التجزئة ومجموع ريمان

أولاً: التجزئة

تعريف: إذا كانت [أ، ب] فترة مغلقة من الأعداد الحقيقية وكانت كن مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية المرتبة ترتيباً تصاعدياً بحيث أن العددين أ، ب تنتمي إلى كن فإن كن تجزئة للفترة [أ، ب]

بمعنى: إذا كانت [أ، ب] فترة مغلقة من الأعداد الحقيقية وكانت

كن = {أ = س٠، س١، س٢، ...، سن = ب}

بحيث س٠ < س١ < ... < سن

فإن كن تجزئة للفترة [أ، ب]

تسمى الأعداد س٠، س١، ...، سن عناصر التجزئة

ينتج عن هذه التجزئة الفترات الجزئية التالية

[أ = س٠، س١]، [س١، س٢]، ...، [سن-١، سن = ب]

وعدد هذه الفترات يساوي ن

عدد عناصر التجزئة = ن + ١

إذا كانت كه تجزئة للفترة [-٣، ١٠] اكتبي عناصر هذه التجزئة والفترات الجزئية الناتجة عنها.

كه = {-٣، ٠، ١، ٥، ٩، ١٠}

[-٣، ٠]، [٠، ١]، [١، ٥]، [٥، ٩]، [٩، ١٠]

٣ ، ١ ، ٤ ، ٤ ، ١

تعريف: إذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة للفترة [أ، ب] وكانت أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن هذه التجزئة متساوية وتساوي ل فإن $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة

ملاحظات:

إذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] فإن

١- عدد عناصر التجزئة = ن + ١

٢- عدد فترات التجزئة = ن

٣- طول الفترة الجزئية الواحدة = $\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-1}$ (الفرق بين عنصرين متتاليين)

٤- $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \text{ل}\,\text{ر}$ ، ر = ٠، ١، ... ، ن

٥- الفترة الرائية = $[\text{س}_{\text{ر}-1} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ ر = ١، ٢، ... ، ن

٦- مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن هذه التجزئة = طول الفترة الكلية

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \Delta \text{س}_{\text{ر}} = \text{ب} - \text{أ} = \text{ن}\,\text{ل}$$

٧- العنصر الأول س_0 ، العنصر الثاني س_1

وبشكل عام رقم العنصر (رتبة العنصر) = ر + ١

إذا كانت σ_5 تجزئة منتظمة للفترة [−٤، ١٦]

اكتب عناصر هذه التجزئة وفترات التجزئة

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{16 - -4}{5} = 4$$

$$\sigma_5 = \{-4 ، 0 ، 4 ، 8 ، 12 ، 16\}$$

[−٤، ٠]، [٠، ٤]، [٤، ٨]، [٨، ١٢]، [١٢، ١٦]

إذا كان ك٦ تجزئة منتظمة للفترة [-٧ ، ٢٣]
اكتبي الفترات الجزئية الناتجة عن هذه التجزئة

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٢٣ - -٧}{٦} = ٥$$

ك٦ = {-٧ ، -٢ ، ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣}

[-٧ ، -٢] ، [-٢ ، ٣] ، [٣ ، ٨] ، [٨ ، ١٣] ، [١٣ ، ٨] ،
[١٨ ، ٢٣]

إذا كانت ك٤ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، π]
أوجدي فترات التجزئة

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ك}_٤ = \left\{ ٠ ،\ \frac{\pi}{٤} ،\ \frac{\pi}{٢} ،\ \frac{٣\pi}{٤} ،\ \pi \right\}$$

$$\left[٠ ،\ \frac{\pi}{٤}\right] ،\ \left[\frac{\pi}{٤} ،\ \frac{\pi}{٢}\right] ،\ \left[\frac{\pi}{٢} ،\ \frac{٣\pi}{٤}\right] ،\ \left[\frac{٣\pi}{٤} ،\ \pi\right]$$

إذا كانت ك٥٠ تجزئة منتظمة للفترة [-١٧ ، ٨٣]
أوجدي : ١- العنصر رقم ٧ ، العنصر رقم ٢١ ، العنصر رقم ٤٥
٢- أوجدي الفترة الجزئية رقم ٢ ، الفترة الجزئية رقم ٣٥
٣- أوجدي الفترة الرائية

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٨٣ - -١٧}{٥٠} = ٢$$

سر = أ + ل ر = −١٧ + ٢ر ، ر = ٠، ١، ٢، ...، ٥٠

① العنصر رقم ٧ = س٦ = −١٧ + ٢(٦)
= −٥

العنصر رقم ٢١ = س٢٠ = −١٧ + ٢(٢٠)
= ٢٣

العنصر رقم ٤٥ = س٤٤ = −١٧ + ٢(٤٤)
= −١٧ + ٨٨
= ٧١

② الفترة رقم ٢٠ = [س١٩ ، س٢٠]
س٢٠ = ٢٣
س١٩ = ٢١
= [٢١ ، ٢٣]

الفترة الجزئية رقم ٣٥ = [س٣٤ ، س٣٥]
س٣٤ = −١٧ + ٢(٣٤)
= ٥١
س٣٥ = ٥٣
= [٥١ ، ٥٣]

③ الفترة الرائية = [سر−١ ، سر]
= [−١٩ + ٢ر ، −١٧ + ٢ر] ، ر = ١، ٢، ...، ٥٠

إذا جزئت الفترة المغلقة [١ ، ٨] إلى فترات جزئية متساوية طول كل منها ١/٣ ، أوجدي: ١- عدد عناصر التجزئة
٢- الفترة الجزئية رقم ١٠
٣- الفترة الجزئية رقم ١٧

① ل = ١/٣
ل = (ب − أ)/ن ⇐ ١/٣ = (٨ − ١)/ن
ن = ٢١
عدد العناصر = ن + ١ = ٢٢

س_ر = أ + ل ر .

= ١ + ١/٣ ر ، ر = ٠ ، ١ ، ... ، ٢١

② الفترة الجزئية رقم ١٠ = [س٩ ، س١٠]

= [٤ ، ١٣/٣]

س٩ = ١ + ١/٣ × ٩ = ٤

س١٠ = ٤ + ١/٣ = ٤ ١/٣

الفترة الجزئية رقم ١٧ = [س١٦ ، س١٧]

س١٧ = ١ + ١٧/٣ = ٢٠/٣

س١٦ = ١٩/٣

= [١٩/٣ ، ٢٠/٣]

إذا كانت ط = {١ ، ٦ ، ... ، ، ٢٠١} تجزئة منتظمة

للفترة [١ ، ٢٠١] أوجد: ١- عدد عناصر هذه التجزئة

٢- الفترة الجزئية رقم ٢٠

٣- أي من الأعداد التالية ينتمي لهذه التجزئة

٦١ ، ٨٥ ، ١٥١ ، ١٧٠

① ل = س١ - س٠ = ٦ - ١ = ٥

ل = (٢٠١ - ١)/ن = ٥ ⇐ ٥ن = ٢٠٠

ن = ٤٠

عدد العناصر = ٤١ عدد الفترات = ٤٠

س_ر = ١ + ٥ر ، ر = ٠ ، ١ ، ... ، ٤٠

② الفترة رقم ٢٠ = [س١٩ ، س٢٠]

= [٩٦ ، ١٠١]

س٢٠ = ١ + ٥ × ٢٠ = ١٠١

س١٩ = ٩٦

(٣) نجعل $س_ر = ٦١$

$١ + ٥ر = ٦١$

$٥ر = ٦٠ \Leftarrow ر = ١٢$ ✓

$٦١ \in ح_٤$ لأن ر عدد صحيح

$س_ر = ٨٥$

$١ + ٥ر = ٨٥$

$ر = \frac{٨٤}{٥}$ ×

$س_ر = ١٥١$

$١ + ٥ر = ١٥١ \Leftarrow ر = \frac{١٥٠}{٥} = ٣٠$

$س_ر = ١٧٠$

$١ + ٥ر = ١٧٠$

$ر = \frac{١٦٩}{٥}$ ×

إذا كانت $ح_٥$ تجزئة منتظمة للفترة [-٤ ، ب] وكان $\sum_{ر=١}^{٥} \Delta س_ر = ٣٠$

