العلاقة بين التفاضل والتكامل

الاقتران المكامل،

تعريف: هو الاقتران ت(س) حيث

$$\text{ت}(\text{س}) = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{د}\text{ص}$$

ملاحظات:

إذا كان ت(س) اقتران مكامل للاقتران ق(س) المعرف على [أ، ب] فإن

١- ت(أ) = ٠

٢- ت(س) اقتران متصل دائماً بغض النظر عن ق(س)

٣- ت′(س) = ق(س) لكن باختلاف المجال (مجال ت′(س) =]أ، ب[{/})
مقام الانفصال

٤- $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \text{ت}(\text{جـ})$

٥- $\int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \text{ت}(\text{د}) - \text{ت}(\text{جـ})$

٦- $\text{نها}_{\text{س} \to \text{جـ}} \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{د}\text{ص} = \text{ت}(\text{جـ})$

٧- $\text{نها}_{\text{س} \to \text{د}} \int_{\text{جـ}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{د}\text{ص} = \text{ت}(\text{د}) - \text{ت}(\text{جـ})$

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٥$ ، $\text{س} \in [-١ ، ٨]$

أوجدي ١. $\text{ت}(\text{س})$ ٢- $\int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$

٣- $\int_{٠}^{٤} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$ ٤- $\lim_{\text{س} \to ٢} \int_{-١}^{\text{س}} \text{د}(\text{ص})\, \text{دص}$

٥- $\lim_{\text{س} \to ٣} \int_{٠}^{\text{س}} \text{د}(\text{ص})\, \text{دص}$ ٦- $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(\int_{-١}^{٥} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} \right)$

① $\text{ت}(\text{س}) = \int_{-١}^{\text{س}} (٣\text{ص}^٢ - ٤\text{ص} + ٥)\, \text{دص}$

$= \text{ص}^٣ - ٢\text{ص}^٢ + ٥\text{ص} \Big]_{-١}^{\text{س}}$

$\text{ت}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٨$

② $\int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = \text{ت}(٣) = ٢٧ - ١٨ + ١٥ + ٨ = ٣٢$

③ $\int_{٠}^{٤} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = \text{ت}(٤) - \text{ت}(٠)$

$= ٦٤ - ٣٢ + ٢٠ + ٨ - ٨ = ٥٢$

④ $\lim_{\text{س} \to ٢} \int_{-١}^{\text{س}} \text{د}(\text{ص})\, \text{دص} = \text{ت}(٢) = ٨ - ٨ + ١٠ + ٨ = ١٨$

⑤ $\lim_{\text{س} \to ٣} \int_{٠}^{\text{س}} \text{د}(\text{ص})\, \text{دص} = \text{ت}(٣) - \text{ت}(٠)$

$= ٣٢ - ٨ = ٢٤$

⑥ $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(\int_{-١}^{٥} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} \right) = \text{صفر}$

note:

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} \int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = \text{صفر}$

لأن ناتج التكامل المحدود عدد ثابت
ومشتقة الثابت صفر

إذا كان $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) ءص = جتاس + ٢ جاس + جـ

أوجدي : ١- قيمة جـ

٢- $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ق(س) ءس

٣- $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ ق(ص) ءص

٤- $\lim_{س \to \pi}$ $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) ءص

① ت(١) = ٠ ⇐ جتا ٠ + ٢ جا ٠ + جـ = ٠

١ + ٠ + جـ = ٠ ⇐ جـ = −١

② $\int_{\boxed{٠}}^{\frac{\pi}{٢}}$ ق(س) ءس = ت$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

= جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ جا $\frac{\pi}{٢}$ −١ = ٠ + ٢ − ١ = ١

③ $\int_{\boxed{\frac{\pi}{٤}}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ ق(ص) ءص = ت$\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)$ − ت$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

=(جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ جا $\frac{٣\pi}{٤}$ − ١) − (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ جا $\frac{\pi}{٤}$ − ١)

= $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ + $\cancel{\frac{٢}{\sqrt{٢}}}$ − ١ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\cancel{\frac{٢}{\sqrt{٢}}}$ $\cancel{+١}$

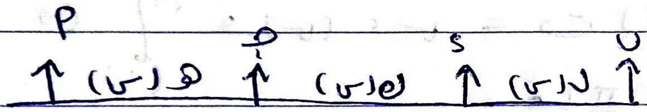
= $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ = $-\sqrt{٢}$

④ $\lim_{س \to \pi}$ $\int_{\boxed{٠}}^{س}$ ق(ص) ءص = ت(π) = −١ + ٠ −١ = −٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{هـ(س)} & \text{أ} \le \text{س} < \text{جـ} \\ \text{ع(س)} & \text{جـ} \le \text{س} \le \text{د} \\ \text{ل(س)} & \text{د} < \text{س} \le \text{ب} \end{cases}$

فإن :

$$\text{ت(س)} = \begin{cases} \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{هـ(ص) دص} & \text{أ} \le \text{س} \le \text{جـ} \\ \text{ت(جـ)} + \int_{\text{جـ}}^{\text{س}} \text{ع(ص) دص} & \text{جـ} \le \text{س} \le \text{د} \\ \text{ت(د)} + \int_{\text{د}}^{\text{س}} \text{ل(ص) دص} & \text{د} \le \text{س} \le \text{ب} \end{cases}$$



إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^٢ + ١ & -١ \le \text{س} \le ١ \\ ٤\text{س} + ٣ & ١ < \text{س} \le ٣ \\ ٥ & ٣ < \text{س} \le ١٠ \end{cases}$

أوجدي : ١- ت(س)   ٢- $\int_{-١}^{٧} \text{ق(س) دس}$

٣- $\int_{٢}^{٥} \text{ق(س) دس}$ ٤- $\lim_{\text{س} \to ٣} \int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$

٥- $\lim_{\text{س} \to ١} \int_{\text{س}}^{٦} \text{ق(ص) دص}$ ٦- $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(\int_{-١}^{٧} \text{ق(ص) دص} \right)$

٧- $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(\int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} \right)$

① عندما $-١ \leqslant س \leqslant ١$ ، $ت(س) = \int_{-١}^{س} (٣ص^{٢} + ١) \, ءص$

$= ص^{٣} + ص \Big|_{-١}^{س} = \boxed{س^{٣} + س + ٢}$

عندما $١ < س \leqslant ٣$:

$ت(س) = ت(١) + \int_{١}^{س} (٤ص + ٣) \, ءص$

$= ٤ + (٢ص^{٢} + ٣ص \Big|_{١}^{س})$

$= ٤ + (٢س^{٢} + ٣س - ٥)$

$= \boxed{٢س^{٢} + ٣س - ١}$

عندما $٣ < س \leqslant ١٠$:

$ت(س) = ت(٣) + \int_{٣}^{س} ٥ \, ءص$

$= ٢٦ + ٥(س - ٣)$

$= ٢٦ + ٥س - ١٥ = \boxed{٥س + ١١}$ ∴

$$ت(س) = \begin{cases} س^{٣} + س + ٢ & -١ \leqslant س \leqslant ١ \\ ٢س^{٢} + ٣س - ١ & ١ \leqslant س \leqslant ٣ \\ ٥س + ١١ & ٣ \leqslant س \leqslant ١٠ \end{cases}$$

للتأكيد ← $ت(-١) =$ ∴

ت(س) متصل يعني

النهاية من اليمين تساوي

النهاية من اليسار

اشتقاق القواعد الثلاث

يعطي قواعد د(س))

② $\int_{-١}^{٧}$ د(س) ءس = ت(٧) = ٤٦

③ $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس = ت(٥) − ت(٢)

= ٣٦ − ١٣ = ٢٣

④ نها$_{س \to ٣}$ $\int_{-١}^{س}$ د(ص) ءص = ت(٣)

= ٢٦

⑤ نها$_{س \to ١}$ $\int_{س}^{٦}$ د(ص) ءص = ت(٦) − ت(١)

= ٤١ − ٤ = ٣٧

⑥ $\frac{ء}{ءس}$ ($\int_{-١}^{٧}$ د(س) ءس) = صفر

⑦ تَ(س) =

٣س² + ١ ، -١ < س < ١

٤س + ٣ ، ١ < س < ٣

٥ ، ٣ < س < ١٠

غ.م ، س = -١، ١٠

غ.م ، س = ١، ٣

عند س = ١

تَ(١)⁻ = ٤

تَ(١)⁺ = ٧ ⇐ تَ(١) غ.م

تَ(٢)⁻ = ١٥

تَ(٢)⁺ = ٥ ⇐ تَ(٢) غ.م

إذا كان $ق(س) = |٣س^٢ - ٦س|$ ، $س \in [-٢، ٢]$

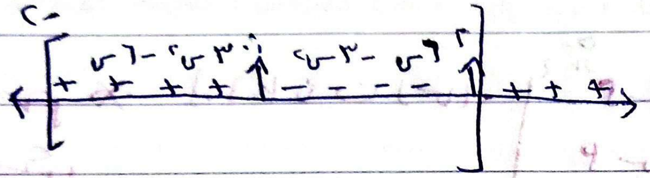
أوجدي: ① $ت(س)$ ② $\int_{-٢}^{١} ق(ص)\, دص$

③ $\lim_{س \to ٠} \int_{س}^{-٢} ق(ص)\, دص$

$٣س^٢ - ٦س = ٠$ ∴

$٣س\,(س - ٢) = ٠$ ∴

$س = ٠$ $س = ٢$



$-٢ \leq س < ٠$:

$ت(س) = \int_{-٢}^{س} (٣ص^٢ - ٦ص)\, دص$

$= ص^٣ - ٣ص^٢ \Big|_{-٢}^{س}$

$= \boxed{س^٣ - ٣س^٢ + ٢٠}$

$٠ \leq س \leq ٢$

$ت(س) = ت(٠) + \int_{٠}^{س} (٦ص - ٣ص^٢)\, دص$

$= ٢٠ + \left(٣ص^٢ - ص^٣ \Big|_{٠}^{س}\right)$

$= \boxed{٣س^٢ - س^٣ + ٢٠}$

$$ت(س) = \begin{cases} س^٣ - ٣س^٢ + ٢٠ & -٢ \leq س \leq ٠ \\ ٣س^٢ - س^٣ + ٢٠ & ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

② $\int_{-٣}^{١}$ ق(ص) دص = ت(١) -

= ٢ - ١ + ٢٠ = ٢٢

③ نها س←٠ $\int_{س}^{-٢}$ ق(ص) دص

= ت(-٢) - ت(٠)

= ١٠ - ٢٠ = - ٢٠

مهم تكرر

إذا كان ت(س) = { أس٢ + ٢س + ٣ ، ١ ≥ س ≥ ٣ ؛ أس٢ - ٣بس - ١ ، ٣ < س ≥ ٥ }

$\frac{-١٠}{٣}$ ، $\overset{-٥}{أ}$

هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) المعرف على [١ ، ٥]

أوجدي : ① قيم أ ، ب ② $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس

① ت(١) = ٠ ⟸ أ + ٢ + ٣ = ٠ ⟸ أ = -٥

نها س←٣⁺ ت(س) = نها س←٣⁻ ت(س)

-٤٥ + ٦ + ٣ = -٤٥ - ٩ب - ١

١٠ = -٩ب

ب = $\frac{-١٠}{٩}$

② $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ت(٤)

= (-٥ × ١٦ + $\frac{١٠}{٣}$ × ٤ - ١)

= (-٨٠ + $\frac{٤٠}{٣}$ - ١) = $\frac{٤٠}{٣}$ - ٨١

= $\frac{٤٠ - ٢٤٣}{٣}$

= $\frac{-٢٠٣}{٣}$

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل :

إذا كان ق(س) اقتران متصل على [أ ، ب] وكان ت(س) = $\int_{أ}^{س} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

فإن تَ(س) = ق(س)

ملاحظات :

١. يعتبر ت(س) أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س)

٢. يمكن استخدام م(س) بنفس استخدامات ق(س) لنجد جميع تكاملات ق(س) المحدودة بالتعويض المباشر في م(س) ونجد قيم ق(س) المتصل بالتعويض المباشر في مَ(س)

إذا كان $\int_{١}^{س} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + \text{جـ}$
وكان ق(س) اقتران متصل

أوجدي : ١. قيمة جـ ٢. $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

٣. $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \int_{١}^{س} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$ ٤. ق(٣) ، قَ(٣)

① $\text{ت}(١) = ٠ \Leftarrow ١ + ٣ - ٢ + \text{جـ} = ٠ \quad \therefore$

$\text{جـ} = -٢$

$\text{ت}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٢$

② $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ت}(٣)$

$= ٢٧ + ٢٧ - ٦ - ٢ = ٤٦$

ن٤ $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص = ت(٢) - ت(١)

= ٨ + ١٢ - ٤ - ٢ + ٢

= ١٦

④ ق(س) = تَ(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٢

ق(٣) = ٢٧ + ١٨ - ٢ = ٤٣

قَ(س) = ٦س + ٦

قَ(٣) = ١٨ + ٦ = ٢٤

* مهم * إذا كان ق(س) اقتران متصل وكان

$\int_{١}^{س}$ (ق(ص) + ٣ص^{٢}) دص = س^{٢} + ٥س - ٦

أوجدي : ١- ق(٣) ، قَ(٢)

٢- $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس

نشتق الطرفين

① ⇐ ق(س) + ٣س^{٢} = ٢س + ٥

ق(س) = -٣س^{٢} + ٢س + ٥

ق(٢) = -١٢ + ٤ + ٥ = -٣

قَ(س) = -٦س + ٢

قَ(٢) = -١٢ + ٢ = -١٠

② $\int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس = \int_{١}^{٣} -٣س^٢ + ٢س + ٥ \, ءس$

$= -س^٣ + س^٢ + ٥س \Big]_{١}^{٣}$

$= (-٢٧ + ٩ + ١٥) - (-١ + ١ + ٥)$

$= -٣ - ٥ = -٨$

هام إذا كان ق(س) اقتران متصل وكان $\int_{١}^{س} \frac{ق(ص)}{ص^٢+٣}\, ءص = س^٣ + س$

أوجدي: ① ق(١) ، قَ(١)

② $\int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس$

نشتق الطرفين

① $\frac{ق(س)}{س^٢+٣} = ٣س^٢ + ١$

$ق(س) = ٣س^٤ + س^٢ + ٩س^٢ + ٣$

$ق(س) = ٣س^٤ + ١٠س^٢ + ٣$

$ق(١) = ٣ + ١٠ + ٣ = ١٦$

$قَ(س) = ١٢س^٣ + ٢٠س$

$قَ(١) = ١٢ + ٢٠ = ٣٢$

② $\int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس = \int_{١}^{٢} (٣س^٤ + ١٠س^٢ + ٣)\, ءس$

