ $\text{دع} = \text{د س}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$ $\text{ع} = \text{س}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢} - ٢\left[\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \text{د س}\right]$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢} - ٢\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + ٢\,\text{س} + \text{جـ}$

(15) $\int \text{هـ}^{س} \text{جاس دس}$ متكررة

ق = هـ^{س} دهـ = جاس دس

دق = هـ^{س} دس   هـ = − جتاس

= − هـ^{س} جتاس + $\int$ هـ^{س} جتاس دس

متكررة لأنه اخترناها بالأولى

ق = هـ^{س} دهـ = جتاس دس

دق = هـ^{س} دس   هـ = جاس

= − هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس − $\int$ هـ^{س} جاس دس

$2\int$ هـ^{س} جاس دس = − هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس + ج

∴ $\int$ هـ^{س} جاس دس = $-\frac{1}{2}$ هـ^{س} جتاس + $\frac{1}{2}$ هـ^{س} جاس + ج

(16) $\int$ جا لو$_{هـ}$ س دس   ع = لو$_{هـ}$ س   دس = $\frac{\text{دع}}{\frac{1}{س}}$

= س دع

$\int$ س جاع دع   لكن ع = لو$_{هـ}$ س

س = هـ^{ع}

$\int$ هـ^{ع} جاع دع   ق = هـ^{ع} دهـ = جاع دع

دق = هـ^{ع} دع   هـ = − جتاع

− هـ^{ع} جتاع + $\int$ هـ^{ع} جتاع دع

ق = هـ^{ع} دهـ = جتاع دع

دق = هـ^{ع} دع   هـ = جاع

$-هـ^{ع} جتاع + هـ^{ع} جاع - \int هـ^{ع} جاع \; دع$

$2\int هـ^{ع} جاع \; دع = -هـ^{ع} جتاع + هـ^{ع} جاع + م$

$\int هـ^{ع} جاع \; دع = \frac{-1}{2} هـ^{ع} جتاع + \frac{1}{2} هـ^{ع} جاع + م$

$\int جا لو_{هـ} س = \frac{-1}{2} هـ^{لو_{هـ} س} جتا لو_{هـ} س + \frac{1}{2} هـ^{لو_{هـ} س} جا لو_{هـ} س + جـ$

17) $\int \frac{س \, هـ^{س}}{(س+1)^{2}} \; دس$

$= \int \underbrace{س \, هـ^{س}}_{ص} \underbrace{(س+1)^{-2} \; دس}_{دهـ}$

$ص = س \, هـ^{س}$ $\quad$ $دهـ = (س+1)^{-2}$

$دص = (س \, هـ^{س} + هـ^{س}) \, دس$ $\quad$ $هـ = \frac{(س+1)^{-1}}{-1}$

$= -س \, هـ^{س} (س+1)^{-1} + \int هـ^{س} \cancel{(س+1)} \cancel{(س+1)^{-1}} \; دس$

$= \frac{-س \, هـ^{س}}{س+1} + هـ^{س} + جـ$

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية

ملاحظات

يستخدم التكامل بالكسور الجزئية لإيجاد تكاملات اقترانات كسرية يكون فيها مشتقة المقام لا تساوي البسط وليست من مضاعفاته والمقام يحلل إلى عوامل خطية مختلفة.

أوجدي التكاملات التالية:

① $\int \left(\dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2+\text{س}-2} \right) d\text{س}$

$(\text{س}+2)(\text{س}-1)$

$\dfrac{2\text{س}}{(\text{س}+2)(\text{س}-1)} = \dfrac{\text{أ}}{\text{س}+2} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}-1}$

$= \dfrac{\text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}+2)}{(\text{س}+2)(\text{س}-1)}$

$\Leftarrow 2\text{س} = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س}+2)$