أوجدي ١- قيمة ب

٢- فترات التجزئة

$\sum_{ر=١}^{٥} \Delta س_ر = ٣٠$

$ب - أ = ٣٠$

$ب - -٤ = ٣٠ \Leftarrow ب = ٢٦$

$ل = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

$ح_٥ = \{-٤ ، ٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٦\}$

[-٤، ٢] ، [٢، ٨] ، [٨، ١٤] ، [١٤، ٢٠] ، [٢٠، ٢٦]

إذا كانت ح ن تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، ١٠١] وكان العنصر رقم ٤ = ١١ ، أوجد عدد عناصر التجزئة والفترة الجزئية رقم ١٥

العنصر رقم ٤ = س٣

ل = $\frac{١٠١ - ٢}{ن}$ = $\frac{٩٩}{ن}$

س ر = ٢ + ($\frac{٩٩}{ن}$) ر

س٣ = ٢ + ($\frac{٩٩}{ن}$) × ٣ = ١١

٣ ($\frac{٩٩}{ن}$) = ٩

$\frac{٩٩}{ن}$ = ٣

٣ن = ٩٩

ن = ٣٣ إذا طلعت كسر يعني الحل خاطئ

عدد العناصر = ٣٤

س ر = ٢ + ٣ ر

الفترة الجزئية رقم ١٥ = [س١٤ ، س١٥]

= [٤٤ ، ٤٧]

س١٤ = ٢ + ٣(١٤) = ٤٤

س١٥ = ٤٧

إذا جزئت الفترة [١ ، ١٠] إلى فترات جزئية متساوية في الطول

طول كل منها $\frac{١}{٥}$ أوجدي :

١- عدد عناصر التجزئة

٢- الفترة الجزئية رقم ١٠

$ل = \frac{١}{٥}$

$ل = \frac{١٠ - ١}{ن} = \frac{١}{٥} \Leftarrow ن = ٤٥$

عدد عناصر التجزئة $= ن + ١ = ٤٦$

الفترة الجزئية رقم ١٠ $= [س_٩ ، س_{١٠}] = [\frac{١٤}{٥} ، ٣]$

$س_ر = أ + ل ر$

$= ١ + \frac{١}{٥} ر$

$س_٩ = ١ + \frac{١}{٥}(٩) = ١ + \frac{٩}{٥} = \frac{١٤}{٥}$

$س_{١٠} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

إذا كانت $ط = \{١ ، ١ + \frac{٢}{ن} ، ١ + \frac{٤}{ن} ، \ldots\ldots ، ٢٠\}$ دوائر

أوجدي ١- عدد عناصر التجزئة

٢- الفترة الجزئية رقم ر (الفترة الرائية)

نفرض عدد الفترات س

$ط_س$

$ل = \frac{٢٠ - ١}{س} = ١ + \frac{٢}{ن} - ١$

$\frac{١٩}{س} = \frac{٢}{ن}$

٢س = ١٩ ن

س = $\frac{١٩ ن}{٢}$

عدد العناصر = $\frac{١٩ ن}{٢}$ + ١

سر = أ + ل ر

= ١ + $\frac{٢}{ن}$ ر

الفترة الجزئية = [سر-١ ، سر]

[١ + $\frac{٢}{ن}$ ر − $\frac{٢}{ن}$ ، ١ + $\frac{٢}{ن}$ ر]

إذا كانت ط١٠ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ١٦] وكانت الفترة الجزئية رقم ٢ = [٨ ، د] ، أوجدي قيم أ ، د

متكرر مرتين بنفس الأرقام

[س١ ، س٢] = [٨ ، د]

⇐ س١ = ٨ س٢ = د

سر = أ + ل ر = أ + $\frac{١٦ - أ}{١٠}$ ر

س١ = أ + $\frac{١٦ - أ}{\cancel{١٠}_{٥}}$ × $\cancel{١}$ = ٨ × ٥

٥أ + ١٦ − أ = ٤٠

٤أ = ٢٤ ⇐ أ = ٦

د = $س_٢$ = ٦ + ١,٠ × ٢١ = ٨,١

مجموع ريمان

تعريف: إذا كان ق(س) اقترانًا معرفًا على [أ، ب] وكانت $ط_ن$ تجزئة لهذه الفترة فإن مجموع ريمان هو م($ط_ن$، ق)

حيث م($ط_ن$، ق) = $\sum_{ر=1}^{ن} \Delta س_ر$ ق($س_ر^*$) ، $س_ر^* \in [س_{ر-1}، س_ر]$

وإذا كانت $ط_ن$ تجزئة منتظمة فإن م($ط_ن$، ق) = ل $\sum_{ر=1}^{ن}$ ق($س_ر^*$)

إذا كان ق(س) = $س^٢$ + ٣ ، س ∈ [-٥، ٦] وكانت $ط_٤$ = {-٥، -٤، ٠، ٣، ٦}

أوجدي مجموع ريمان م($ط_٤$، ق) معتبرة $س_ر^* = س_ر$

م($ط_ن$، ق) = $\sum_{ر=1}^{ن} \Delta س_ر$ ق($س_ر^*$)

م($ط_٤$، ق) = $\sum_{ر=1}^{٤} \Delta س_ر$ ق($س_ر$) = ١٨٤

فترات التجزئة	$\Delta س_ر$	$س_ر^* = س_ر$	ق($س_ر^*$)	$\Delta س_ر$ ق($س_ر^*$)
[-٥، -٤]	١	-٤	١٩	١٩
[-٤، ٠]	٤	٠	٣	١٢
[٠، ٣]	٣	٣	١٢	٣٦
[٣، ٦]	٣	٦	٣٩	١١٧
				١٨٤

إذا كان د(س) = س٢ + س + ٢ ، س ∈ [-٧ ، ٣]
وكانت ح٥ تجزئة منتظمة لهذه الفترة أوجدي مجموع ريمان
معتبرة س*ر = س ر-١

ل = (٣ - -٧) / ٥ = $\boxed{٢}$

م(ح ن ، د) = ل $\sum_{ر=١}^{ن}$ د(س*ر)

م(ح٥ ، د) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ د(س ر-١)

ح٥ = {-٧ ، -٥ ، -٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

فترات التجزئة	س*ر = س ر-١	د(س*ر)
[-٧ ، -٥]	-٧	٤٤
[-٥ ، -٣]	-٥	٢٢
[-٣ ، -١]	-٣	٨
[-١ ، ١]	-١	٢
[١ ، ٣]	١	٤
		٨٠

∴ م(ح٥ ، د) = ٢ × ٨٠ = ١٦٠

إذا كان د(س) = { س٢ + ٣ ، -٦ ≤ س < ١
؛ ٤س - ٢ ، ١ ≤ س ≤ ١٠ }

وكان ح٤ تجزئة منتظمة للفترة [-٦ ، ١٠] أوجدي م(ح٤ ، د)
معتبرة س*ر = س ر-١

م(ك$_ن$ ، د) = ل $\sum_{ر=١}^{ن}$ د(س$_ر^*$)   ل = $\frac{ب - أ}{ن}$

= $\frac{١٠ - -٦}{٤}$ = $\boxed{٤}$

م(ك$_٤$ ، د) = ٤ $\sum_{ر=١}^{٤}$ د(س$_{ر-١}$)

ك$_٤$ = {−٦ ، −٢ ، ٢ ، ٦ ، ١٠}

فترات التجزئة	س$_ر^*$ = س$_{ر-١}$	د(س$_ر^*$)
[−٦ ، −٢]	−٦	٣٩
[−٢ ، ٢]	−٢	٧
[٢ ، ٦]	٢	٦
[٦ ، ١٠]	٦	٢٢
		$\boxed{٧٤}$

∴ م(ك$_٤$ ، د) = ٤ × ٧٤ = ٢٩٦

إذا كان د(س) = [$\frac{س}{٢}$ + ١] + |٢س − ٥| ، س ∈ [−٧ ، ١٣]

وكان ك$_ه$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة أوجدي م(ك$_ه$ ، د)

معتبرة س$_ر^*$ = $\left(\frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢}\right)$ ← منتصف كل فترة جزئية.