$= \frac{٣س^٥}{٥} + \frac{١٠س^٣}{٣} + ٣س \Big]_{١}^{٢}$

$= \frac{٩٦}{٥} + \frac{٨٠}{٣} + ٦ - \frac{٣}{٥} - \frac{١٠}{٣} - ٣$

مهم ت إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣ + \int_{٠}^{\text{س}} \left(\frac{١ + \text{جاص}}{\text{ص}^٢ + ١}\right) \text{دص}$

أوجدي اقتران كثير حدود ل(س) من الدرجة الثانية بحيث

$\text{ل}(٠) = \text{ق}(٠)$ ، $\text{لَ}(٠) = \text{قَ}(٠)$ ، $\text{لً}(٠) = \text{قً}(٠)$

نفرض أن $\text{ل}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^٢ + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$ $\text{أ} \neq ٠$

$\text{ل}(٠) = \text{ق}(٠)$

$\text{ج} = ٣ + \int_{٠}^{٠} \left(\frac{١ + \text{جاس}}{\text{س}^٢ + ١}\right) \text{دس}$

$\boxed{\text{ج} = ٣}$

$\text{لَ}(٠) = \text{قَ}(٠)$

$\text{ب} = ١$

$\text{لَ}(\text{س}) = ٢\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\text{لَ}(٠) = \text{ب}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١ + \text{جاس}}{\text{س}^٢ + ١}$

$\text{قَ}(٠) = \frac{١}{١} = ١$

$\text{لً}(٠) = \text{قً}(٠)$

$\text{لً}(\text{س}) = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{لً}(٠) = ٢\text{أ}$

$٢\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$

$\text{قً}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢ + ١)(\text{جتا س}) - (١ + \text{جاس})(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ + ١)^٢}$

$\text{قً}(٠) = \frac{١ - ٠}{١} = ١$

$\text{ل}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} + ٣$

مهم ت موسى إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} \int_{٣}^{\text{س}} (\text{ص}^٢ - ٣\text{قَ}(\text{ص}))\, \text{دص}$

أوجدي قَ(٣)

$قَ(س) = \frac{١}{س}\left(س^٢ - ٣قَ(س)\right) + \int_{٣}^{س}\left(ص^٢ - ٣قَ(ص)\right)دص \times \frac{-١}{س^٢}$

$قَ(٣) = \frac{١}{٣}\left(٩ - ٣قَ(٣)\right) + \cancel{\int_{٣}^{٣}\left(ص^٢ - ٣قَ(ص)\right)دص \times \frac{-١}{٩}}$

$\therefore$

$قَ(٣) = ٣ - قَ(٣)$

$٢قَ(٣) = ٣$

$قَ(٣) = \frac{٣}{٢}$

* تغير اسم المتغير لا يؤثر على الحل إطلاقاً *

أي بالتوجيهي $\int_{٣}^{س}\left(د^٢ - ٣قَ(د)\right)دد$

* ت *

دوائر
\+
قسم خارجي

إذا كان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) وكان $\int_{١}^{٥}(م - هـ)(س) = ٢٠$ أوجدي $\int_{٢}^{٤}\left((هـ - م)(س)\right)(٢س)\,دس$

$\int_{١}^{٥} جـ\,دس = ٢٠$

$جـ(٥ - ١) = ٢٠$

$جـ = ٥$

$\int_{٢}^{٤} -٥(٢س)\,دس = -٥س^٢\Big|_{٢}^{٤}$

$= -٥(١٦ - ٤) = -٦٠$

إذا كان م(س) = ٥ + ظا²س اقتران أصلي للاقتران المتصل ق(س)

أوجدي ① $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٥ق(س)\,دس$ ② $ق(\frac{\pi}{٤})$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٥ق(س)\,دس$

$= \underline{٥قَ(س)}\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

↙ م(س)

① $= ٥\left(\left(٥ + ظا^٢\frac{\pi}{٤}\right) - \left(٥ + ظا^٢ ٠\right)\right) \Leftarrow$

$= ٥[٥ + ١ - ٥] = ٥$

② $ق(س) = مَ(س) = ٢\,ظا\,س\,قا^٢س$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = ٢\,ظا\frac{\pi}{٤}\,قا^٢\frac{\pi}{٤}$

$= ٢ \times ١ \times (\sqrt{٢})^٢ = ٤$

تطبيقات على التكامل المحدود.

أولاً : المساحات

الحالة الأولى: مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س)
ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

هي $م = \left| \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \right|$

عند حساب هذه المساحة نجد أصفار ق(س) فإذا كانت أصفار ق(س) $\in]أ ، ب[$ فإننا نجزئ المساحة ثم نجري التكاملات المطلوبة

أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين ق(س) = $٣ س^٢ + ٢$
ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٣

نجد أصفار ق(س)

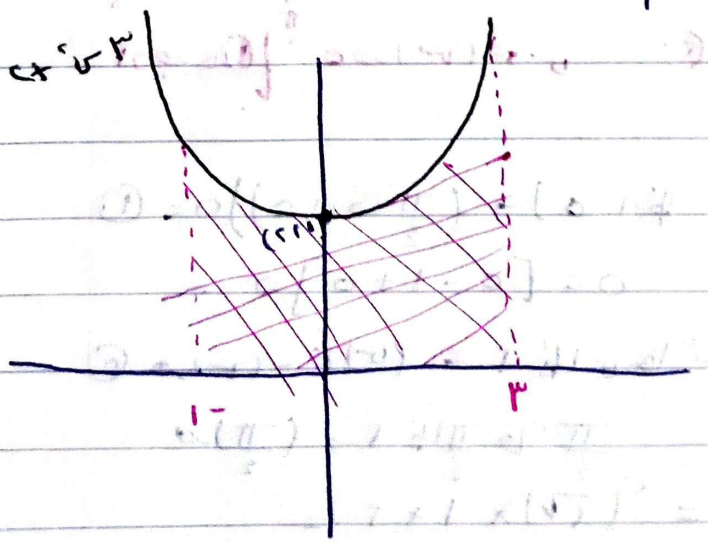
$٣ س^٢ + ٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = \frac{-٢}{٣}$ ×

$م = \left| \int_{-١}^{٣} (٣ س^٢ + ٢)\, دس \right|$

$= \left| \left. س^٣ + ٢ س \right|_{-١}^{٣} \right|$

$= \left| (٢٧ + ٦) - (-١ - ٢) \right|$

$= ٣٦$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين ق(س) = ٦س - ٣س٢
ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ٢

نجد أصفار ق(س)

٦س - ٣س٢ = ٠

٣س (٢ - س) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

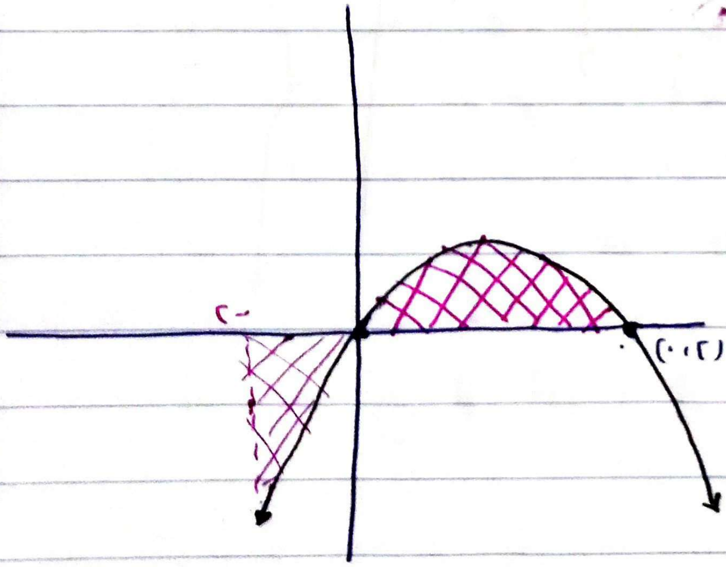
بينهن ✓ ، على الطرف ✗

م = $\left| \int_{-٢}^{٠} (٦س - ٣س^{٢}) \, ءس \right| + \left| \int_{٠}^{٢} (٦س - ٣س^{٢}) \, ءس \right|$

= $\left| ٣س^{٢} - س^{٣} \Big|_{-٢}^{٠} \right| + \left| ٣س^{٢} - س^{٣} \Big|_{٠}^{٢} \right|$

= | ٠ - (١٢ + ٨) | + | ١٢ - ٨ - ٠ |

= ٢٠ + ٤ = ٢٤



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين د(س) = ٢س − ٢
ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣

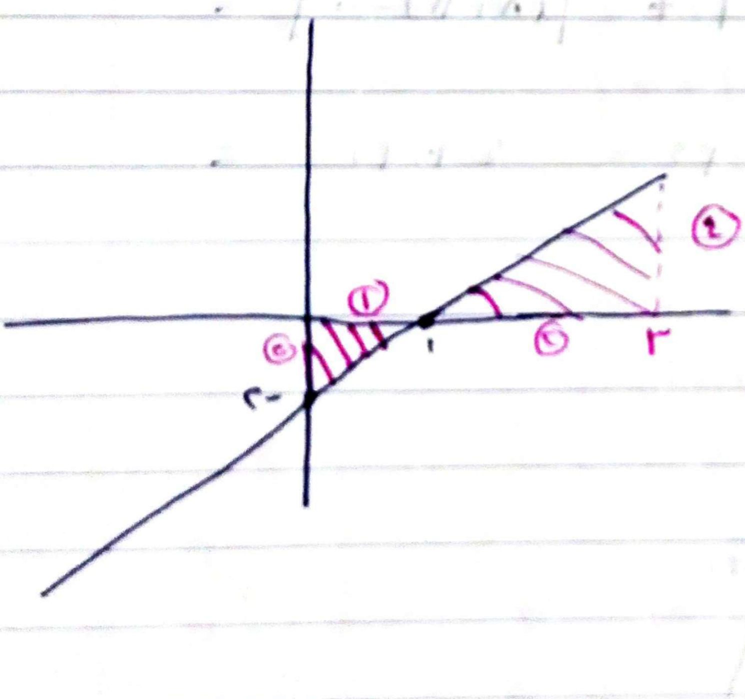
٢س − ٢ = ٠ ∴ س = ١ ∈ ✓

$$م = \left| \int_{٠}^{١} (٢س - ٢)\, ءس \right| + \left| \int_{١}^{٣} (٢س - ٢)\, ءس \right|$$

$$= \left| س^{٢} - ٢س \Big]_{٠}^{١} \right| + \left| س^{٢} - ٢س \Big]_{١}^{٣} \right|$$

$$= \left| ١ - ٢ - ٠٠ \right| + \left| ٩ - ٦ - ١ + ٢ \right|$$

$$= ١ + ٤ = ٥$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين ق(س) = ٤ $س^{٣}$ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٢

$٤س^{٣} = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ٠$

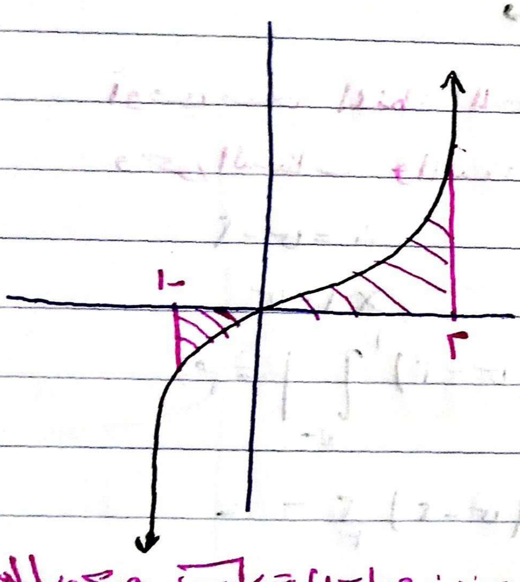
س = ٠ ✓

$م = \left|\int_{-١}^{٠} ٤س^{٣} \, ءس\right| + \left|\int_{٠}^{٢} ٤س^{٣} \, ءس\right|$

$= \left|س^{٤}\Big|_{-١}^{٠}\right| + \left|س^{٤}\Big|_{٠}^{٢}\right|$

$= |٠ - ١| + |١٦ - ٠|$

$= ١ + ١٦ = \boxed{١٧}$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = $\sqrt{س}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤

$\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$ X

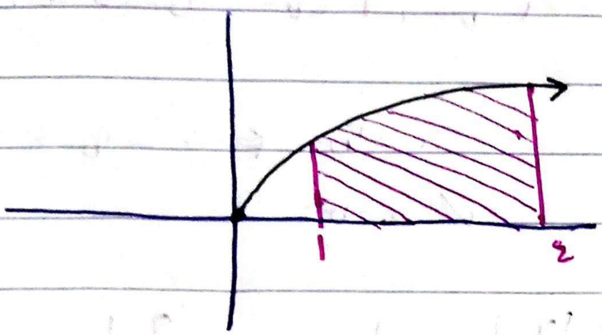
$م = \left|\int_{١}^{٤} س^{\frac{١}{٢}} \, ءس\right|$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\Big|_{١}^{٤}$

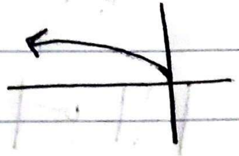
$= \frac{٢}{٣} (\sqrt{س})^{٣}\Big|_{١}^{٤}$

الجذر التربيعي دائماً موجب فوق السينا ت يعني يمكن عدم وضع القيمة المطلقة

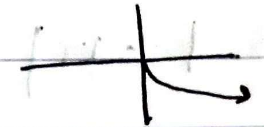
$\frac{٢}{٣}(٨-١) = \frac{١٤}{٣}$



رسمة $\sqrt{-س}$



رسمة $-\sqrt{س}$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة مابين منحنى $د(س) = \sqrt{٢ - س}$
ومحور السينات والمستقيمين $س = -٧$ ، $س = ١$