عند $\text{س} = -2 \Leftarrow -4 = -3\text{أ} + 0$

$\text{أ} = \dfrac{4}{3}$

عند $\text{س} = 1 \Leftarrow 2 = 0 + 3\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \dfrac{2}{3}$

$= \int \left(\dfrac{\frac{4}{3}}{\text{س}+2} + \dfrac{\frac{2}{3}}{\text{س}-1} \right) d\text{س}$

$= \dfrac{4}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+2| + \dfrac{2}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-1| + \text{جـ}$

② $\int \left(\dfrac{\text{س}+1}{\text{س}^2-\text{س}-6} \right) d\text{س}$

$(\text{س}-3)(\text{س}+2)$

$\dfrac{\text{س}+1}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)} = \dfrac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}+2}$

$\text{س}+1 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-3)$

$\text{س} = 3 \Leftarrow 4 = 5\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \dfrac{4}{5}$

$\text{س} = -2 \Leftarrow -1 = -5\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \dfrac{1}{5}$

$= \int \left(\dfrac{\frac{4}{5}}{\text{س}-3} + \dfrac{\frac{1}{5}}{\text{س}+2} \right) d\text{س}$

$= \dfrac{4}{5} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-3| + \dfrac{1}{5} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+2| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-3|^{\frac{4}{5}} \times |\text{س}+2|^{\frac{1}{5}} + \text{جـ}$

③ $\int \left(\frac{٤}{س^{٢} - ٩} \right) دس$

$(س-٣)(س+٣)$

$$\frac{٤}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$$

$$٤ = أ(س+٣) + ب(س-٣)$$

$س = ٣ \Leftarrow ٤ = ٦أ \Leftarrow أ = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$س = -٣ \Leftarrow ٤ = -٦ب \Leftarrow ب = \frac{-٤}{٦} = \frac{-٢}{٣}$

$$= \int \left(\frac{\frac{٢}{٣}}{س-٣} + \frac{\frac{-٢}{٣}}{س+٣} \right) دس$$

$$= \frac{٢}{٣} لو_{هـ} |س-٣| - \frac{٢}{٣} لو_{هـ} |س+٣| + ث$$

④ $\int \left(\frac{٣س+١}{٢س^{٢} - ٣س} \right) دس$

$س(٢س-٣)$

$$\frac{٣س+١}{س(٢س-٣)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{٢س-٣}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{-١}{٣}}{س} + \frac{\frac{١١}{٣}}{٢س-٣} \right) دس$$

$$٣س+١ = أ(٢س-٣) + ب س$$

$س = ٠ \Leftarrow ١ = -٣أ \Leftarrow أ = \frac{-١}{٣}$

$س = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \frac{١١}{٢} = \frac{٣}{٢} ب \Leftarrow ب = \frac{١١}{٣}$

$$= \frac{-١}{٣} لو_{هـ} |س| + \frac{١١}{٦} لو_{هـ} |٢س-٣| + ث$$

⑤ $\int \left(\frac{٣}{١-س^{٢}} \right) دس$

$(١+س)(١-س)$

$$\frac{٣}{(١+س)(١-س)} = \frac{أ}{١-س} + \frac{ب}{١+س}$$

$$٣ = أ(١+س) + ب(١-س)$$

$س = ١ \Leftarrow ٣ = ٢أ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٢}$

$س = -١ \Leftarrow ٣ = +٢ب \Leftarrow ب = \frac{+٣}{٢}$

$$= \int \left(\frac{\frac{٣}{٢}}{(١-س)} + \frac{\frac{+٣}{٢}}{(١+س)} \right) دس$$

$$\frac{-٣}{٢} لو_{هـ} |١-س| + \frac{٣}{٢} لو_{هـ} |١+س| + ث$$

⑥ $$\int \left(\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 8\text{س}} \right) \text{ء}\text{س}$$

$$\text{س}(\text{س}^2 - 2\text{س} - 8)$$

$$\text{س}(\text{س}-4)(\text{س}+2)$$

$$\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}(\text{س}-4)(\text{س}+2)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-4} + \frac{\text{د}}{\text{س}+2}$$