م(ك$_ن$ ، د) = ل $\sum_{ر=١}^{ن}$ د(س$_ر^*$)   ل = $\frac{١٣ - -٧}{٥}$ = $\boxed{٤}$

م(ك$_٥$ ، د) = ٤ $\sum_{ر=١}^{٥}$ د$\left(\frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢}\right)$

ك$_٥$ = {−٧ ، −٣ ، ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣}

فترات التجزئة	$س_ر^* = \frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢}$	$د(س_ر^*)$
$[-٧، -٣]$	-٥	$-٢ + ١٥ = ١٣$
$[-٣، ١]$	-١	$٠ + ٧ = ٧$
$[١، ٥]$	٣	$٢ + ١ = ٣$
$[٥، ٩]$	٧	$٤ + ٩ = ١٣$
$[٩، ١٣]$	١١	$٦ + ١٧ = ٢٣$

تتزايد كل مرة طول الفترة و بدلما نضل نحسب عن تجزئة منتظمة

$\boxed{٥٩}$

$∴ م(ق، د) = ٤ \times ٥٩ = ٢٣٦$

إذا كان $د(س) = حاس + جتاس$ ، $س \in [٠، \pi]$ وكانت ق تجزئة منتظمة لهذه الفترة أوجدي $م(ق_٤، د)$ معتبرة $س_ر^* = س_{ر-١}$

$$∴ م(ق_٤، د) = \frac{\pi}{٤} \sum_{ر=١}^{٤} د(س_{ر-١})$$

فهكان المطلوب نهاية الفترة

$$ق_٤ = \{\underbrace{٠، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٤}}_{\text{المطلوب بداية الفترة}}، \pi\}$$

$$م(ق_٤، د) = \frac{\pi}{٤}\left[د(٠) + د(\frac{\pi}{٤}) + د(\frac{\pi}{٢}) + د(\frac{٣\pi}{٤})\right]$$

$$= \frac{\pi}{٤}\left[(١+٠) + (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) + (٠+١) + \cancel{(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}})}\right]$$

$$= \frac{\pi}{٤}\left[٢ + \frac{٢}{\sqrt{٢}}\right] = \frac{\pi}{٤}\left[٢ + \sqrt{٢}\right]$$

إذا كان ق(س) = س² − س + ٣ ، س ∈ [−٥ ، ١٠]
وكانت ط٣ تجزئة منتظمة لهذه الفترة ، فإذا س١* = −٤ ، س٢* = ٢
س٣* = ٩ ، أوجدي م(ط٣ ، ق)

م(ط٣ ، ق) = ٥ $\sum_{ر=١}^{٣}$ ق(س*ر)

= ٥[ق(−٤) + ق(٢) + ق(٩)]

= ٥[٢٣ + ٥ + ٧٥]

= ٥ × ١٠٣ = ٥١٥

مثال إذا كان ق(س) اقتران معرف على [−٤ ، ٨] وكانت ط٤ تجزئة منتظمة لهذه الفترة ، بحيث م(ط٤ ، ق) = ٣٠ أوجدي م(ط٤ ، ٥ق + س)
معتبرة س*ر = سر في الحالتين

نفرض ل(س) = ٥ق(س) + س ، [−٤ ، ٨]

المطلوب م(ط٤ ، ل)

م(ط٤ ، ل) = ٣ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ل(سر)

ط٤ = {−٤ ، $\overline{−١ ، ٢ ، ٥ ، ٨}$}

م(ط٤ ، ل) = ٣[ل(−١) + ل(٢) + ل(٥) + ل(٨)]

= ٣[٥ق(−١) − ١ + ٥ق(٢) + ٢ + ٥ق(٥) + ٥ + ٥ق(٨) + ٨]

= ٣[٥(ق(−١) + ق(٢) + ق(٥) + ق(٨)) + ١٤]

= ٣[٥ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(سر) + ١٤]

= ٣[٥(١٠) + ١٤] = ٣ × ٦٤ = ١٩٢

م(ط٤ ، ق) = ٣٠
٣ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(سر) = ٣٠
$\sum_{ر=١}^{٤}$ ق(سر) = ١٠

إذا كان د(س) اقتران معرف على [١، ١٠] وكانت ط_3 تجزئة منتظمة لهذه الفترة بحيث $\text{م}(\text{ط}_3، ٤\text{د}) = ٦٠$ أوجد $\text{م}(\text{ط}_3، ٢\text{د} + \text{س}^2)$ معتبرة $\text{س}^*_\text{ر} = \text{س}_{\text{ر}-1}$ في الحالتين

نفرض $\text{ل}(\text{س}) = ٢\text{د}(\text{س}) + \text{س}^2$ ، $\text{س} \in [١، ١٠]$

$$\text{م}(\text{ط}_3، \text{ل}) = ٣ \sum_{\text{ر}=1}^{3} \text{ل}(\text{س}_{\text{ر}-1})$$

$$\text{ط}_3 = \{١، \underbrace{٤، ٧}_{\text{ن}}، ١٠\}$$

$$\text{م}(\text{ط}_3، \text{ل}) = ٣ [\text{ل}(١) + \text{ل}(٤) + \text{ل}(٧)]$$

$$= ٣ [٢\text{د}(١) + ١ + ٢\text{د}(٤) + ١٦ + ٢\text{د}(٧) + ٤٩]$$

$$= ٣ [٢ \sum_{\text{ر}=1}^{3} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}-1}) + ٦٦]$$

$$\text{م}(\text{ط}_3، ٤\text{د}) = ٦٠$$

$$٣ \sum_{\text{ر}=1}^{3} ٤\text{د}(\text{س}_{\text{ر}-1}) = ٦٠$$

$$١٢ \sum_{\text{ر}=1}^{3} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}-1}) = ٦٠$$

$$\sum_{\text{ر}=1}^{3} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}-1}) = ٥$$

$$= ٣ [٢(٥) + ٦٦]$$

$$= ٣ \times ٧٦$$

$$= ٢٢٨$$

قوانين Σ :

① $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \dots + \text{س}_\text{ن}$.

② $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ل}\, \text{س}_\text{ر} = \text{ل} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}$.

③ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} \pm \text{ص}_\text{ر}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر} \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_\text{ر}$.