$٢ - س = ٠ \therefore$

$س = ٢$ ✗

$م = \left| \int_{-٧}^{١} (٢ - س)^{\frac{١}{٢}} \, ءس \right|$

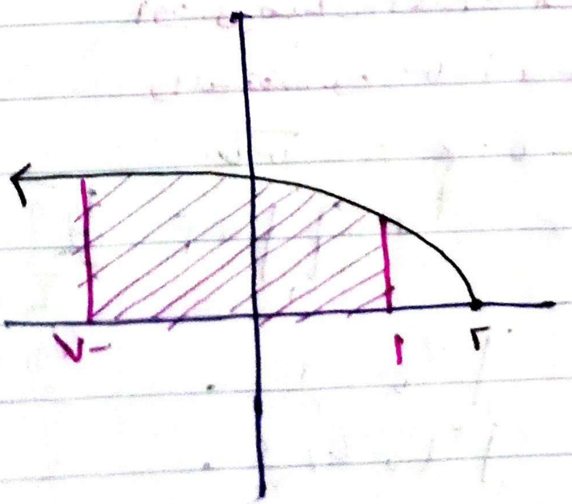
$= -\frac{٢}{٣} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{-٧}^{١}$

$= -\frac{٢}{٣} \left(\sqrt{٢ - س}\right)^{٣} \Big|_{-٧}^{١}$

$= -\frac{٢}{٣} (١ - ٢٧)$

$= -\frac{٢}{٣} \times -٢٦$

$= \frac{٥٢}{٣}$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة مابين ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ١

ص = ∴ ✓

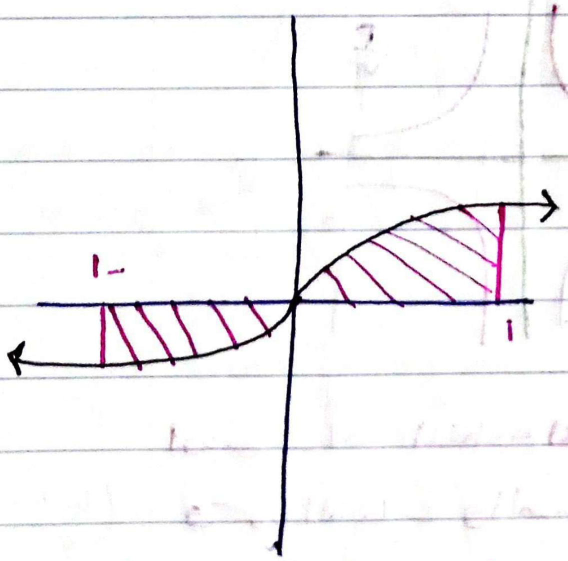
$$\text{م} = \left|\int_{-١}^{٠} \text{س}^{\frac{١}{٣}}\ \text{ءس}\right| + \left|\int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{١}{٣}}\ \text{ءس}\right|$$

$$= \left|\frac{٣}{٤}\ \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\Big|_{-١}^{٠}\right| + \left|\frac{٣}{٤}\ \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\Big|_{٠}^{١}\right|$$

$$= \left|\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٤}\Big|_{-١}^{٠}\right| + \left|\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٤}\Big|_{٠}^{١}\right|$$

$$= \left|\frac{٣}{٤}(٠-١)\right| + \left|\frac{٣}{٤}(١-٠)\right|$$

$$= \frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة مابين ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}+٣}$ ومحور السينات في الفترة [-٢ ، ١]

$$\frac{٣}{\text{س}+٣} = ٠ \Leftarrow ٣ = ٠ \ \therefore\ ✗$$

$$\text{م} = \left|\int_{-٢}^{١} \frac{٣}{\text{س}+٣}\ \text{ءس}\right|$$

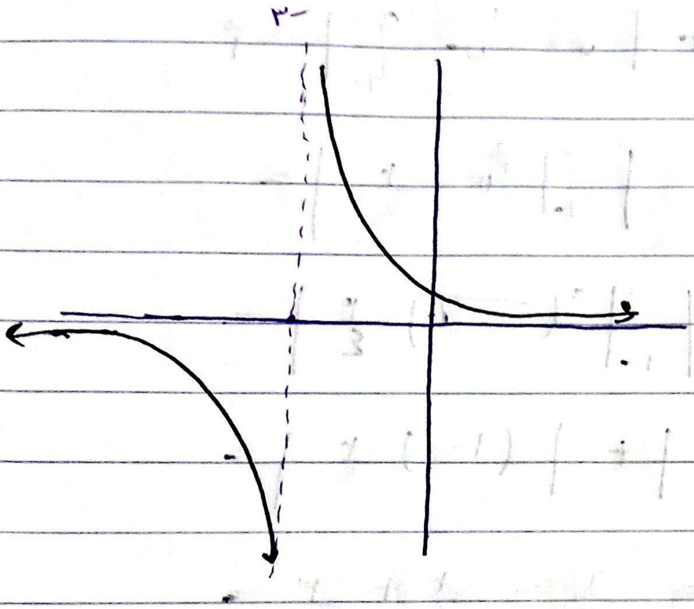
١ الثابت على معامل س في لوغاريتم المقام

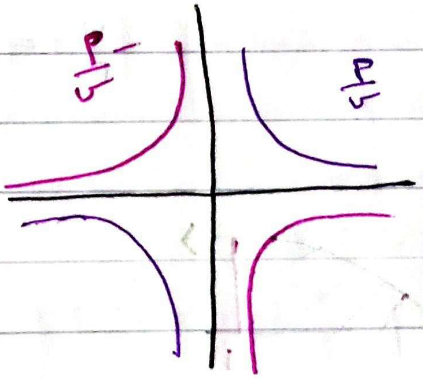
$$= \left| ٣ \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+٣| \, \Big|_{٠}^{١} \right|$$

$$= \left| ٣ \left(\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١ \right) \right|$$

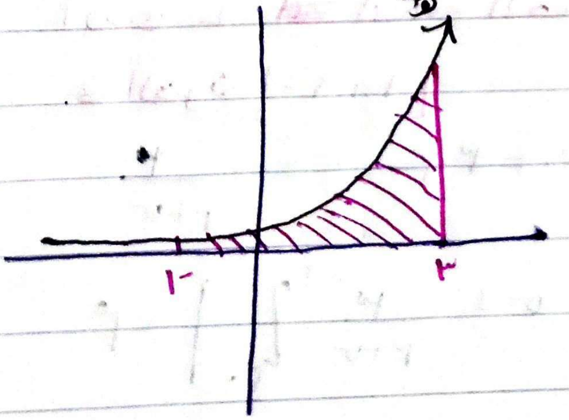
$$= ٣ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٤$$

إذا كان كسر حقيقي ← لوغاريتمه سالب





أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = هـ^س
ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٣

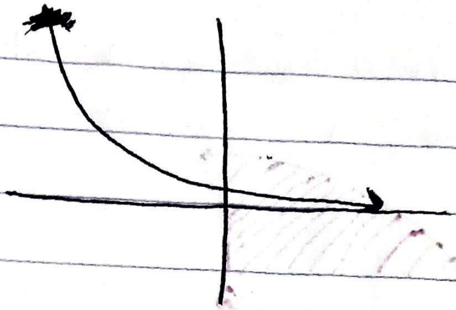


$$\text{هـ}^{\text{س}} = ٠ \quad \times$$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٣} \text{هـ}^{\text{س}} \, ء\text{س}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{-١}^{٣}$$

$$= \text{هـ}^{٣} - \text{هـ}^{-١}$$



رسمة $هـ^{-س}$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة مابين منحنى $ق(س) = لو_{هـ} س$ ومحور السينات في $[\frac{1}{هـ} ، هـ^{2}]$

$لو_{هـ} س = 0 \Leftarrow س = هـ^{0} = 1$ ✓

$$م = \left| \int_{\frac{1}{هـ}}^{1} لو_{هـ} س \, دس \right| + \left| \int_{1}^{هـ^{2}} لو_{هـ} س \, دس \right|$$

$$= \left| س لو_{هـ} س - س \Big]_{\frac{1}{هـ}}^{1} \right| + \left| س لو_{هـ} س - س \Big]_{1}^{هـ^{2}} \right|$$

$هـ = لو_{هـ} س \xrightarrow{\times} هـ = س$ ، $دهـ = دس$

$دهـ = \frac{1}{س} دس \xrightarrow{\int -}$

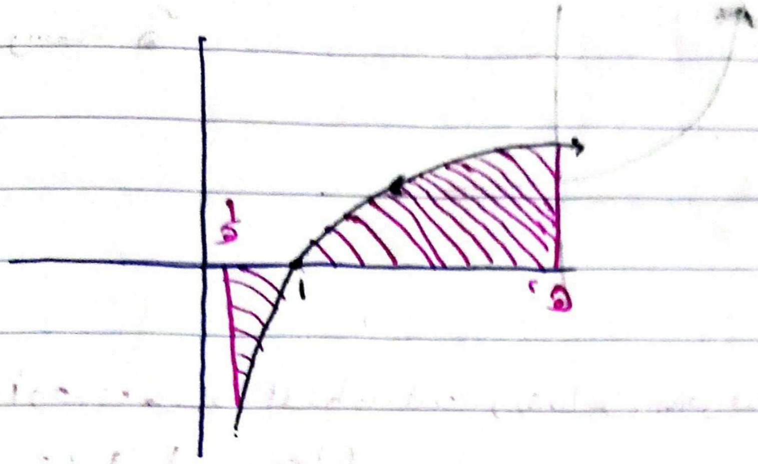
$$\int لو_{هـ} س \, دس = س لو_{هـ} س - س$$

$$= \left| (1 لو_{هـ} 1 - 1) - (\frac{1}{هـ} لو_{هـ} \frac{1}{هـ} - \frac{1}{هـ}) \right| + \left| (هـ^{2} لو_{هـ} هـ^{2} - هـ^{2}) - (1 لو_{هـ} 1 - 1) \right|$$

$$= \left| -1 + \frac{2}{هـ} \right| + \left| هـ^{2} + 1 \right|$$

$$= 1 - \frac{2}{هـ} + هـ^{2} + 1$$

$$= 2 + هـ^{2} - \frac{2}{هـ}$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى د(س) = جتا س ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = π

جتا س = ٠

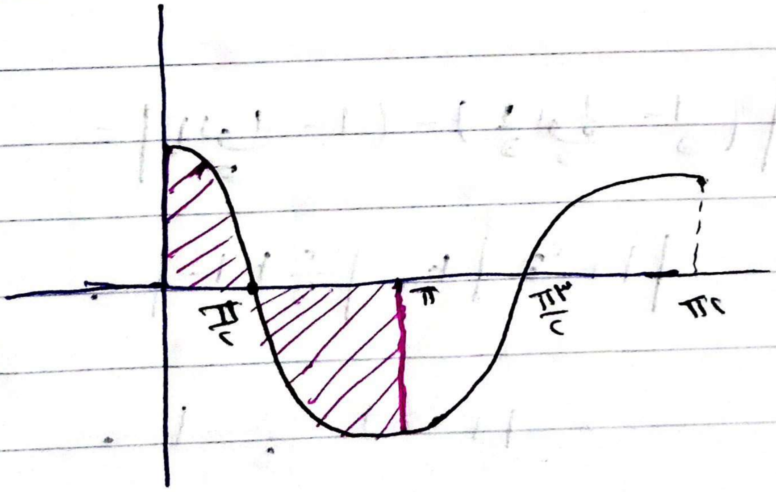
$س = \frac{\pi}{٢}$ ✓ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ✗

$$م = \left| \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\, س \, ء س \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جتا\, س \, ء س \right|$$

$$= \left| جا\, س \Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \right| + \left| جا\, س \Big]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \right|$$

$$= |١ - ٠| + |٠ - ١|$$

$$= ١ + ١ = ٢$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = جا س ومحور السينات والمستقيمين س = $\frac{\pi}{٤}$ ، س = $\frac{٣\pi}{٤}$

جا س = ٠ :

س = $\overset{\times}{٠}$ ، $\overset{\times}{\pi}$ ، $\overset{\times}{٢\pi}$

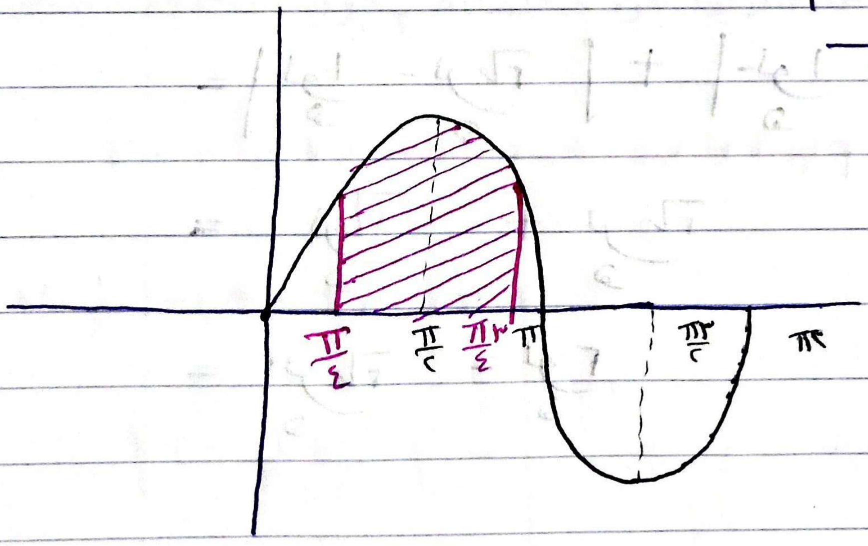
$$م = \left| \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} جا\, س \; ء س \right|$$

$$= \left| -جتا\, س \Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} \right|$$

$$= \left| -جتا \frac{٣\pi}{٤} + جتا \frac{\pi}{٤} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \right|$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = ظاس ومحور السينات والمستقيمين $س = \frac{-\pi}{٤}$ ، $س = \frac{\pi}{٤}$

ظاس = ٠

$س = ٠ ، \overset{\times}{\pi} ، \overset{\times}{٢\pi} ، \overset{\times}{-\pi} ، \overset{\times}{-٢\pi}$

$$م = \left| \int_{\frac{-\pi}{٤}}^{٠} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس} \right| + \left| \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس} \right|$$