$$\text{س}^2+1 = \text{أ}(\text{س}-4)(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س})(\text{س}+2) + \text{د}(\text{س})(\text{س}-4)$$

$$\text{س}=0 \Leftarrow 1 = -8\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-1}{8}$$

$$\text{س}=4 \Leftarrow 17 = 24\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{17}{24}$$

$$\text{س}=-2 \Leftarrow 5 = 12\text{د} \Leftarrow \text{د} = \frac{5}{12}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{-1}{8}}{\text{س}} + \frac{\frac{17}{24}}{\text{س}-4} + \frac{\frac{5}{12}}{\text{س}+2} \right) \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{-1}{8} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{17}{24} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-4| + \frac{5}{12} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{ث}$$

⑦ $$\int \frac{\text{س}+5}{(\text{س}+3)(\text{س}^2-4)} \text{ء}\text{س}$$

$$\frac{\text{س}+5}{(\text{س}+3)(\text{س}-2)(\text{س}+2)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+3} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-2} + \frac{\text{جـ}}{\text{س}+2}$$

$$\text{س}+5 = \text{أ}(\text{س}-2)(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}+3)(\text{س}+2) + \text{جـ}(\text{س}+3)(\text{س}-2)$$

$$\text{س}=2 \Leftarrow 7 = 20\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{7}{20}$$

$$\text{س}=-3 \Leftarrow 2 = 5\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{2}{5}$$

$$\text{س}=-2 \Leftarrow 3 = -4\text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{-3}{4}$$

$$\int \left(\frac{\frac{2}{5}}{\text{س}+3} + \frac{\frac{7}{20}}{\text{س}-2} + \frac{\frac{-3}{4}}{\text{س}+2} \right) \text{ء}\text{س}$$

$$\frac{2}{5} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \frac{7}{20} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \frac{3}{4} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{ث}$$

ملاحظة:

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام باستخدام القسمة الطويلة فيصبح التكامل المطلوب = $\int \Big[$ تكامل ناتج القسمة + $\dfrac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$ $\Big]$

حل مباشر (تكامل ناتج القسمة) — حل كسور جزئية (باقي القسمة ÷ المقسوم عليه)

⑧ $\displaystyle\int \left(\frac{\text{س}^2+\text{س}+١}{\text{س}^2-٢٥}\right) \text{ء س}$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline \text{س}^2-٢٥ & \text{س}^2+\text{س}+١ \\ & -(\text{س}^2-٢٥) \\ \hline & \text{س}+٢٦ \end{array}$$

$$= \int \left(١ + \frac{\text{س}+٢٦}{(\text{س}-٥)(\text{س}+٥)}\right) \text{ء س}$$

$$\frac{\text{س}+٢٦}{(\text{س}-٥)(\text{س}+٥)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٥} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٥}$$

$$\text{س}+٢٦ = \text{أ}(\text{س}+٥) + \text{ب}(\text{س}-٥)$$

$\text{س}=٥ \Leftarrow ٣١ = ١٠\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٣١}{١٠}$

$\text{س}=-٥ \Leftarrow ٢١ = -١٠\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-٢١}{١٠}$

$$= \int \left(١ + \frac{\frac{٣١}{١٠}}{\text{س}-٥} + \frac{\frac{-٢١}{١٠}}{\text{س}+٥}\right) \text{ء س}$$

$$= \text{س} + \frac{٣١}{١٠}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٥| - \frac{٢١}{١٠}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٥| + \text{جـ}$$

⑨ $\displaystyle\int \left(\frac{\text{س}^3+٢\text{س}^2+١}{\text{س}^2+\text{س}-٢}\right) \text{ء س}$

$$\begin{array}{r|l} & \text{س}+١ \\ \hline \text{س}^2+\text{س}-٢ & \text{س}^3+٢\text{س}^2+١ \\ & -(\text{س}^3+\text{س}^2-٢\text{س}) \\ \hline & \text{س}^2+٢\text{س}+١ \\ & -(\text{س}^2+\text{س}-٢) \\ \hline & \text{س}+٣ \end{array}$$