④ $\sum_{ر=1}^{ن} ك = ن ك$

⑤ $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ $\qquad \sum_{ر=1}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(٢ن+١)(ن+١)}{٦}$

إذا كان $د(س) = ٤س + ٣$ ، $س \in [٢ ، ٥]$ ،
وكانت $ك_ن$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة ، أوجدي $م(ك_ن ، د)$
معتبرة $س_ر^{*} = س_ر$

$$م(ك_ن ، د) = \frac{٣}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} د(س_ر)$$

$$س_ر = أ + هـ ر = (٢ + \frac{٣}{ن} ر)$$

$$د(س_ر) = ٤(٢ + \frac{٣}{ن} ر) + ٣$$
$$= ٨ + \frac{١٢}{ن} ر + ٣$$
$$= \frac{١٢}{ن} ر + ١١$$

$$م(ك_ن ، د) = \frac{٣}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (\frac{١٢}{ن} ر + ١١)$$

$$= \frac{٣}{ن} \left[\sum_{ر=1}^{ن} \frac{١٢}{ن} ر + \sum_{ر=1}^{ن} ١١\right]$$

$$= \frac{٣}{ن} \left[\frac{١٢}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر + ١١ن\right]$$

$$= \frac{٣}{ن} \left[\frac{\cancel{١٢}^{٦}}{\cancel{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}} + ١١ن\right]$$

$$= \frac{٣}{ن} [٦ن + ٦ + ١١ن] = \frac{٣}{ن} [١٧ن + ٦]$$

$$= ٥١ + \frac{١٨}{ن}$$

التكامل المحدود

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتران معرف على [أ، ب] وكان ل ≤ ق(س) ≤ م

∀ س ∈ [أ، ب] فإن ق(س) اقتران محدود في هذا المجال

(ل: القيمة الصغرى المطلقة ، م: القيمة العظمى المطلقة)

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتران محدود على الفترة [أ، ب] وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة وكانت $\lim_{\text{ن} \to \infty}$ م($\sigma_{\text{ن}}$، ق) موجودة ومساوية مهما كانت قيمة $\text{س}^*_{\text{ر}}$ فإن ق(س) اقتران قابل للتكامل في هذا المجال وتسمى قيمة هذه النهاية بالتكامل المحدود ويكتب على صورة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$

قاعدة:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، ق})$$

ملاحظات:

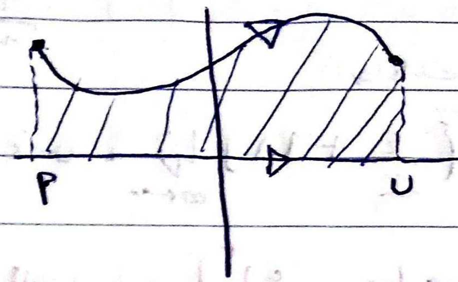
1- يسمى العددان أ، ب حدود التكامل أ: الحد السفلي ، ب: الحد العلوي

2- التكامل السابق يفترض أن أ < ب لكن:

* إذا كانت أ = ب ⇐ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س) دس} = 0$
* إذا كانت أ > ب ⇐ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) دس}$

3- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(ع) دع} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(ل) دل}$

4- إذا كان ق(س) اقتران موجب في [أ، ب] فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$ = مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب



أوجدي باستخدام التعريف $\int_{١}^{٣} (٢س+٥)\, ءس$

$د(س) = ٢س + ٥ \;،\; س \in [١ ، ٣] \;،\; ك_ن$

$\int_{١}^{٣} د(س)\, ءس = \lim_{ن \to \infty} م(ك_ن ، د)$

$م(ك_ن ، د) = \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س_ر)$

$س_ر = ١ + \frac{٢}{ن} ر$

$د(س_ر) = ٢(١ + \frac{٢}{ن} ر) + ٥$

$= ٢ + \frac{٤}{ن} ر + ٥$

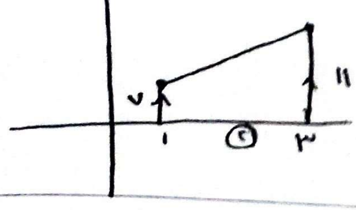
$= \frac{٤}{ن} ر + ٧$

$م(ك_ن ، د) = \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (\frac{٤}{ن} ر + ٧)$

$= \frac{٢}{ن} [\frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر + \sum_{ر=١}^{ن} ٧]$

$= \frac{٢}{ن} [\frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} + ٧ن]$

$= \frac{٢}{ن} [٢ن + ٢ + ٧ن] = \frac{٢}{ن} [٩ن + ٢]$



$\text{م} = \frac{1}{2}(٧+١١) \times ٢$

$= ١٨$

المساحة الحقيقية

$= ١٨ + \frac{٤}{ن}$

مهما كانت قيمة $\text{س}_ر^*$ سيكون نفس الجواب
سيختلف هذا الرقم فقط ونهايته صفر

$$\int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \lim_{ن \to \infty} \left(١٨ + \frac{٤}{ن}\right) = ١٨$$

أوجد باستخدام التعريف $\int_{-٢}^{٣} (٤\text{س} - ٢)\, \text{ء}\text{س}$ معتبرة $\text{س}_ر^* = \text{س}_{ر-١}$

$\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س} - ٢$ ، $[-٢ ، ٣]$ ، $\text{ل}_ن$

$$\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \lim_{ن \to \infty} \text{م}(\text{ل}_ن ، \text{د})$$

$$\text{م}(\text{ل}_ن ، \text{د}) = \frac{٥}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \text{د}(\text{س}_{ر-١})$$

$$\text{س}_{ر-١} = -٢ + \frac{٥}{ن}(ر-١)$$
$$= -٢ + \frac{٥}{ن} ر - \frac{٥}{ن}$$

$$\text{د}(\text{س}_{ر-١}) = -٨ + \frac{٢٠}{ن} ر - \frac{٢٠}{ن} - ٢$$
$$= \frac{٢٠}{ن} ر - \frac{٢٠}{ن} - ١٠$$

$$\text{م}(\text{ل}_ن ، \text{د}) = \frac{٥}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{٢٠}{ن} ر - \frac{٢٠}{ن} - ١٠\right)$$

$$= \frac{٥}{ن} \left[\frac{٢٠}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر - \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٢٠}{ن} - \sum_{ر=١}^{ن} ١٠\right]$$

$$= \frac{٥}{ن} \left[\frac{٢٠}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} - ٢٠ - ١٠ن\right]$$

$$= \frac{٥}{ن} \left[١٠ن + ١٠ - ٢٠ - ١٠ن\right] = \frac{-٥٠}{ن}$$

$$\therefore \int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \lim_{ن \to \infty} \frac{-٥٠}{ن} = \text{صفر}$$

أوجدي باستخدام التعريف $\int_{٤}^{٠} (٤س + ٣)\, دس$ ، معتبرة $س^*_ر = \left(\frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢}\right)$

$د(س) = ٤س + ٣$ ، $[٠ ، ٤]$ ، ن ، $ط_ن$

$$\int_{٠}^{٤} د(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} م(ط_ن ، د)$$

$$م(ط_ن ، د) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د\left(\frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢}\right)$$

$$س_ر = \frac{٤}{ن} ر$$

$$س_{ر-١} = \frac{٤}{ن}(ر-١) = \frac{٤}{ن} ر - \frac{٤}{ن}$$

$$\frac{س_ر + س_{ر-١}}{٢} = \frac{٤}{ن} ر - \frac{٢}{ن}$$

$$د(س^*_ر) = \frac{١٦}{ن} ر - \frac{٨}{ن} + ٣$$

$$م(ط_ن ، د) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١٦}{ن} ر - \frac{٨}{ن} + ٣$$

$$= \frac{٤}{ن} \left[\frac{\cancel{١٦}^{٨}}{\cancel{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن+١)}{\cancel{٢}} - ٨ + ٣ن \right]$$

$$= \frac{٤}{ن} \left[٨ن + \cancel{٨} - \cancel{٨} + ٣ن \right]$$

$$= \boxed{٤٤}$$

$$\therefore \int_{٠}^{٤} د(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} ٤٤ = ٤٤$$

$$\therefore \int_{٤}^{٠} د(س)\, دس = \boxed{-٤٤}$$

أوجدي باستخدام التعريف $\int_{١}^{٥} ٣ \, \text{د}\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٣$ ، $[١ ، ٥]$ ، $\text{ح}_\text{ن}$

$$\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \, \text{د}\text{س} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\text{ح}_\text{ن} ، \text{ق})$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_\text{ر}^{*}) \right)$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣ \right)$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} ١٢ = ١٢$$

إذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل في $[١ ، ٥]$ وكانت $\text{ح}_\text{ن}$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة بحيث $\text{م}(\text{ح}_\text{ن} ، \text{ق}) = ١٥ + \frac{٣\text{ن}^٢}{٥ - \text{ن}^٢}$

أوجدي $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \, \text{د}\text{س}$

$$\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \, \text{د}\text{س} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(١٥ + \frac{٣\text{ن}^٢}{٥ - \text{ن}^٢} \right)$$

درجة البسط تساوي درجة المقام

$$= ١٥ + -٣ = ١٢$$

معامل أعلى قوة في البسط / معامل أعلى قوة في المقام $= \frac{٣}{-١} = -٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \text{ق}(\text{س}) =$ ① صفر : إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام

② معامل أعلى قوة بالبسط / معاملاً أعلى قوة بالمقام : إذا كانت درجة البسط = درجة المقام

إذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل في [-٢، ٣] وكانت ٥ن تجزئة منتظمة لهذه الفترة بحيث $\text{م}(\text{٥ن}، \text{ق}) = \left(٧ - \dfrac{\text{٣ن} + ٥}{\text{ن}^{٢} + ٢}\right)$

أوجدي $\int_{-٢}^{٣} \text{ق(س)}\ \text{دس}$

$$\int_{-٢}^{٣} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نها}} \left(٧ - \dfrac{\text{٣ن} + ٥}{\text{ن}^{٢} + ٢}\right)$$

$$= ٧ - ٠ = \boxed{٧}$$

إذا كان ق(س) اقتران متصل على [أ، ب] فإن ق(س) اقتران قابل للتكامل في هذا المجال

ملاحظة: إذا كان ق(س) منفصل عند بعض الأعداد المعدودة فإنه قابل للتكامل وإذا كان ق(س) منفصل على فترة جزئية فإنه غير قابل للتكامل.

نظرية:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين معرّفين على [أ، ب]

وكان ق(س) = هـ(س) $\forall$ س $\in$ [أ، ب] / بعض النقاط المعدودة

وكان ق(س) قابل للتكامل على [أ، ب]

فإن هـ(س) قابل للتكامل في هذا المجال

ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) دس}$

ت إذا كان ق(س) = ٢س $\left[\dfrac{\text{س}}{٢} + ١\right]$ س $\in$ [٠، ٢]

بيني أن ق(س) قابل للتكامل في هذا المجال.

ل = ٢   س = -٢

د(س) = { ٢س   ، ٠ ≤ س < ٢
           ٨   ، س = ٢

عندما ٠ ≤ س < ٢   د(س) متصل لأنه كثير حدود

د(٢) = ٨
نهـا د(س) = ٤   ⇐ د(س) منفصل عند س = ٢
س ← ٢⁻

نفرض هـ(س) = ٢س ، س ∈ [٠،٢]

هـ(س) متصل ∀ س ∈ [٠،٢] ⇐ هـ(س) قابل للتكامل

لكن د(س) = هـ(س) ∀ س ∈ [٠،٢] / {٢}

⇐ د(س) قابل للتكامل

إذا كان د(س) = (س³ − ٨) / (س − ٢) ، بين أن د(س) قابل للتكامل على [-٢،٣]

د(س) منفصل عند س = ٢

د(س) = (س − ٢)(س² + ٢س + ٤) / (س − ٢)

هـ(س) = س² + ٢س + ٤ ، س ∈ [-٢،٣]

هـ(س) متصل ∀ س ∈ [-٢،٣] ⇐ هـ(س) قابل للتكامل

لكن د(س) = هـ(س) ∀ س ∈ [-٢،٣] / {٢}

∴ د(س) قابل للتكامل.

قواعد التكامل المحدود

قاعدة:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \text{ق}(\text{س})\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{ب}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \frac{\text{أ}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$$

أوجدي التكاملات التالية:

* $$\int_{-1}^{3} (3\text{س}^2 - 4\text{س} + 2)\,\text{دس}$$

$$= \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 2\text{س}\Big]_{-1}^{3}$$

$$= (27 - 18 + 6) - (-1 - 2 - 2)$$

$$= 15 + 5 = 20$$

* $$\int_{1}^{4} (2\text{س} + \text{هـ}^{2\text{س}-2})\,\text{دس}$$

$$= \text{س}^2 + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}-2}\Big]_{1}^{4}$$

$$= (16 + \frac{1}{2}\text{هـ}^6) - (1 + \frac{1}{2}\text{هـ}^0)$$

$$= 16 + \frac{1}{2}\text{هـ}^6 - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{هـ}^6$$

$$\frac{29}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} (\text{جتا}\,س - \text{جا}\,2س)\; \text{ء}س$$

$$= \text{جا}\,س + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2س \Big]_{0}^{\pi}$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

4) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{جتا}^2\, \frac{1}{2} س\right) \text{ء}س$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,س \;\text{ء}س$$

$$\frac{1}{2} س + \frac{1}{2}\,\text{جا}\,س \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

5) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\text{ظا}^2 س + \text{جتا}\,س\right) \text{ء}س$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\text{قا}^2 س - 1 + \text{جتا}\,س\right) \text{ء}س$$

$$= \text{ظا}\,س - س + \text{جا}\,س \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

⑧ $\int_{-1}^{1} \left((\sqrt[3]{\text{س}})^{1} + ٣\text{س}^{٢} + ٢ \right) \, \text{د}\text{س}$

$\int_{-1}^{1} \left((\text{س})^{\frac{1}{3}} + ٣\text{س}^{٢} + ٢ \right) \, \text{د}\text{س}$

$\frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{س}^{٣} + ٢\text{س} \Big|_{-1}^{1}$

$\left(\frac{٣}{٤}(١) + ١ + ٢ \right) - \left(\frac{٣}{٤}(١) - ١ - ٢ \right)$

$\cancel{\frac{٣}{٤}} + ٢ - \cancel{\frac{٣}{٤}} + ٣ = ٥$

⑦ $\int_{0}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س} \, \text{د}\text{س}$

$= \int_{0}^{\pi} \text{جاس} \, \text{جا}^{٢}\text{س} \, \text{د}\text{س}$

$= \int_{0}^{\pi} \text{جاس} (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}) \, \text{د}\text{س}$

$\text{ع} = \text{جتا س}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ع}}{-\text{جا س}}$

$= \int_{1}^{-1} \cancel{\text{جاس}} (١ - \text{ع}^{٢}) \frac{\text{د}\text{ع}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

عند $\text{س} = ٠$

$\text{ع} = \text{جتا} ٠ = ١$

$= -\left(\text{ع} - \frac{\text{ع}^{٣}}{٣} \right) \Big|_{1}^{-1}$

$\text{س} = \pi$

$\text{ع} = \text{جتا}\pi = -١$

$= -\left(\left(-١ + \frac{١}{٣} \right) - \left(١ - \frac{١}{٣} \right) \right)$

$= -\left(-٢ + \frac{٢}{٣} \right) = \frac{٤}{٣}$

(8) $\int_{١}^{٤} \left(\frac{٥}{٢\text{س}+٣}\right) \text{دس}$

$= \frac{٥}{٢} \text{لوه} |٢\text{س}+٣| \Big|_{١}^{٤}$

$= \frac{٥}{٢} (\text{لوه} ١١ - \text{لوه} ٥)$

$= \frac{٥}{٢} \text{لوه} \frac{١١}{٥} = \text{لوه} \sqrt{\left(\frac{١١}{٥}\right)^{٥}}$

(9) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٣\text{س}+١} \; \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٥} (٣\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} \text{دس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} (٣\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٥}$

$= \frac{٢}{٩} \left(\sqrt{٣\text{س}+١}\right)^{٣} \Big|_{٠}^{٥}$

$= \frac{٢}{٩} (٦٤ - ١) = \frac{١٢٦}{٩} = ١٤$

(10) $\int_{-١}^{٢} (\text{س}+١)(\text{س}^٢+٢\text{س}-٤)^{٤} \; \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٤$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢\text{س}+٢}$