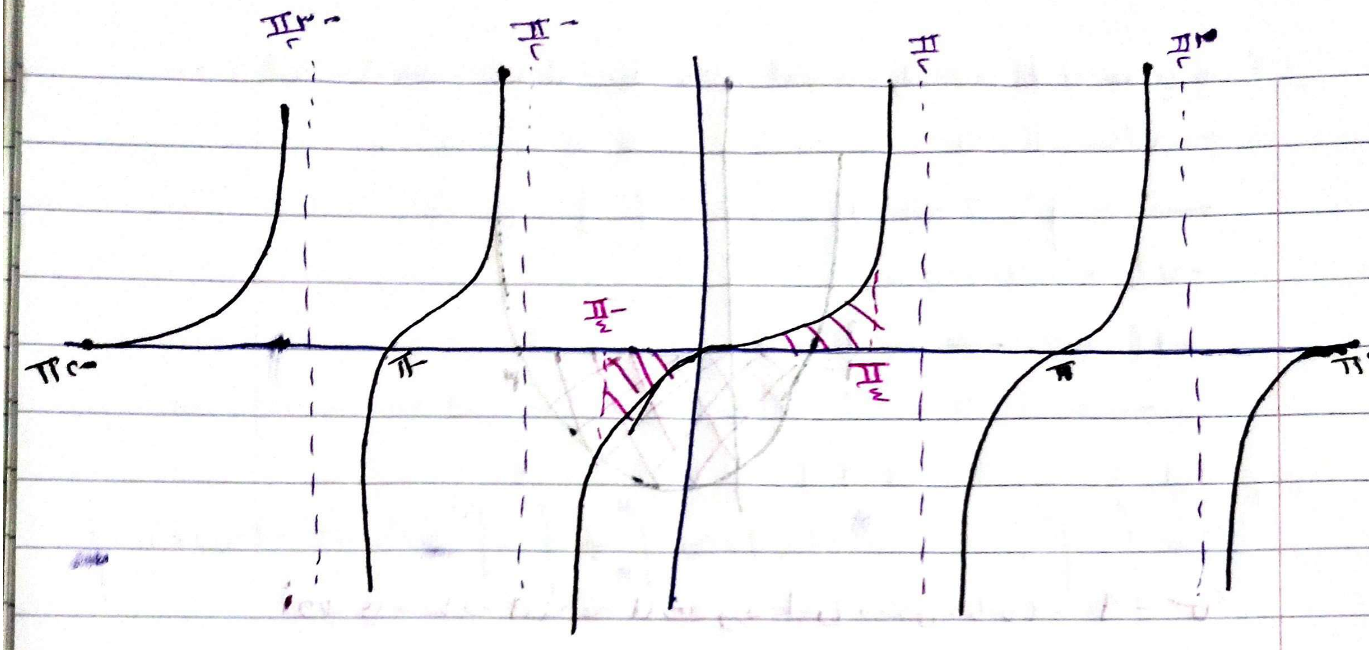
$$= \left| -\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| \Big]_{\frac{-\pi}{٤}}^{٠} \right| + \left| -\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| \Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \right|$$

$$= \left| ٠ + \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\sqrt{٢}} \right| + \left| -\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٠ \right|$$

$$= \left| \text{لو}_{\text{هـ}} ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢} \right| + \left| -\text{لو}_{\text{هـ}} ١ + \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢} \right|$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢}$$

$$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٢$$



الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) ومحور السينات

عند حساب هذه المساحة نجد حدود التكامل

حدود التكامل هي أصفار ق(س)

فإذا كان للاقتران ق(س) صفران فقط نكامل مباشرة

وإذا كان هنالك أكثر من صفرين نجزئ المساحة ثم نجري التكاملات المطلوبة

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = س² − ٢س − ٣ ومحور السينات

نجد حدود التكامل

س² − ٢س − ٣ = ٠

(س − ٣)(س + ١) = ٠

س = −١ ، ٣

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{٣} (\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣)\, \text{ء س} \right|$$

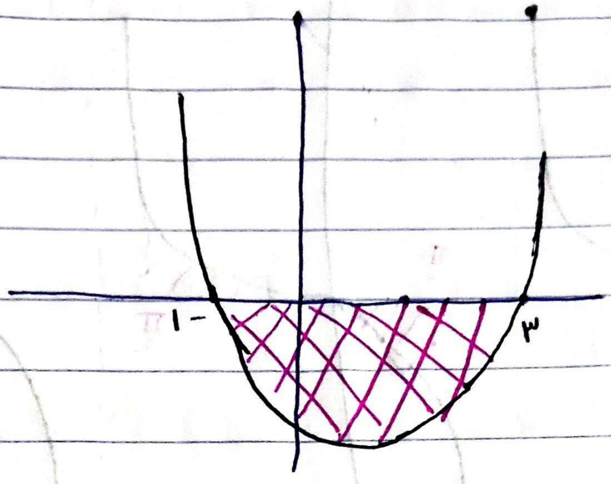
$$= \left| \frac{\text{س}^٣}{٣} - \text{س}^٢ - ٣\text{س} \Big|_{-١}^{٣} \right|$$

$$= \left| (٩ - ٩ - ٩) - (\frac{-١}{٣} - ١ + \frac{١}{٣}) \right|$$

$$= \left| -٩ + \frac{١}{٣} - ٢ \right|$$

$$= \left| -١١ + \frac{١}{٣} \right|$$

$$= \boxed{\frac{٣٢}{٣}}$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى د(س) = ٩ - س^٢ ومحور السينات

$٩ - س^٢ = ٠$

$٩ = س^٢ \Leftarrow س = -٣ ، ٣$

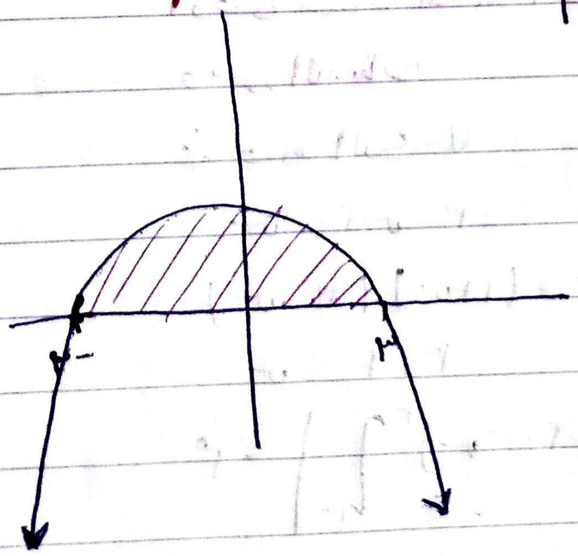
$م = \left| \int_{-٣}^{٣} ٩ - س^٢ \, د س \right|$

$= ٩س - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-٣}^{٣}$

$= \left| (٢٧ - ٩) - (-٢٧ + ٩) \right|$

$= |١٨ - - ١٨|$

$= \boxed{٣٦}$



أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ ومحور السينات

$\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$

$\text{س} = ٠ ، ٢ ، -١$

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{٠} (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س})\, \text{ء}\text{س} \right| + \left| \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س})\, \text{ء}\text{س} \right|$$

$$= \left| \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} \Big]_{-١}^{٠} \right| + \left| \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} \Big]_{٠}^{٢} \right|$$

$$= \left| ٠ - \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - ١\right) \right| + \left| \cancel{٤} - \frac{٨}{٣} - ٤ - ٠ \right|$$

$$= \frac{٥}{١٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{٣٧}{١٢}$$

الرسمة غير مطلوبة

الحالة الثالثة: مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س)
ومنحنى هـ(س) والمستقيمين $س = أ$ ، $س = ب$

هي $م = \left| \int_{أ}^{ب} (ق - هـ)(س) \, ء س \right|$.

عند حساب هذه المساحة نجد نقاط تقاطع ق(س) مع هـ(س)
وذلك بحل المعادلة ق(س) = هـ(س)
فإذا كانت نقاط التقاطع ∈]أ، ب[نجزئ المساحة ثم نجزئ التكاملات المطلوبة.

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى $ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢$ ومنحنى $هـ(س) = ٢س^٢ + س$. والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٢$.

$$ق(س) = هـ(س)$$

$$٣س^٢ + ٢س - ٢ = ٢س^٢ + س$$

$$\boxed{س^٢ + س - ٢} = ٠ \longrightarrow ق - هـ$$

$$(س + ٢)(س - ١) = ٠$$

$$س = -٢ \ \times \quad ، \quad س = ١ \ \checkmark$$

$$م = \left| \int_{٠}^{١} (س^٢ + س - ٢) \, ء س \right| + \left| \int_{١}^{٢} (س^٢ + س - ٢) \, ء س \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - ٢س \right]_{٠}^{١} \right| + \left| \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - ٢س \right]_{١}^{٢} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢ - ٠ \right| + \left| \frac{٨}{٣} + ٢ - ٤ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢ \right|$$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى د(س) = $س^{٢}$ + ٣س − ١

ومنحنى هـ(س) = س + ٢ والمستقيمين س = −١ ، س = ١

نجد نقاط التقاطع :

$س^{٢}$ + ٣س − ١ = س + ٢

$س^{٢}$ + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣) (س − ١) = ٠

س = −٣ ، س = ١

× ×

م = $\left| \int_{-١}^{١} (س^{٢} + ٢س − ٣) \, ء س \right|$

= $\left| \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} − ٣س \Big|_{-١}^{١} \right|$

= $\left| (\frac{١}{٣} + ١ − ٣) − (−\frac{١}{٣} + ١ + ٣) \right|$

= $\left| \frac{٢}{٣} − ٦ \right|$ = $\frac{١٦}{٣}$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى د(س) = جتا س

ومنحنى ص = ٢ والمستقيمين س = ٠ ، س = π

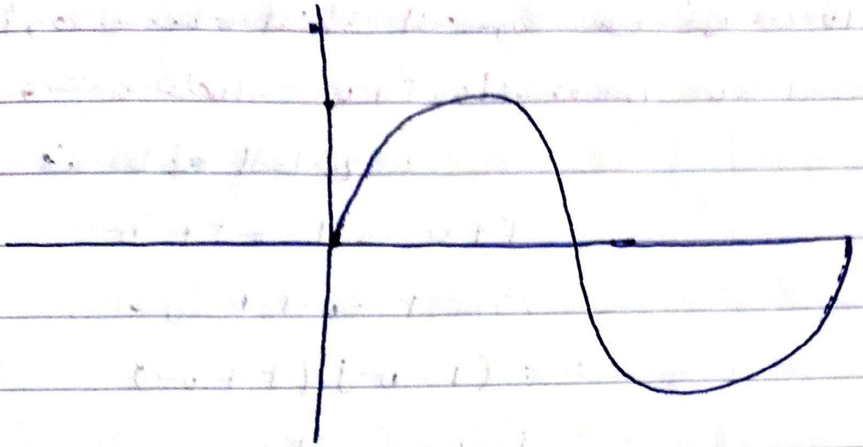
د(س) = ص

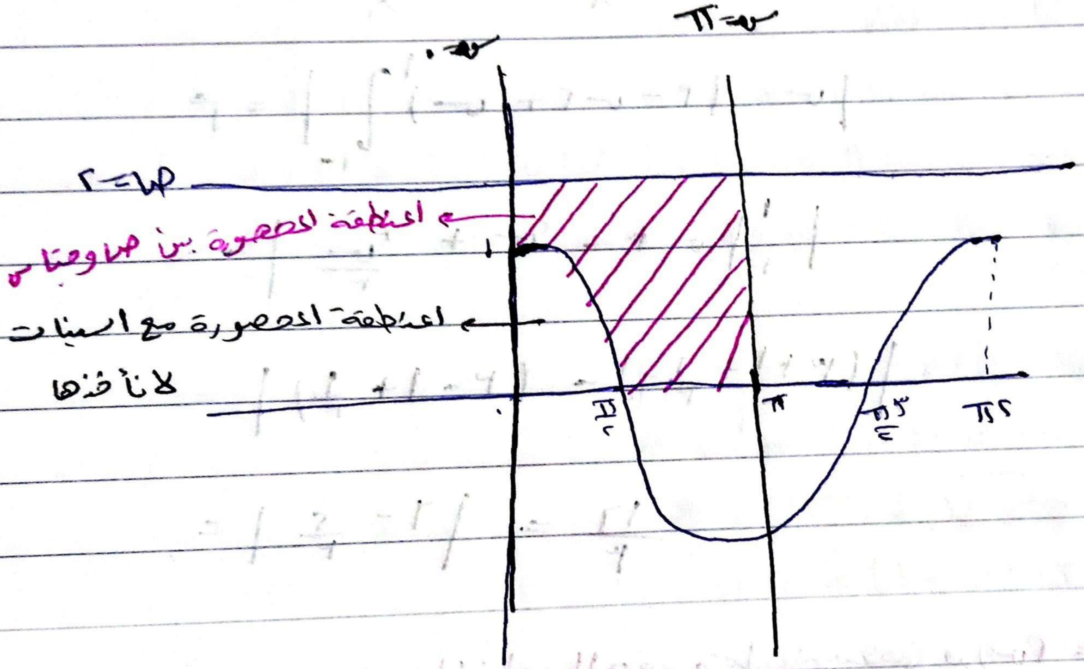
جتا س = ٢ ×

م = $\left| \int_{٠}^{\pi} (جتا س − ٢) \, ء س \right|$

= $\left| جا س − ٢س \Big|_{٠}^{\pi} \right|$

= $\left| −٢\pi − ٠ \right|$ = ٢π





أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = جا س ومنحنى هـ(س) = جتا س والمستقيمين س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

جا س = جتا س

س = $\frac{\pi}{٤}$ ✓ ، $\frac{٥\pi}{٤}$ X

$$\text{م} = \left| \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتا س} - \text{جا س})\, \text{ء س} \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتا س} - \text{جا س})\, \text{ء س} \right|$$

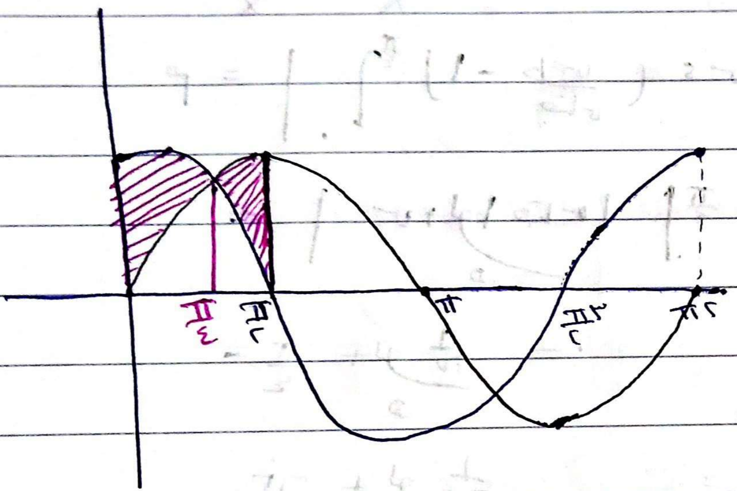
$$= \left| \text{جا س} + \text{جتا س} \Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \right| + \left| \text{جا س} + \text{جتا س} \Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} - ١ \right| + \left| ١ - \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \right|$$

$$= \left| \sqrt{٢} - ١ \right| + \left| ١ - \sqrt{٢} \right|$$

$$= \sqrt{٢} - ١ + \sqrt{٢} - ١$$

$$= ٢\sqrt{٢} - ٢$$



أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ومنحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{١}$
والمستقيمين $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٢$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{١} \Rightarrow \text{س} = ٢$ ✗

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{٢} (\text{هـ}^{١} - \text{هـ}^{\text{س}}) \, \text{ءس} \right|$$

ثابتة

$$= \left| \text{هـ}^{١}\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{-١}^{٢} \right|$$

$$= \left| (٢\text{هـ}^{١} - \text{هـ}^{١}) - (-\text{هـ}^{١} - \text{هـ}^{-١}) \right|$$

$$= \left| \text{هـ}^{١} + \text{هـ}^{١} + \frac{١}{\text{هـ}} \right| = ٢\text{هـ}^{١} + \frac{١}{\text{هـ}}$$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = ظا س ومنحنى ص = ١ والمستقيمين س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٤}$

ظا س = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

X X

م = $\left| \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \left(١ - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right) \text{ءس} \right|$

= $\left| \left[\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا س}| \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \right|$

= $\frac{\pi}{٤} + \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\sqrt{٢}} - ٠$

= $\frac{\pi}{٤} + \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الحالة الرابعة: مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) ومنحنى هـ(س)

عند حساب هذه المساحة نجد حدود التكامل

حدود التكامل هي نقاط تقاطع هـ(س) مع ق(س)

إذا كان هنالك نقطتي تقاطع فقط نكامل مباشرة

وإذا كان هنالك أكثر من نقطتين نجزئ المساحة ثم نجد التكاملات المطلوبة.