$\text{س}^3 \div \text{س}^2 = \text{س}$

$$= \int \left(\text{س}+١ + \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)}\right) \text{ء س}$$

$$\frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}$$

$$\text{س}+٣ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}(\text{س}+٢)$$

$\text{س}=-٢ \Leftarrow ١ = -٣\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-١}{٣}$

$\text{س}=١ \Leftarrow ٤ = ٣\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{٤}{٣}$

$$= \int \left(\text{س}+١ + \frac{\frac{-١}{٣}}{\text{س}+٢} + \frac{\frac{٤}{٣}}{\text{س}-١}\right) \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{٢} + \text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \frac{٤}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$$

(١٠) $\int \left(\frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}^2 س + \text{جا}\,س - ٦} \right) ءس$

نفرض $ع = \text{جا}\,س$

$ءس = \frac{ءع}{\text{جتا}\,س}$

$\int \frac{\text{جتا}\,س}{ع^2 + ع - ٦} \times \frac{ءع}{\cancel{\text{جتا}}\,س}$

$\int \frac{1}{(ع+٣)(ع-٢)} ءع$

$\frac{1}{(ع+٣)(ع-٢)} = \frac{أ}{ع+٣} + \frac{ب}{ع-٢}$

$1 = أ(ع-٢) + ب(ع+٣)$

$ع = -٣ \Leftarrow 1 = -٥أ \Leftarrow أ = \frac{-1}{٥}$

$ع = ٢ \Leftarrow 1 = ٥ب \Leftarrow ب = \frac{1}{٥}$

$= \int \frac{\frac{-1}{٥}}{ع+٣} + \frac{\frac{1}{٥}}{ع-٢} \, ءع$

$= \frac{-1}{٥} \text{لو}_{هـ}|ع+٣| + \frac{1}{٥} \text{لو}_{هـ}|ع-٢| + جـ$

$= \frac{-1}{٥} \text{لو}_{هـ}|\text{جا}\,س+٣| + \frac{1}{٥} \text{لو}_{هـ}|\text{جا}\,س-٢| + جـ$

(١١) $\int \left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - ٣} \right) ءس$

$(هـ^{س})^2$

$ع = هـ^{س}$

$ءس = \frac{ءع}{هـ^{س}} = \frac{ءع}{ع}$

$\int \frac{\cancel{ع}}{ع^2 - ٢ع - ٣} \times \frac{ءع}{\cancel{ع}}$

$$= \int \frac{ع}{(ع-٣)(ع+١)} \, ءع$$

$$\frac{ع}{(ع-٣)(ع+١)} = \frac{أ}{ع-٣} + \frac{ب}{ع+١}$$

$$ع = أ(ع+١) + ب(ع-٣)$$

$$ع=٣ \Leftarrow ٣ = ٤أ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤}$$

$$ع=-١ \Leftarrow -١ = -٤ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٤}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{٣}{٤}}{ع-٣} + \frac{\frac{١}{٤}}{ع+١} \right) ءع$$

$$= \frac{٣}{٤} لو_{هـ}|ع-٣| + \frac{١}{٤} لو_{هـ}|ع+١| + ث$$

$$= \frac{٣}{٤} لو_{هـ}|هـ^{س}-٣| + \frac{١}{٤} لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + ث$$