$= \frac{\text{دع}}{٢(\text{س}+١)}$

$\text{س} = -١ \Leftarrow \text{ع} = -٥$

$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ع} = ٤$

$= \int_{-٥}^{٤} \cancel{(\text{س}+١)} \text{ع}^{٤} \frac{\text{دع}}{٢\cancel{(\text{س}+١)}}$

$= \frac{١}{٢} \frac{\text{ع}^{٥}}{٥} \Big|_{-٥}^{٤}$

$= \frac{١}{١٠} (٤^{٥} - (-٥)^{٥})$

$\frac{١}{١٠} (١٠٢٤ + ٣١٢٥) = ٤١٤٩ \times \frac{١}{١٠} = ٤١٤,٩$

(11) $\int_{\frac{1}{هـ}}^{هـ} (س \, لو_{هـ} س^{٢}) \, دس$

$= \int_{\frac{1}{هـ}}^{هـ} \underbrace{٢س}_{دهـ} \, \underbrace{لو_{هـ} س}_{ق} \, دس$

$ق = لو_{هـ} س \qquad دهـ = ٢س \, دس$

$دق = \frac{1}{س} \, دس \qquad هـ = س^{٢}$

$س^{٢} لو_{هـ} س \Big|_{\frac{1}{هـ}}^{هـ} - \int_{\frac{1}{هـ}}^{هـ} س \, دس$

$= \left(هـ^{٢} لو_{هـ} هـ - \frac{1}{هـ^{٢}} لو_{هـ} \frac{1}{هـ}\right) - \left(\frac{س^{٢}}{٢} \Big|_{\frac{1}{هـ}}^{هـ}\right)$

$لو_{هـ} \frac{1}{هـ} = -١$

$= هـ^{٢} + \frac{1}{هـ^{٢}} - \frac{هـ^{٢}}{٢} + \frac{1}{٢}\left(\frac{1}{هـ^{٢}}\right)$

$= \frac{٣}{٢} هـ^{٢} + \frac{٣}{٢هـ^{٢}}$

(12) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{س}_{ق} \, \underbrace{جتا س \, دس}_{دهـ}$

$ق = س \qquad دهـ = جتا س \, دس$

$دق = دس \qquad هـ = جا س$

$= س \, جا س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا س \, دس$

$= \left(\frac{\pi}{2} - ٠\right) + جتا س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2} + ٠ - ١ = \frac{\pi}{2} - ١$

(13)

$$\int_{1}^{4} \left(\frac{٢س}{س^2+٥س+٦} \right) دس$$

$$(س+٢)(س+٣)$$

$$\frac{٢س}{(س+٢)(س+٣)} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{س+٣}$$

$$٢س = أ(س+٣) + ب(س+٢)$$

$$س = -٢ \Leftarrow -٤ = أ$$

$$س = -٣ \Leftarrow -٦ = -ب \Leftarrow ب = ٦$$

$$= \int_{1}^{4} \left(\frac{-٤}{س+٢} + \frac{٦}{س+٣} \right) دس$$

$$= -٤ لو_هـ |س+٢| + ٦ لو_هـ |س+٣| \Big]_{1}^{4}$$

$$= (-٤ لو_هـ ٦ + ٦ لو_هـ ٧) - (-٤ لو_هـ ٣ + ٦ لو_هـ ٤)$$

(14)

$$\int_{1}^{3} \left(٣س^2 - ٢ \int_{-1}^{2} (٢م+١) دم \right) دس$$

$$= \int_{1}^{3} ٣س^2 - ٢(م^2 + م \Big]_{-1}^{2}) دس$$

$$= \int_{1}^{3} ٣س^2 - ٢(٦ - ٠) دس$$

$$= \int_{1}^{3} (٣س^2 - ١٢) دس$$

$$= س^3 - ١٢س \Big]_{1}^{3}$$

$$= (٢٧ - ٣٦) - (١ - ١٢)$$

$$= -٩ + ١١ = ٢$$

(15) بين أن $\int_0^1 س^{ن} ءس + \int_0^1 س^{\frac{1}{ن}} ءس = 1$

$$= \int_0^1 (س^{ن} + س^{\frac{1}{ن}}) ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + \frac{ن}{ن+1} س^{\frac{ن+1}{ن}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{ن+1} + \frac{ن}{ن+1} \times 1 - 0$$

$$= \frac{1+ن}{ن+1} = 1$$

(16) إذا كان $\int_{-1}^{1} س^{ن} ءس = 2 \int_0^1 س^{ن} ءس$

أوجدي جميع قيم ن التي تجعل المساواة قائمة بين الطرفين

$$\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \Big|_{-1}^{1} = 2 \left(\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \Big|_0^1 \right)$$

$$1 - (-1)^{ن+1} = 2(1-0)$$

$$1 - 2 = (-1)^{ن+1}$$

$$-1 = (-1)^{ن+1}$$ ⇐ -1 ظلت نفس القوة فردية ن+1 فردي

⇐ ن+1 عدد فردي — يعني ن زوجي.

⇐ ن أي عدد زوجي

(17) إذا كان ق(3) = 5 ، ق'(3) = 2 ، ق(6) = -1 ، ق'(6) = 3

أوجدي $\int_3^6 \underbrace{س}_{و} \underbrace{ق''(س) ءس}_{ءه}$

و = س ، ءه = ق''(س) ءس

ءو = ءس ، ه = ق'(س)

$$س ق'(س) \Big|_3^6 - \int_3^6 ق'(س) ءس$$

$$6 ق'(6) - 3 ق'(3) - \left(ق(س) \Big|_3^6 \right)$$

(١٨ - ٦) - (-١ - ٥)

١٢ + ٦ = ١٨

(18) أوجد $\int_{٢}^{٥} \left(\frac{س\, ق'(س) - ق(س)}{س^{٢}} \right) ء س$

علمًا أن ق(٢) = ٣ ، ق(٥) = ٧

$= \int_{٢}^{٥} \left(\frac{ق(س)}{س} \right)' ء س$

$= \left. \frac{ق(س)}{س} \right|_{٢}^{٥}$

$= \frac{ق(٥)}{٥} - \frac{ق(٢)}{٢} = \frac{٧}{٥} - \frac{٣}{٢}$

$= \frac{١٤ - ١٥}{١٠} = \frac{-١}{١٠}$

حلّينا أيضًا على الأجزاء ولكن هذه أسهل وأقصر.

$\frac{س\, ق'(س)}{س^{٢}} - \frac{ق(س)}{س^{٢}}$

وبطلع نفس المقدار الثاني ولكن بالموجب وبتختصر مع بعض.