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = ٣ − س^٢ ومنحنى هـ(س) = س^٢ − ٥

نجد حدود التكامل

٣ − س^٢ = س^٢ + ٥

$\boxed{\text{٢س}^٢ - ٨} = ٠$

س^٢ = ٤ ⇐ س = ± ٢

$م = \left| \int_{-٢}^{٢} (٢س^{٢} - ٨) \, ء س \right|$

$= \left| \left[\frac{٢س^{٣}}{٣} - ٨س \right]_{-٢}^{٢} \right|$

$= \left| \left(\frac{١٦}{٣} - ١٦ \right) - \left(\frac{-١٦}{٣} + ١٦ \right) \right|$

$= \left| \frac{٣٢}{٣} - ٣٢ \right| = \frac{٦٤}{٣}$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى د(س) = ٤ س^{٣}

ومنحنى هـ(س) = ٤ س

د(س) = هـ(س)

$٤س^{٣} = ٤س$

$٤س^{٣} - ٤س = ٠$

$٤س(س^{٢} - ١) = ٠$

$٤س(س - ١)(س + ١) = ٠$

س = ٠ ، س = ١ ، س = -١

$م = \left| \int_{-١}^{٠} (٤س^{٣} - ٤س) \, ء س \right| + \left| \int_{٠}^{١} (٤س^{٣} - ٤س) \, ء س \right|$

$= \left| \left[س^{٤} - ٢س^{٢} \right]_{-١}^{٠} \right| + \left| \left[س^{٤} - ٢س \right]_{٠}^{١} \right|$

$= \left| (٠ - -١) \right| + \left| -١ - ٠ \right|$

$= ١ + ١ = ٢$

أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = $س^2$
ومنحنى هـ(س) = س

ق(س) = $س^2$

هـ(س) = س

ق(س) = هـ(س)

$س^2$ = س

$س^2$ - س = صفر

س(س - ١) = ٠

س = ٠ ، س = ١

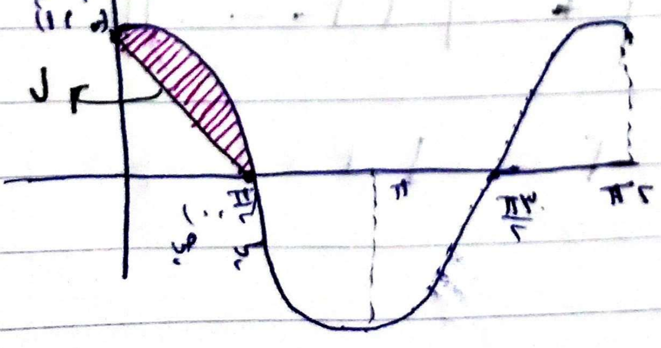
$$م = \left| \int_{٠}^{١} س^2 - س \, دس \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^3}{٣} - \frac{س^2}{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} \right) - ٠ \right|$$

$$= \frac{١}{٦}$$

أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين ق(س) = جتا س
والقطعة المستقيمة الواصلة ما بين النقطتين (٠، ١) ، ($\frac{\pi}{٢}$، ٠)



نجد معادلة المستقيم ل

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{ص - ١}{س} = \frac{٠ - ١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{-٢}{\pi}$$

$$ص - ١ = \frac{-٢}{\pi} س \Longleftarrow \boxed{ص = ١ - \frac{٢}{\pi} س}$$

$$م = \left| \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتا س - ١ + \frac{٢}{\pi} س) ءس \right|$$

$$= \left| جا س - س + \frac{١}{\pi} س^٢ \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \right|$$

$$= \left| ١ - \frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٤} - ٠ \right|$$

$$= ١ - \frac{\pi}{٤}$$

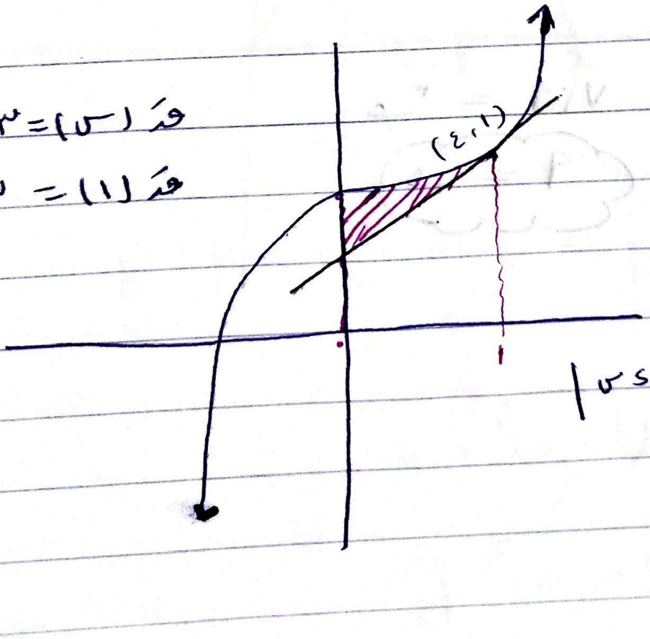
أوجدي مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة ما بين محور الصادات والمماس المرسوم لمنحنى $ق(س) = س^٣ + ٣$ عندما $س = ١$

نجد معادلة :-

$$ص - \underset{٤}{\underset{\downarrow}{ص_١}} = \underset{قَ(١)}{\underset{\downarrow}{م}}(س - \underset{١}{\underset{\downarrow}{س_١}})$$

$قَ(س) = ٣ س^٢$

$قَ(١) = ٣$



$$ص - ٤ = ٣(س - ١)$$

$$ص = ٣س + ١$$

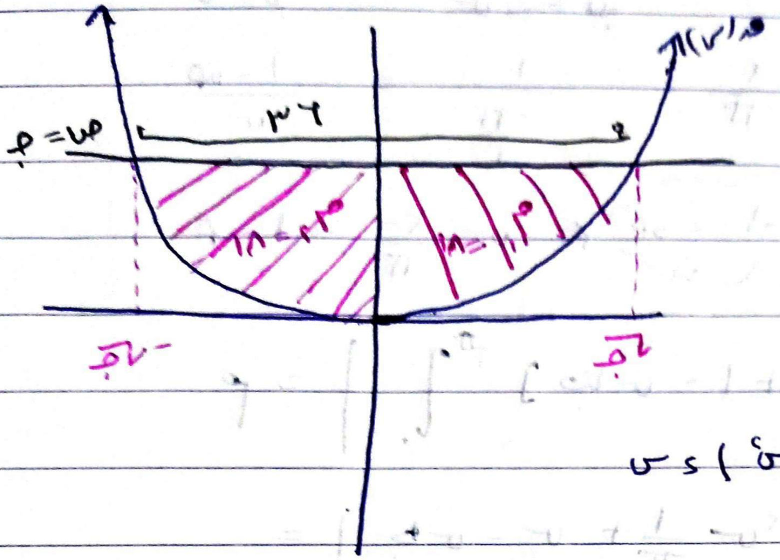
$$م = \left| \int_{٠}^{١} (س^٣ + ٣ - ٣س - ١) ءس \right|$$

$$= \left| \int_{٠}^{١} (س^٣ - ٣س + ٢) ءس \right|$$

$$= \frac{س^٤}{٤} - \frac{٣ س^٢}{٢} + ٢س \Big|_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + ٢ - ٠ = \frac{٣}{٤}$$

اوجدي قيمة جـ التي تجعل مساحة المنطقة المحصورة مابين منحنى ق(س) = $س^٢$
ومنحنى ص = جـ ، تساوي ٣٦ وحدة مربعة



$$م_١ = ١٨ = \int_{٠}^{\sqrt{جـ}} (جـ - س^٢) \, ءس$$

$$١٨ = جـ س - \frac{س^٣}{٣} \Big]_{٠}^{\sqrt{جـ}}$$

$$١٨ = جـ\sqrt{جـ} - \frac{جـ\sqrt{جـ}}{٣}$$

$$٢ جـ\sqrt{جـ} = ٥٤$$

$$جـ\sqrt{جـ} = ٢٧$$

$$جـ^٣ = ٧٢٩$$

$$\boxed{جـ = ٩}$$

الحالة الخامسة : مساحة المنطقة المحصورة ما بين أكثر من منحنيين

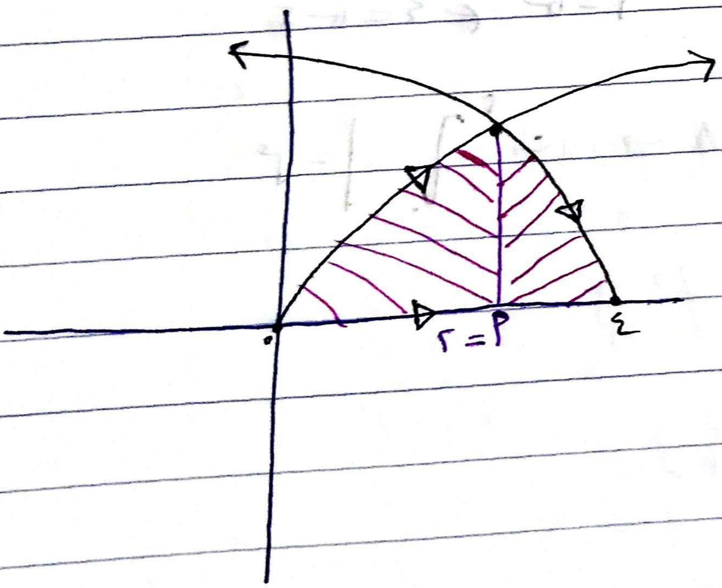
لحسابا هذه المساحة نرسم هذه المنحنيات ثم نحدد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها والتي تحقق كل الشروط الواردة في السؤال ثم نجزئ هذه المساحة بحيث لا يشترك أكثر من منحنيين في الجزء الواحد ثم نجري التكاملات المطلوبة.

أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ومنحنى هـ(س) = $\sqrt{٤ - \text{س}}$ ومحور السينات.

notes

جميع الاقترانات الأفقية بما فيها محور السينات هي اقترانات وتكتب على صورة ص = م

جميع المستقيمات العمودية بما فيها محور الصادات حدود تكامل وتكتب على صورة س = م



لإيجاد م :

$\sqrt{\text{س}} = \sqrt{٤ - \text{س}}$

$\text{س} = ٤ - \text{س}$

$٢\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢$

$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (٤ - \text{س})^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٢} + - \frac{٢}{٣} (٤ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٢}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{س}\right)^{٣}\Big|_{٠}^{٢} - \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{٤ - س}\right)^{٣}\Big|_{٢}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣}\left(٢\sqrt{٢}\right) - \frac{٢}{٣}\left(٠ - ٢\sqrt{٢}\right)$

$= \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٨\sqrt{٢}}{٣}$

على الحالة الرابعة

في السؤال السابق أوجدي المساحة المحصورة ما بين منحنى د(س) ومنحنى هـ(س) ومحور الصادات

د(س) = هـ(س)

$\sqrt{س} = \sqrt{٤ - س}$

س = ٤ - س

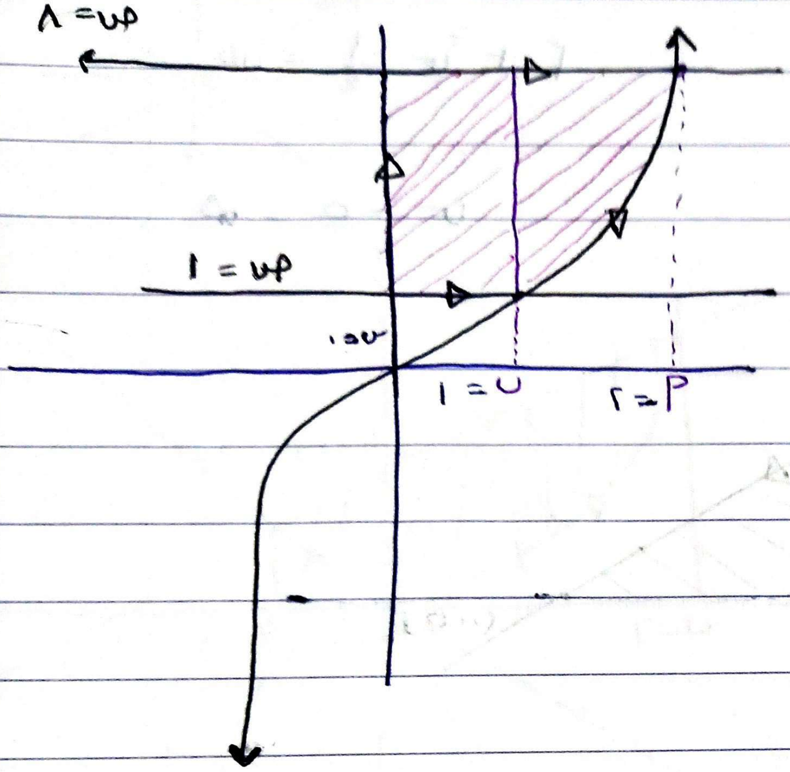
٢س = ٤ ⟸ س = ٢

$م = \Big| \int_{٠}^{٢}$

أوجد مساحة المنطقة المحصورة ما بين محور الصادات والمنحنيات

$ص = س^{٣}$ ، $ص = ١$ ، $ص = ٨$

والواقعة في الربع الأول



لإيجاد م :