12 $\int \frac{\sqrt{س}}{س-٤} \, ءس \qquad ع = \sqrt{س}$

$$ءس = \frac{ءع}{\frac{١}{٢\sqrt{س}}} = ٢ع \, ءع$$

$$\int \frac{ع}{ع^{٢}-٤} \cdot ٢ع \, ءع$$

$$\int \frac{٢ع^{٢}}{ع^{٢}-٤} \, ءع$$

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ع^{٢}-٤ \; \overline{) \; ٢ع^{٢}} \\ \ominus \; ٢ع^{٢} - ٨ \\ \hline ٨ \end{array}$$

$$= \int ٢ + \frac{٨}{(ع-٢)(ع+٢)} \, ءع$$

$$\frac{٨}{(ع-٢)(ع+٢)} = \frac{أ}{ع-٢} + \frac{ب}{ع+٢}$$

$$٨ = أ(ع+٢) + ب(ع-٢)$$

$$ع=٢ \Leftarrow ٨ = ٤أ \Leftarrow أ = ٢$$

$$ع=-٢ \Leftarrow ٨ = -٤ب \Leftarrow ب = -٢$$

$$= \int ٢ + \left(\frac{٢}{ع-٢} + \frac{-٢}{ع+٢} \right) ءع$$

$$= ٢ع + ٢لو_{هـ}|ع-٢| - ٢لو_{هـ}|ع+٢| + ث$$

$$= ٢\sqrt{س} + ٢لو_{هـ}|\sqrt{س}-٢| - ٢لو_{هـ}|\sqrt{س}+٢| + ث$$

(13) $\int \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16)}_{\text{ق}} \; \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16) \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دق} = \dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2-16}\,\text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16) - \int \left(\dfrac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-16}\right) \text{دس}$

$2\text{س}^2 \div (\text{س}^2-16) = \boxed{2}$ الناتج

$2\text{س}^2 - 32$

$\boxed{32}$ الباقي

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16) - \int 2 + \dfrac{32}{(\text{س}-4)(\text{س}+4)}\;\text{دس}$

$\dfrac{32}{(\text{س}-4)(\text{س}+4)} = \dfrac{\text{أ}}{(\text{س}-4)} + \dfrac{\text{ب}}{(\text{س}+4)}$

$32 = \text{أ}(\text{س}+4) + \text{ب}(\text{س}-4)$

$\text{س}=4 \Leftarrow 32 = 8\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 4$

$\text{س}=-4 \Leftarrow 32 = -8\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -4$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16) - \int \left(2 + \dfrac{4}{\text{س}-4} - \dfrac{4}{\text{س}+4}\right) \text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-16) - 2\text{س} - 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-4| + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+4| + \text{ث}$

(14) $\int \dfrac{\text{دس}}{(\text{س}+2)\sqrt{\text{س}+11}}$

$\text{ع} = \sqrt{\text{س}+11}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}+11}}} = 2\text{ع}\,\text{دع}$

$= \int \dfrac{2\cancel{\text{ع}}}{(\text{س}+2)\cancel{\text{ع}}}\,\text{دع}$ لكن $\text{ع} = \sqrt{\text{س}+11}$

$\text{ع}^2 = \text{س} + 11$

$\text{ع}^2 - 11 = \text{س}$

$$= \int \left(\frac{2}{\text{ع}^2 - 11 + 2} \right) \text{د}\text{س}$$

$$= \int \frac{2}{\text{ع}^2 - 9} \, \text{د}\text{ع}$$

$(\text{ع} - 3)(\text{ع} + 3)$

$$\frac{2}{(\text{ع}-3)(\text{ع}+3)} = \frac{\text{أ}}{\text{ع}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ع}+3}$$

$$2 = \text{أ}(\text{ع}+3) + \text{ب}(\text{ع}-3)$$

$$\text{ع} = 3$$

$$2 = 6\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 3$$

$$\text{ع} = -3$$

$$2 = -6\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -3$$

$$= \int \frac{3}{\text{ع}-3} + \frac{-3}{\text{ع}+3} \, \text{د}\text{ع}$$

$$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}-3| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}+3| + \text{ث}$$

$$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+11} - 3| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+11} + 3| + \text{ث}$$