(19) $\int_{١}^{ج} (٢س + ٥)\, ء س = صفر$ أول قيمة مضغوطة ١

$\left. \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س \right|_{١}^{ج} = صفر$

$\left. س^{٢} + ٥س \right|_{١}^{ج} = صفر$

(ج² + ٥ج) - (١ + ٥) = ٠

ج² + ٥ج - ٦ = ٠

(ج + ٦)(ج - ١) = ٠

$\boxed{ج = -٦}$ $\boxed{ج = ١}$

خصائص التكامل المحدود

أولاً: الخاصية الخطية

① $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس} = \text{٠}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس}$

③ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س) ءس} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$

④ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{د} \pm \text{هـ})(\text{س})\, \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ءس}$

⑤ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك ءس} = \text{ك(ب} - \text{أ)}$

إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{د(س) ءس} = \text{٧}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ(س) ءس} = -\text{٣}$

أوجدي ما يلي:

① $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} (\text{٢د} - \text{٤هـ})(\text{س})\, \text{ءس} = \text{٢}\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{د(س) ءس} - \text{٤}\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ(س) ءس}$

$= \text{٢(٧)} - \text{٤(}-\text{٣)} = \text{٢٦}$

② $\int_{\text{٥}}^{\text{١}} (\text{٢هـ(س)} + \text{٥د(س)} - \text{٦})\, \text{ءس}$

$= \text{٢}\int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{هـ(س) ءس} + \text{٥}\int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{د(س) ءس} - \int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{٦ ءس}$

$= \text{٢(٣)} + \text{٥(}-\text{٧)} - \text{٦(١} - \text{٥)}$

$= \text{٦} - \text{٣٥} + \text{٢٤}$

$= -\text{٥}$

③ $\int_{-2}^{0} \left(\text{س}\,\text{ه}(\text{س}^2+1) - 2\text{س}\right) \text{ءس}$

$= \int_{-2}^{0} \text{س}\,\text{ه}(\text{س}^2+1)\,\text{ءس} - \int_{-2}^{0} 2\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ع} = \text{س}^2 + 1$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{2\text{س}}$

$\text{س} = -2 \Leftarrow \text{ع} = 5$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ع} = 1$

$= \int_{5}^{1} \cancel{\text{س}}\,\text{ه}(\text{ع})\,\frac{\text{ءع}}{2\cancel{\text{س}}} - \left(\text{س}^2 \Big|_{-2}^{0}\right)$

$= \frac{1}{2}(-7) - (0 - 4)$

$= \frac{-7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$

④ إذا كانت ي تجزئة منتظمة للفترة [١، ٥] أوجدي
$\lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م}(\text{ي}، 4\text{ه} + 3\text{س}^2 + 2)$

$= \int_{1}^{5} \left(4\,\text{ه}(\text{س}) + 3\text{س}^2 + 2\right) \text{ءس}$

$= 4\int_{1}^{5} \text{ه}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{1}^{5} (3\text{س}^2 + 2)\,\text{ءس}$

$= 4(-3) + \text{س}^3 + 2\text{س} \Big|_{1}^{5}$

$= -12 + 135 - 3 = 120$

إذا كان $\int_{1}^{3} (2\,\text{د}(س) + 2س)\, \text{د}س = 24$

أوجد $\int_{3}^{1} (5\,\text{د}(س) - 7)\, \text{د}س$

$\int_{1}^{3} (2\,\text{د}(س) + 2س)\, \text{د}س$

$= 2\int_{1}^{3} \text{د}(س)\,\text{د}س + \int_{1}^{3} 2س\,\text{د}س = 24$

$\Leftarrow 2\int_{1}^{3} \text{د}(س)\,\text{د}س + [س^2]_{1}^{3} = 24$

$9 - 1$

$\Leftarrow 2\int_{1}^{3} \text{د}(س)\,\text{د}س = 16$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} \text{د}(س)\,\text{د}س = 8$

$\therefore \int_{3}^{1} (5\,\text{د}(س) - 7)\,\text{د}س = 5\int_{3}^{1} \text{د}(س)\,\text{د}س - \int_{3}^{1} 7\,\text{د}س$

$= 5(-8) - 7(1-3)$

$= -40 + 14 = -26$

إذا كان $\int_{1}^{3} \text{د}(س)\,\text{د}س = 5$ أوجد $\int_{5}^{3} (\text{د}(س-2) + 7)\,\text{د}س$

$\int_{5}^{3} \text{د}(س-2)\,\text{د}س + \int_{5}^{3} 7\,\text{د}س$

$ع = س - 2$

$\text{د}س = \text{د}ع$

$س = 5 \Leftarrow ع = 3$

$س = 3 \Leftarrow ع = 1$

$\int_{3}^{1} \text{د}(ع)\,\text{د}ع + 7(3-5)$

$= -5 + 7(-2)$

$= -19$

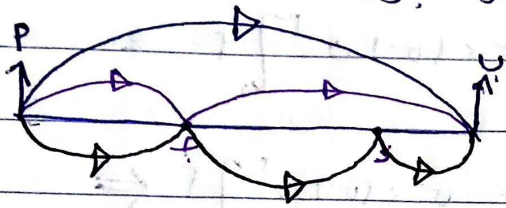
ثانياً: خاصية الإضافة

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \int_{أ}^{جـ} \text{ق(س)}\, \text{دس} + \int_{جـ}^{ب} \text{ق(س)}\, \text{دس}$$

ملاحظات:

١. تستخدم خاصية الإضافة عادةً لإيجاد تكاملات الاقترانات متعددة القاعدة.

٢- يمكن تجزئة التكامل الواحد إلى أكثر من جزئين



إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} ٣\text{س}^٢ + ٢ & -٢ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} - ٤ & ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٤\text{س} & ٣ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

أوجد $\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{دس}$

$$= \int_{-٢}^{١} (٣\text{س}^٢ + ٢)\, \text{دس} + \int_{١}^{٣} (٢\text{س} - ٤)\, \text{دس} + \int_{٣}^{٥} ٤\text{س}\, \text{دس}$$

$$= \text{س}^٣ + ٢\text{س} \Big|_{-٢}^{١} + \text{س}^٢ - ٤\text{س} \Big|_{١}^{٣} + ٢\text{س}^٢ \Big|_{٣}^{٥}$$

$$= (٣ - -١٢) + (-٣ - -٣) + (٥٠ - ١٨)$$

$$= ١٥ + ٠ + ٣٢$$

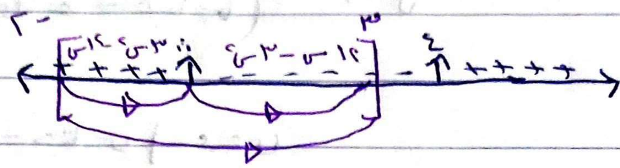
$$= ٤٧$$

* عند وجود قاعدة لعدد واحد لا نجزئه مثل ٥ ، س = ١ لأن $\int_{1}^{1} = $ صفر .

$$\int_{-2}^{3} \left| 3\text{س}^2 - 12\text{س} \right| \, d\text{س}$$

$3\text{س}^2 - 12\text{س} = 0$

$3\text{س}(\text{س} - 4) = 0 \Leftarrow \text{س} = 0 , 4$



$$= \int_{-2}^{0} (3\text{س}^2 - 12\text{س})\, d\text{س} + \int_{0}^{3} (12\text{س} - 3\text{س}^2)\, d\text{س}$$

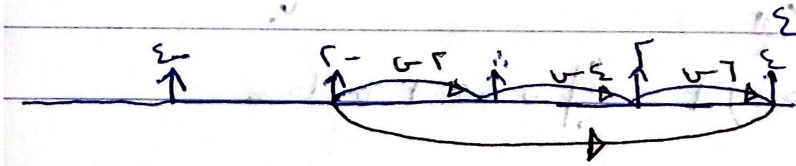
$$= \left[\text{س}^3 - 6\text{س}^2\right]_{-2}^{0} + \left[6\text{س}^2 - \text{س}^3\right]_{0}^{3}$$

$$= 0 - (-8 - 24) + (54 - 27 - 0)$$

$$= 32 + 27 = 59$$

$$\int_{-2}^{4} 2\text{س} \left[\frac{\text{س}}{2} + 1 \right] d\text{س}$$

ل $= 2$ ، س $= -4$



$$\int_{-2}^{4} 2\text{س} \left[\frac{\text{س}}{2} + 1 \right] d\text{س} = \int_{-2}^{0} 2\text{س}\, d\text{س} + \int_{0}^{2} 4\text{س}\, d\text{س} + \int_{2}^{4} 6\text{س}\, d\text{س}$$

$$= \left[\text{س}^2\right]_{-2}^{0} + \left[2\text{س}^2\right]_{0}^{2} + \left[3\text{س}^2\right]_{2}^{4}$$

$$= (0 - 4) + (8 - 0) + (48 - 12)$$

$$= -4 + 8 + 36$$

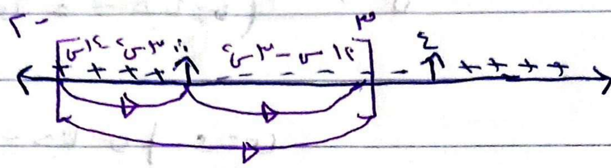
$$= 40$$

* عند وجود قاعدة لعدد واحد لا نقسمه مثل ٥ ، س = ١ لأن $\int_{1}^{1} = $ صفر .