$س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$

لإيجاد ن :

$س^{٢} = ١ \Leftarrow س = ١$

$$م = \int_{٠}^{١} (٨ - ١) \, دس + \int_{١}^{٢} (٨ - س^{٣}) \, دس$$

$$= ٧ + \left(٨س - \frac{س^{٤}}{٤} \Big|_{١}^{٢} \right)$$

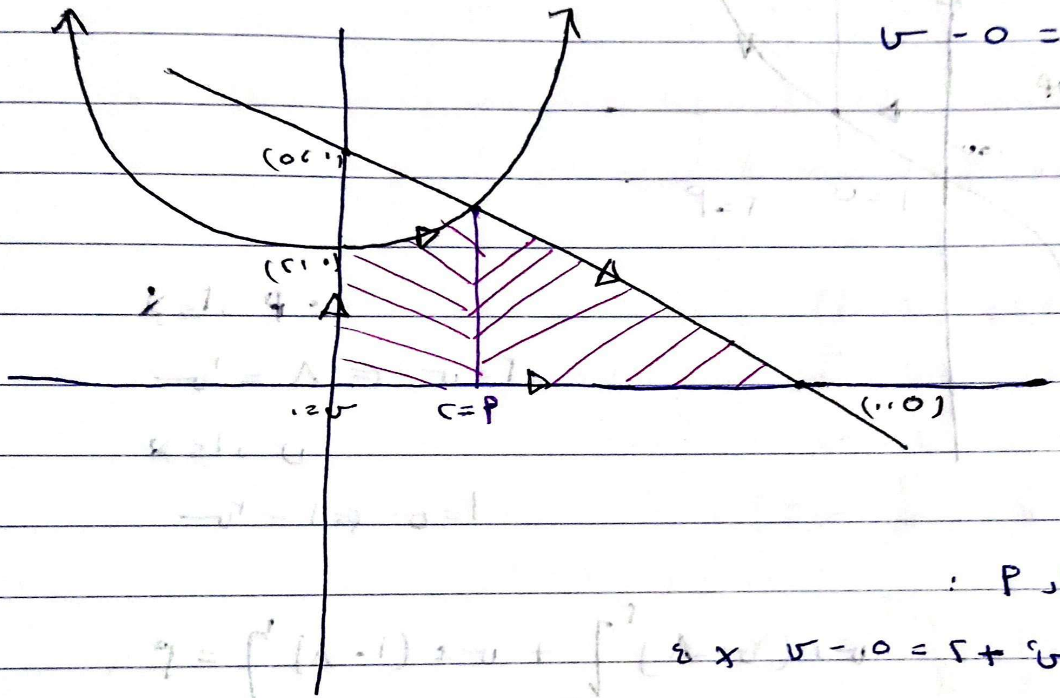
$$= ٧ + \left(١٦ - ٤ - ٨ + \frac{١}{٤} \right)$$

$$= \frac{٤٥}{٤}$$

ت أوجدي مساحة المنطقة المحصورة مابين منحنى ٤ ص = س^{٢} + ٨
ومنحنى س + ص = ٥ والمحورين السيني والصادي

ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢

ص = ٥ - س



لإيجاد م :

$\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢ = ٥ - س × ٤

س^{٢} + ٨ = ٢٠ - ٤ س

س^{٢} + ٤ س - ١٢ = ٠

(س + ٦) (س - ٢) = ٠

س = - ٦ ✗ ، س = ٢ ✓

م = $\int_{٠}^{٢}$ ($\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢) ءس + $\int_{٢}^{٥}$ (٥ - س) ءس

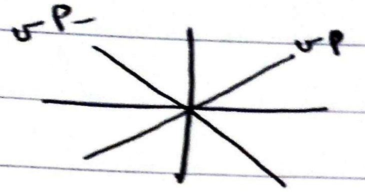
= $\frac{١}{١٢}$ س^{٣} + ٢ س $\Big]_{٠}^{٢}$ + ٥ س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ $\Big|_{٢}^{٥}$

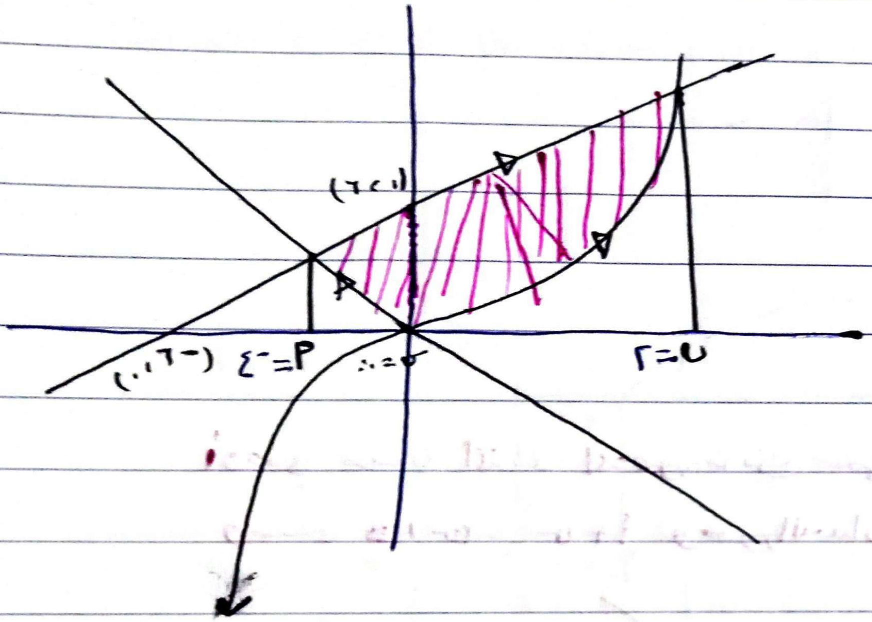
= ($\frac{٢}{٣}$ + ٤) + (٢٥ - $\frac{٢٥}{٢}$) - (١٠ - ٢)

≈ $\frac{٢}{٣}$ + ٤ + ٢٥ - $\frac{٢٥}{٢}$ - ٨

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = $س^٣$ ومنحنى ص = $\frac{-س}{٢}$

ومنحنى ص = س + ٦





لإيجاد م :

$س + ٦ = \frac{-س}{٢}$

٢س + ١٢ = - س

٣س = -١٢ ⟸ س = -٤

لإيجاد ن :

$س^٣ = س + ٦$

$س^٣ - س - ٦ = ٠$ ⟸ نظرية العوامل + القسمة التركيبية

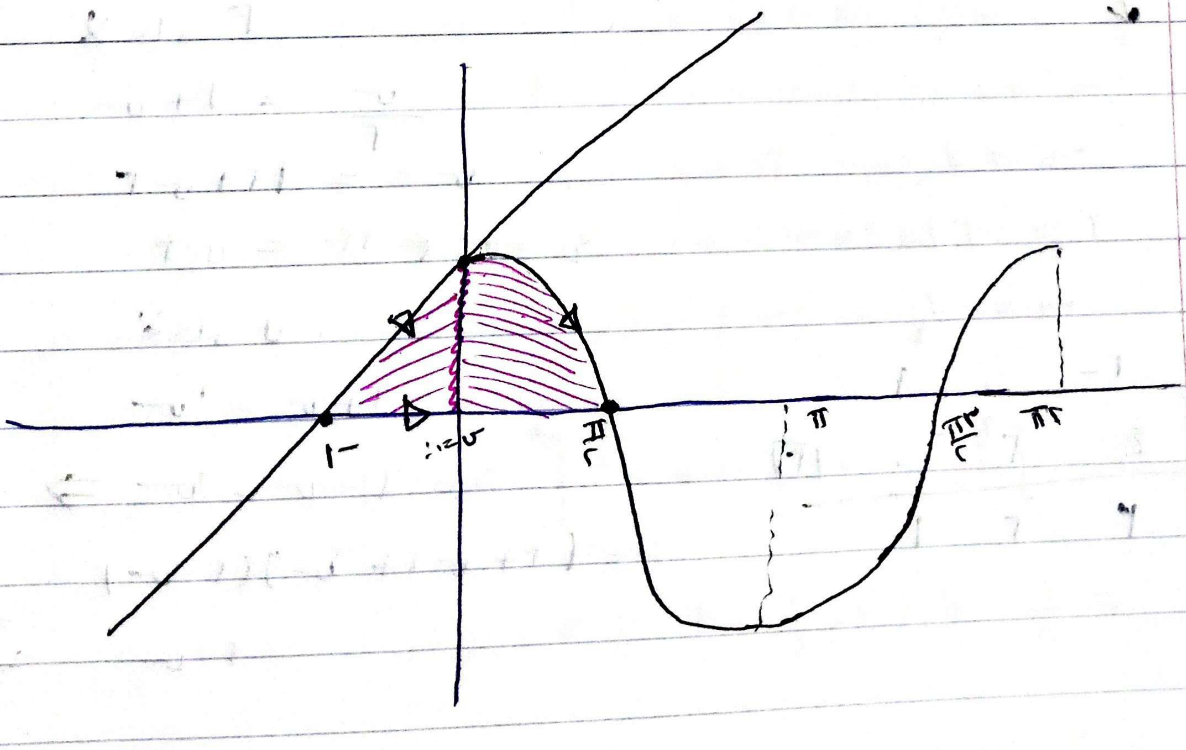
$(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٣) = ٠$

س = ٢

	١	٠	-١	-٦
$\boxed{٢}$	٠	٢	٤	٦
	١	٢	٣	٠

$$م = \int_{-٤}^{٠} (س + ٦ + \frac{س}{٢}) ء س + \int_{٠}^{٢} (س + ٦ - س^{٣}) ء س$$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = جتا س ومنحنى هـ(س) = س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = −١ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

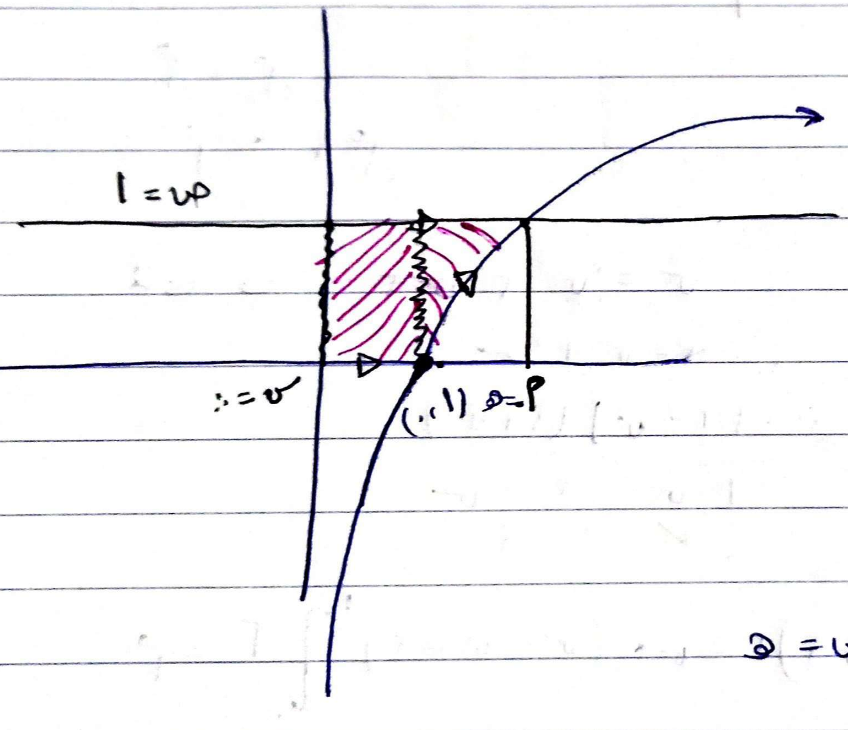


$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} (\text{س}+١)\,\text{ءس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\Big|_{-١}^{٠} + \text{جاس}\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= ٠ - (\tfrac{١}{٢} - ١) + ١ - ٠ = \frac{٣}{٢}$$

اوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = $\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س}$ ومنحنى ص = ١ ومحور السينات ومحور الصادات



لإيجاد P :

ص = ق(س)

$\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س} = ١ \Leftarrow \text{س} = \text{ه}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} ١\,\text{ءس} + \int_{١}^{\text{ه}} (١ - \text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س})\,\text{ءس}$$

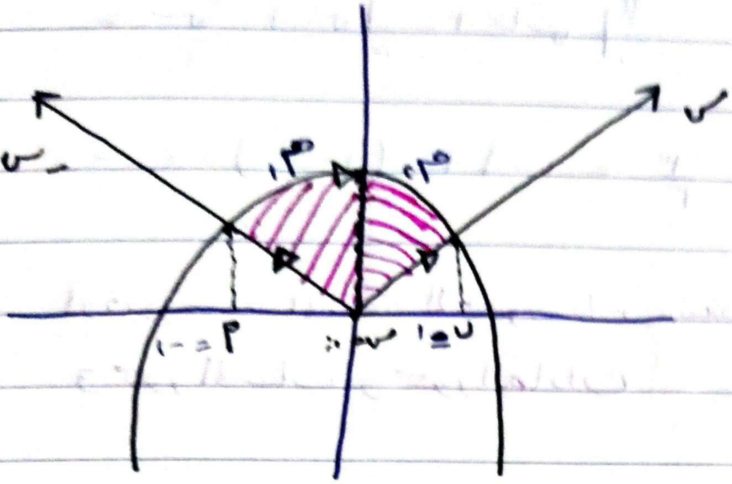
$$= ١ + \text{س} - \text{س}\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س} + \text{س}\Big|_{١}^{\text{ه}}$$

$$= ١ + ٢\text{ه} - \text{ه} - ٢$$

$$= \text{ه} - ١$$

م٤

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة بين د(س) = ٢ - س٢ ومنحنى ه(س) = |س|



$م_١ = م_٢$

$\therefore م = ٢ م_١$

لإيجاد ب : $٢ - س^٢ = س$

$\therefore س^٢ + س - ٢ = ٠$

$\therefore (س + ٢)(س - ١) = ٠$

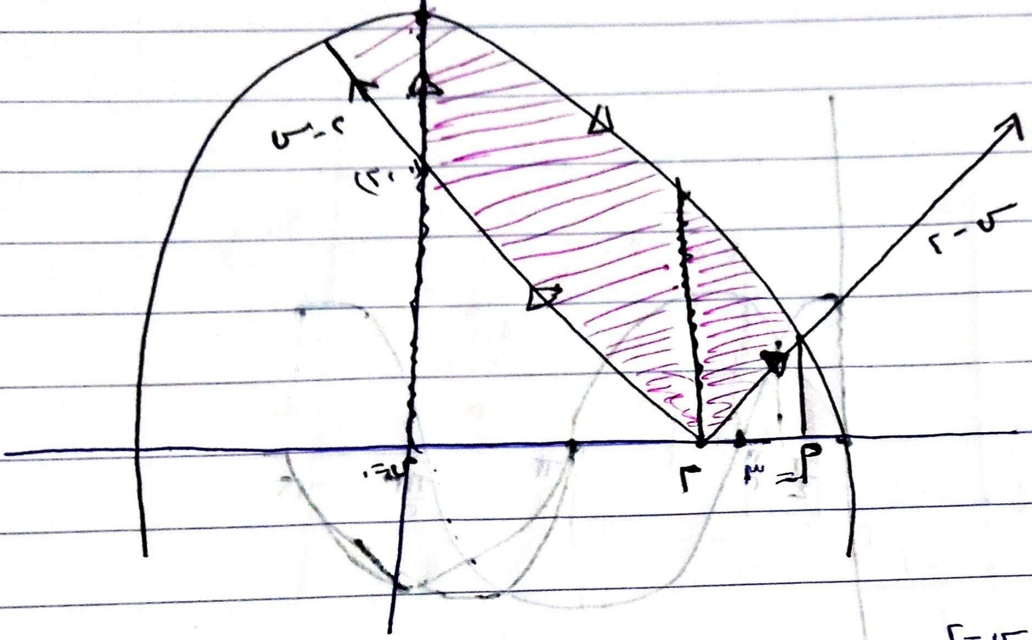
$س = -٢$ ✗ ، $س = ١$ ✓

$م = ٢ \int_{٠}^{١} (٢ - س^٢ - س) \, ءس = ٢ \left(٢س - \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} \Big|_{٠}^{١} \right)$

$= ٢ \left(٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} \right)$

$= \frac{٧}{٣}$

م أوجدي مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = | س - ٢ |
ومنحنى ص = ١٠ - س² ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول



لإيجاد م

$١٠ - س^2 = س - ٢$

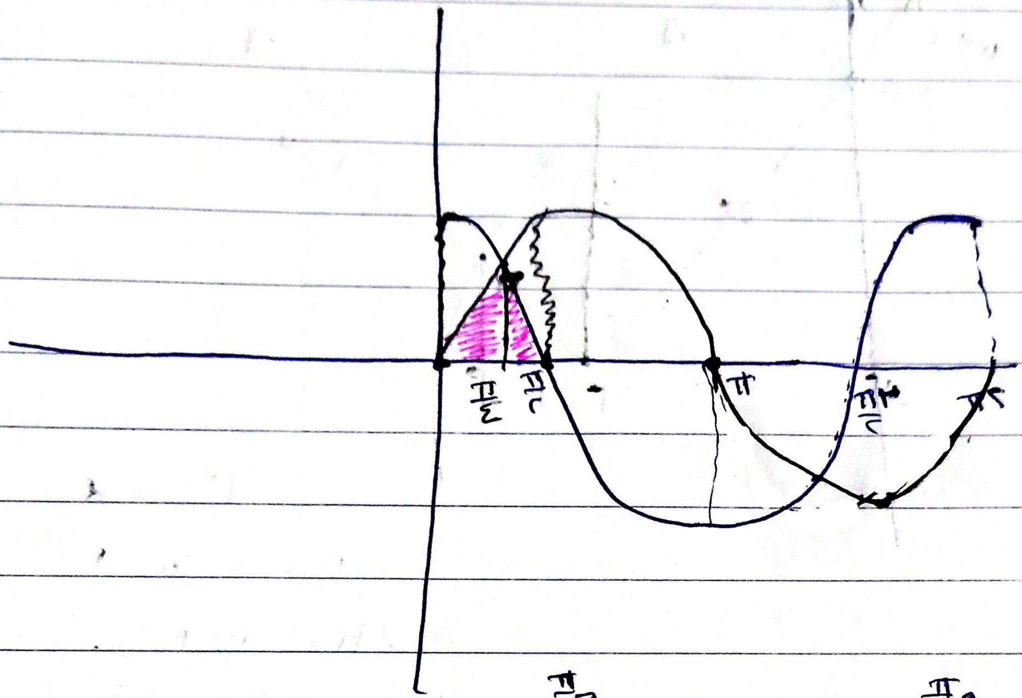
$س^2 + س - ١٢ = ٠$

$(س + ٤)(س - ٣) = ٠$

$س = -٤$ × $س = ٣$

$$م = \int_{٠}^{٢} (١٠ - س^2 - ٢ + س) \, ء س + \int_{٢}^{٣} (١٠ - س^2 - س + ٢) \, ء س$$

أوجدي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = جا س
ومنحنى هـ(س) = جتا س ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم س = $\frac{\pi}{٢}$



$$م = \int_{.}^{\frac{\pi}{٤}} جا\, س\, ءس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\, س\, ءس$$

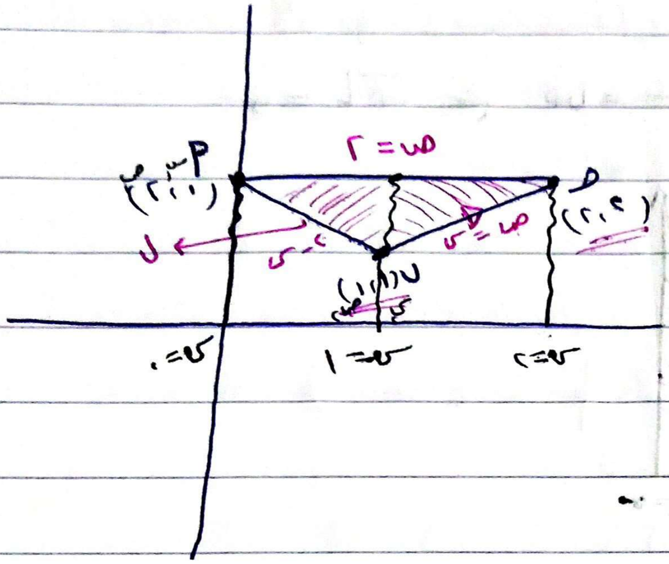
$$= -جتا\, س \Big|_{.}^{\frac{\pi}{٤}} + جا\, س \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

استخدمي التكامل لحساب مساحة المنطقة المثلثية أ ب جـ

حيث أ(٠،٢) ، ب(١،١) ، جـ(٢،٢)



∴ معادلة ل

$$\frac{ص - ٢}{س} = \frac{-١}{١}$$

ص = ٢ - س

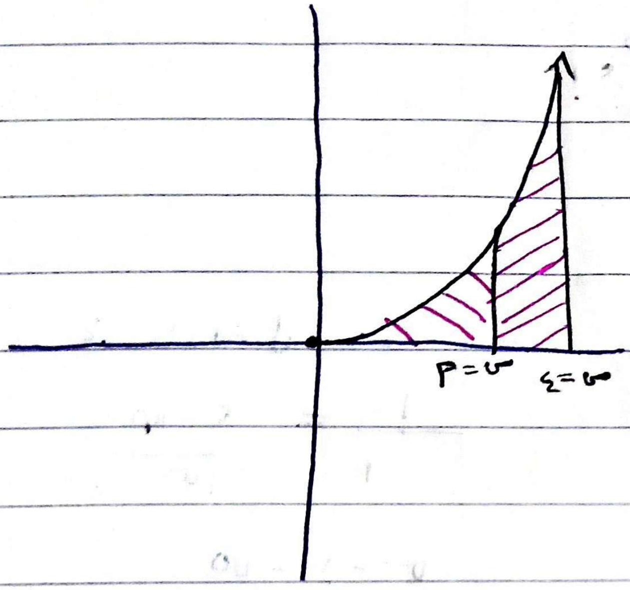
م = $\int_{٠}^{١}$ (٣ - ٢ + س) ءس + $\int_{١}^{٢}$ ٢ - س ءس

= $\frac{س^٢}{٢}\Big|_{٠}^{١}$ + ٢س - $\frac{س^٢}{٢}\Big|_{١}^{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

أوجدي قيمة م التي تجعل المستقيم س = م يقسم المساحة المحصورة ما بين س = ٢√ص والمستقيم س = ٤ ومحور السينات إلى قسمين متساويين

$$س = ٢\sqrt{ص} \Rightarrow ٤ص = س^{٢}$$



$$\int_{٠}^{م} س^{٢}\,دس = \frac{١}{٢}\int_{٠}^{٤} س^{٢}\,دس$$

$$\frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{٠}^{م} = \frac{١}{٢}\,\frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{٠}^{٤}$$

$$\frac{م^{٣}}{\cancel{٣}_{١}} = \frac{١}{\cancel{٦}_{٣,١}}\;\cancel{٦٤}^{٣٢}$$

$$م^{٣} = ٣٢ \Rightarrow م = \sqrt[٣]{٣٢}$$

الحجوم الدورانية

قاعدة: حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة مابين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}^{٢}(\text{س})\, \text{ءس}$$

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة مابين منحنى ق(س) = س² + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٢ دورة كاملة حول محور السينات

$$\text{ح} = \pi \int_{-١}^{٢} (\text{س}^{٢}+١)^{٢}\, \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{-١}^{٢} (\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١)\, \text{ءس}$$

$$= \pi \left(\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} \Big|_{-١}^{٢} \right)$$

$$= \pi \left[\left(\frac{٣٢}{٥} + \frac{٣٦}{٣} + ٢\right) - \left(\frac{-١}{٥} - \frac{٢}{٣} - ١\right) \right]$$

أوجدي ~~مساحة المنطقة~~ حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة مابين منحنى ق(س) = ٢س + ٣ ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات

$$\text{ح} = \pi \int_{-٢}^{١} (٢\text{س}+٣)^{٢}\, \text{ءس}$$

$$= \pi \times \frac{١}{٢} \frac{(٢\text{س}+٣)^{٣}}{٣} \Big|_{-٢}^{١}$$

$$= \frac{\pi}{٦} [١٢٥ - -١] = \frac{١٢٦\pi}{٦} = ٢١\pi$$ وحدة حجم

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى $\text{د(س)} = \sqrt{\text{٤} - \text{س}}$ ومحور السينات ومحور الصادات دورة كاملة حول محور السينات

نجد أصفار د(س)

$\text{٤} - \text{س} = \text{٠} \;\therefore\; \Leftarrow \text{س} = \text{٤}$

$\text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} (\text{٤} - \text{س})\ \text{ءس}$

$= \pi \left(\text{٤س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٤}} \right)$

$= \pi\,(\text{١٦} - \text{٨}) = \text{٨}\pi$

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات

$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} = \text{٠} \;\therefore$

$\text{س}(\text{س} - \text{٢}) = \text{٠} \;\therefore$

$\text{س} = \text{٠} \;،\; \text{س} = \text{٢}$

$\text{ح} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س})^{\text{٢}}\ \text{ءس}$

$= \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{س}^{\text{٤}} - \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}})\ \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} - \text{س}^{\text{٤}} + \frac{\text{٤س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}} \right]$

$= \pi \left(\frac{\text{٣٢}}{\text{٥}} - \text{١٦} + \frac{\text{٣٢}}{\text{٣}} \right)$

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = جتا س ومحور السينات والمستقيمان س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات

$$ح = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}^{٢} س \; ءس$$

$$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا} ٢س\right) ءس$$

$$= \pi \left(\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤} \text{جا} ٢س \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{٢} + ٠ - ٠ \right) = \frac{\pi^{٢}}{٢}$$

ملاحظة: حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) ومنحنى هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو $ح = \pi \left| \int_{أ}^{ب} (\text{ق}^{٢}(س) - \text{هـ}^{٢}(س)) ءس \right|$

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = $س^{٢}$ ومنحنى ص = ٤ دورة كاملة حول محور السينات

نجد حدود التكامل (نقاط التقاطع)

$س^{٢} = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$$ح = \pi \left| \int_{-٢}^{٢} (١٦ - س^{٤}) \; ءس \right|$$

$$= \pi \left| ١٦س - \frac{س^{٥}}{٥} \Big|_{-٢}^{٢} \right|$$

$$= \pi \left| \left(٣٢ - \frac{٣٢}{٥}\right) - \left(-٣٢ + \frac{٣٢}{٥}\right) \right|$$

$$= \pi \left| ٦٤ - \frac{٦٤}{٥} \right|$$

أوجدي حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) = س² ومنحنى هـ(س) = س دورة كاملة حول محور السينات

نجد حدود التكامل

س² = س ⇐ س² − س = ٠

س(س − ١) = ٠

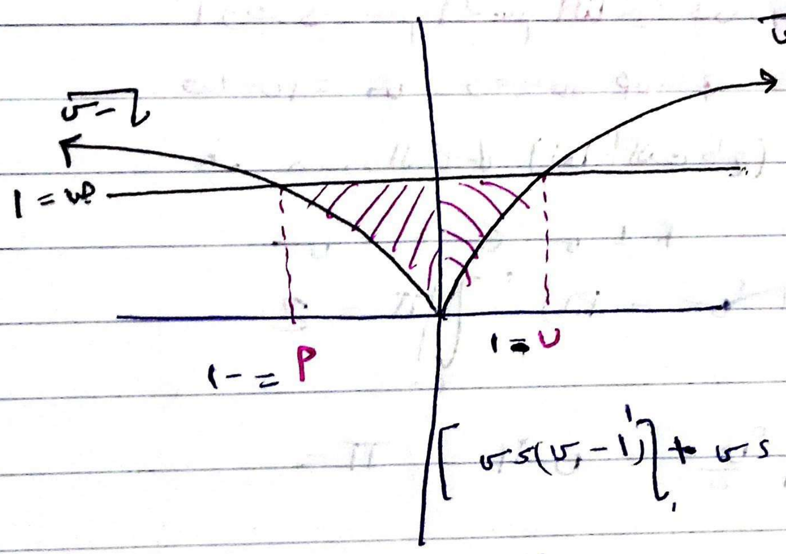
س = ٠ ، س = ١

$$ح = \pi \left| \int_{٠}^{١} (س^{٢} - س^{٤})\, ء س \right|$$

$$= \pi \left| \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٥}}{٥} \Big|_{٠}^{١} \right|$$

$$= \pi \left| \frac{١}{٣} - \frac{١}{٥} \right| = \boxed{\pi \frac{٢}{١٥}}$$

أوجدي حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين ص = $\sqrt{س}$ ومنحنى ص = $\sqrt{-س}$ ومنحنى ص = ١ دورة كاملة حول محور السينات.



لإيجاد ⓑ :

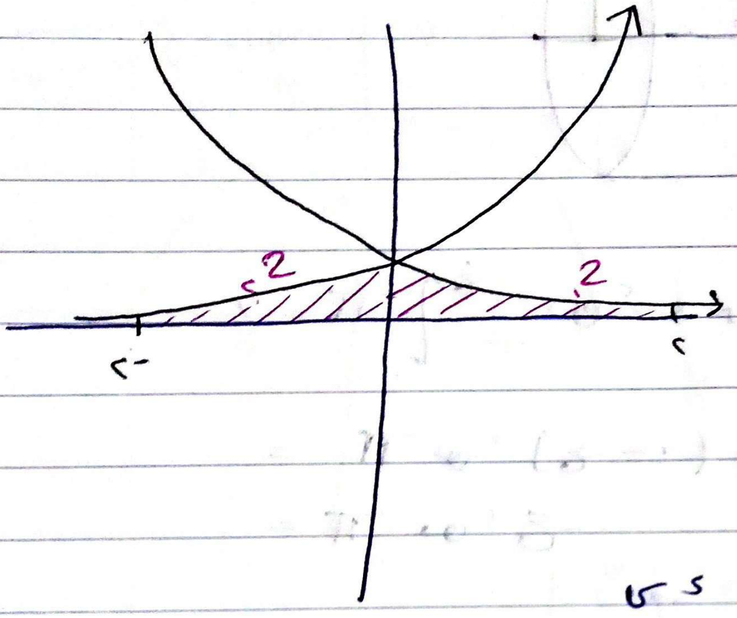
$\sqrt{س} = ١ \Leftarrow س = ١$

$$ح = \pi \left[\int_{-١}^{٠} (١ - - س)\, ء س + \int_{٠}^{١} (١ - س)\, ء س \right]$$

$$= \pi \left[س + \frac{س^{٢}}{١} \Big|_{-١}^{٠} + س - \frac{س^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١} \right]$$

$$= \pi \left[٠ - - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - ٠ \right] = \pi$$

أوجدي حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة مابين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ٢$ دورة كاملة حول محور السينات



$$\text{ح}_1 = \text{ح}_2$$

$$\text{ح} = ٢\pi \int_{٠}^{٢} (\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} \, \text{د}\text{س}$$

$$= ٢\pi \int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{٢\text{س}} \, \text{د}\text{س}$$

$$= ٢\pi \left[\frac{١}{٢} \text{هـ}^{٢\text{س}} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \pi \left(\text{هـ}^{٤} - ١ \right)$$

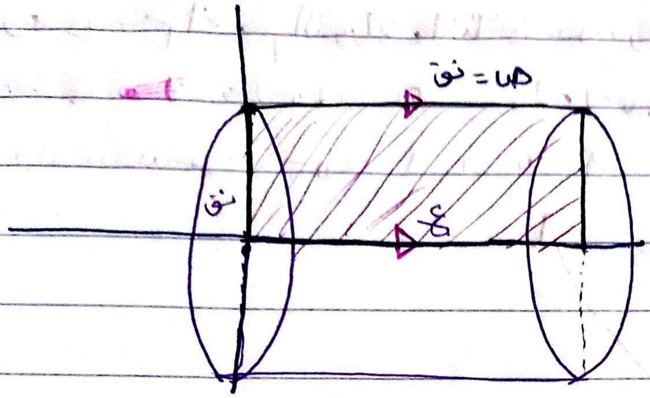
استخدمي الحجوم الدورانية لإثبات أن

١. حجم الأسطوانة = $\text{نق}^{٢} \, \pi \, \text{ع}$

٢- حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \text{نق}^{٢} \, \pi \, \text{ع}$

٣- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \text{نق}^{٣} \, \pi$

$\boxed{١}$

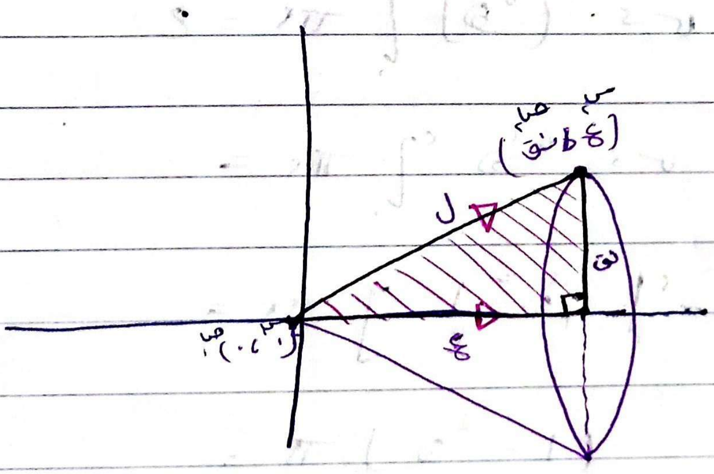


$$ح = \pi \int_{٠}^{ع} نق^{٢} \, دس$$

$$= \pi \, نق^{٢} \, (ع - ٠)$$

$$= \pi \, نق^{٢} \, ع$$

$\boxed{٢}$



هذه الرسمة
أسهل
لأن الخط المائل
يمر في نقطة الأصل

نجد معادلة ل :

$$\frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع}$$

$$ص = \frac{نق}{ع} \, س$$

$$ح = \pi \int_{٠}^{ع} \frac{نق^{٢}}{ع^{٢}} \, س^{٢} \, دس$$

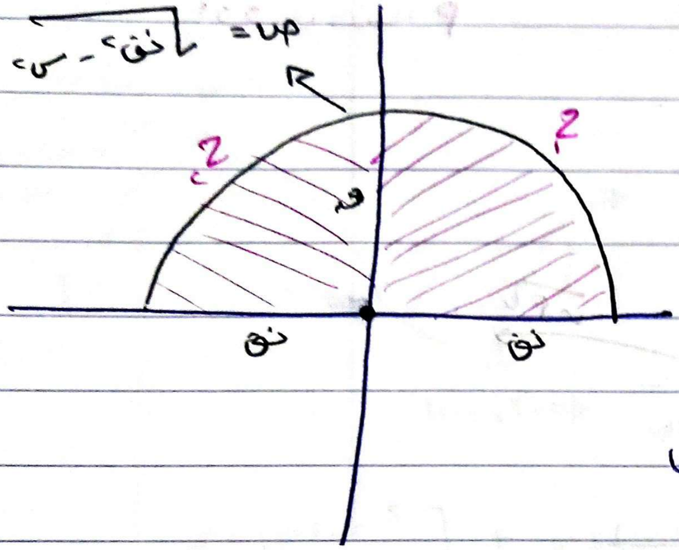
$$= \pi \left(\frac{نق^{٢}}{ع^{٢}} \, \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{ع} \right)$$

$$= \text{ط} \left(\frac{\text{نق}^٢}{\text{ع}^٢} \times \frac{\text{ع}^٣}{٣} \right) = \frac{١}{٣} \text{ط} \, \text{نق}^٢ \, \text{ع}$$

$\boxed{٣}$

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{نق}^٢$

$\text{ص} = \sqrt{\text{نق}^٢ - \text{س}^٢}$



$\text{ح}_١ = \text{ح}_٢$

$\text{ح} = ٢ \, \text{ح}_١$

$$= ٢\text{ط} \int_{٠}^{\text{نق}} (\text{نق}^٢ - \text{س}^٢) \, \text{ء س}$$

$$= ٢\text{ط} \left[\text{نق}^٢ \, \text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big|_{٠}^{\text{نق}} \right]$$

$$= ٢\text{ط} \left[\text{نق}^٣ - \frac{١}{٣} \text{نق}^٣ \right]$$

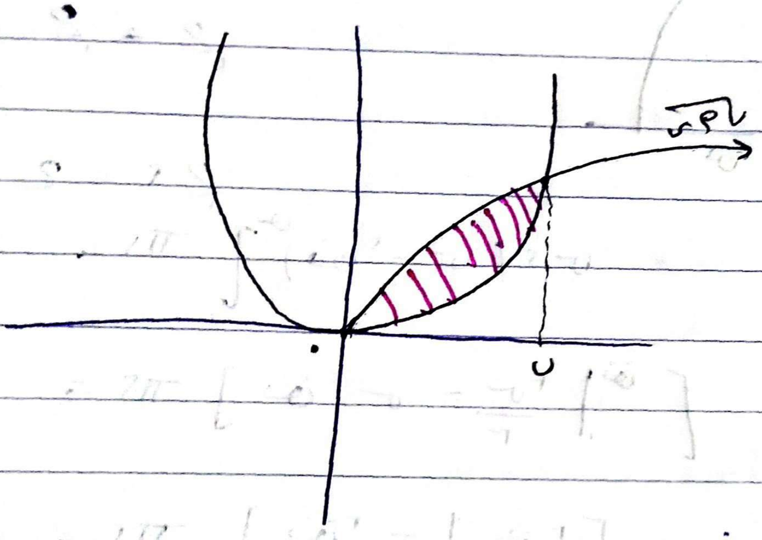
$$= ٢\text{ط} \left[\frac{٢}{٣} \text{نق}^٣ \right]$$

$$= \frac{٤}{٣} \text{ط} \, \text{نق}^٣$$

إذا كان حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة ما بين منحنى د(س) = $\sqrt{أس}$ ومنحنى هـ(س) = $\frac{س^2}{أ}$ ، أ ≠ صفر دورة كاملة حول محور السينات هو ح = $\frac{١٢}{٥}\pi$

أوجدي قيمة أ

أ موجبة أو سالبة لكن حسب الرسم بالتأكيد أ موجبة



نجد حدود التكامل :

$\sqrt{أس} = \frac{س^2}{أ} \Leftarrow أس = \frac{س^4}{أ^2}$

$أ^3 س = س^4 \Leftarrow أ^3 س - س^4 = ٠$

$س(أ^3 - س^3) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، أ$

$ح = \cancel{\pi} \int_{٠}^{أ} \left(أس - \frac{س^4}{أ^2}\right) دس = \frac{١٢}{٥}\cancel{\pi}$

$= \left. \frac{أس^2}{٢} - \frac{س^5}{٥أ^2} \right|_{٠}^{أ} = \frac{١٢}{٥}$

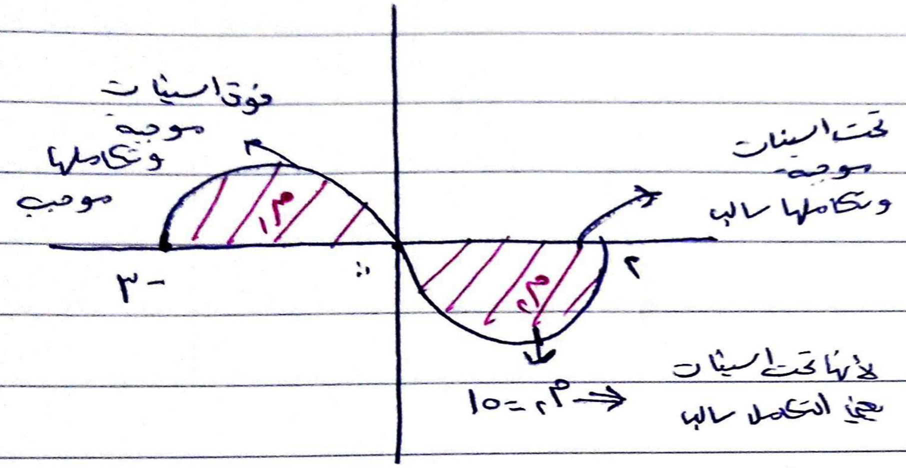
$\frac{أ^3}{٢} - \frac{أ^3}{٥} = \frac{١٢}{٥}$

$\frac{٥أ^3 - ٢أ^3}{\cancel{١٠}_{٢}} = \frac{١٢}{\cancel{٥}_{١}} \Leftarrow ٣أ^3 = ٢٤$

$أ^3 = ٨ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

سؤال على المساحة

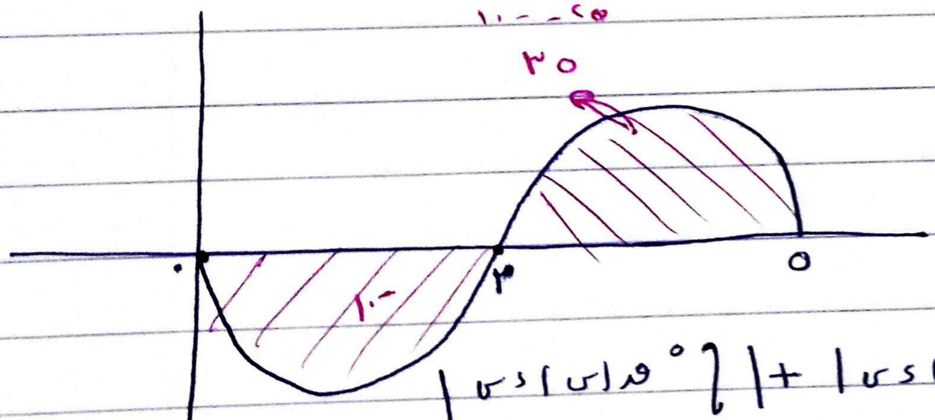
الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران ق(س) إذا كانت مساحة المنطقة المظللة م = ١٥ ، م١ = ١٠ أوجدي $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) دس



$\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) دس = $\int_{-٣}^{٠}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس

= ١٠ + -١٥ = -٥

الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران ق(س) إذا كان $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس = -١٠ ، $\int_{٠}^{٥}$ ق(س) دس = ٢٥ أوجدي مساحة المنطقة المظللة.



م = | $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس | + | $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) دس |

= ١٠ + ٣٥ = $\boxed{٤٥}$