$$\int_{-2}^{3} |3\text{س}^2 - 12\text{س}| \, d\text{س}$$

$$3\text{س}^2 - 12\text{س} = 0$$

$$3\text{س}(\text{س} - 4) = 0 \Rightarrow \text{س} = 0 ، 4$$



$$= \int_{-2}^{0} (3\text{س}^2 - 12\text{س}) \, d\text{س} + \int_{0}^{3} (12\text{س} - 3\text{س}^2) \, d\text{س}$$

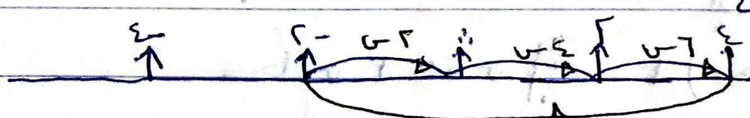
$$= \text{س}^3 - 6\text{س}^2 \Big|_{-2}^{0} + 6\text{س}^2 - \text{س}^3 \Big|_{0}^{3}$$

$$= 0 - (-8 - 24) + (54 - 27 - 0)$$

$$= 32 + 27 = 59$$

$$\int_{-2}^{4} 2\text{س} \left[\frac{\text{س}}{2} + 1\right] d\text{س}$$

$$ل = 2 ، \text{س} = -4$$



$$\int_{-2}^{4} د(\text{س}) \, d\text{س} = \int_{-2}^{0} 2\text{س} \, d\text{س} + \int_{0}^{2} 4\text{س} \, d\text{س} + \int_{2}^{4} 6\text{س} \, d\text{س}$$

$$= \text{س}^2 \Big|_{-2}^{0} + 2\text{س}^2 \Big|_{0}^{2} + 3\text{س}^2 \Big|_{2}^{4}$$

$$= (0 - 4) + (8 - 0) + (48 - 12)$$

$$= -4 + 8 + 36$$

$$= 40$$

٣٨

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جا}\,2\text{س}}\ \text{دس}$$

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - 2\,\text{جا س جتا س}}\ \text{دس}$$

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{(\text{جا س} - \text{جتا س})^2}\ \text{دس}$$

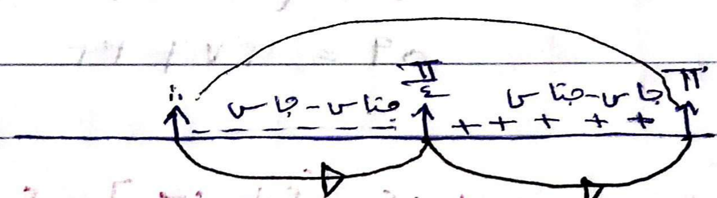
$$\int_{0}^{\pi} \left|\text{جا س} - \text{جتا س}\right|\ \text{دس}$$

∴ جا س − جتا س = ٠

جا س = جتا س

ربع أول ، ~~ربع ثالث~~

$\Leftarrow$ س $= \frac{\pi}{4}$



$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا س} - \text{جا س})\ \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{جا س} - \text{جتا س})\ \text{دس}$$

$$= \left.(\text{جا س} + \text{جتا س})\right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \left.(-\text{جتا س} - \text{جا س})\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) + (1 + 0) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

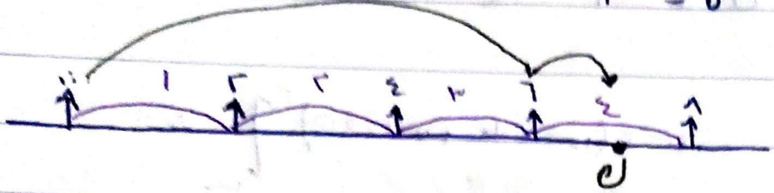
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ت إذا كان $\int_{1}^{\text{ل}} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ١\right] = ١٥$ أوجدي ل

مرة نقسم الخارجي ومرة داخلة

ل = ٢ ، س = -٢



$\int_{0}^{٢} ١ \, \text{دس} = ٢$ — ٢

$\int_{٢}^{٤} ٢ \, \text{دس} = ٤$ — ٦

$\int_{٤}^{٦} ٣ \, \text{دس} = ٦$ — ١٢

$\int_{٦}^{٨} ٤ \, \text{دس} = ٨$ — ٢٠

$= \int_{0}^{٦} \text{ق(س) دس} + \int_{٦}^{\text{ل}} ٤ \, \text{دس} = ١٥$

$١٢ + ٤(\text{ل} - ٦) = ١٥$

$٤(\text{ل} - ٦) = ٣$

$\text{ل} - ٦ = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \text{ل} = ٦\frac{٣}{٤}$

إذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = ٧$ ، $\int_{١}^{٩} \text{ق(س) دس} = ١٥$

إذا نحي تركيب فرض إلا نعني إضافة

أوجدي $\int_{٥}^{٩} \text{ق(س) دس} = \int_{٥}^{١} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٩} \text{ق(س) دس}$

$= -٧ + ١٥ = ٨$

إذا كان $\int_{-٣}^{٦} \text{ق(س) دس} = ١٠$ ، $\int_{٣}^{٦} ٢\text{ق(س) دس} = -١٠$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٦} \text{ق(س) دس} = -٥$

أوجدي $\int_{-٣}^{٣} (٥\text{ق(س)} + ٢\text{س}) \, \text{دس}$

$\int_{-3}^{3}$ د(س) ء س = $\int_{-3}^{6}$ د(س) ء س + $\int_{6}^{3}$ د(س) ء س

= ١٠ + ٥ = ١٥

∴ $\int_{-3}^{3}$ (٥د(س) + ٢س) ء س

= ٥ $\int_{-3}^{3}$ د(س) ء س + $\int_{-3}^{3}$ ٢س ء س

= ٥ × ١٥ + $\Big[$ س^2 $\Big]_{-3}^{3}$

= ٧٥ + (٩ - ٩) = $\boxed{٧٥}$

ثالثاً: خاصية المقارنة

١- إذا كان د(س) أصغر أو يساوي صفر ∀ س ∈ [أ، ب]

فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س ≤ صفر

2- إذا كان د(س) ≥ صفر ∀ س ∈ [أ، ب]

فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س ≥ صفر

3- إذا كان د(س) ≤ هـ(س) ∀ س ∈ [أ، ب] فإن

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س ≤ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ء س

٤- إذا كان ل ≤ د(س) ≤ م ∀ س ∈ [أ، ب]

$\int_{أ}^{ب}$ ل ء س ≤ $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س ≤ $\int_{أ}^{ب}$ م ء س

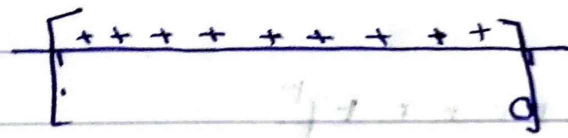
دون إجراء التكامل بيّن أن $\int_{٠}^{٥} \left(\frac{س + ٢}{س^٢ + ٣} \right) د س > ٠$

نبحث في إشارة $د(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣}$ ، $س \in [٠ ، ٥]$

$د(س) = ٠$

$\frac{س + ٢}{س^٢ + ٣} = ٠ \Leftarrow س + ٢ = ٠$

$س = -٢$



$\therefore د(س) > ٠ ، \forall س \in [٠ ، ٥]$

$\Leftarrow \int_{٠}^{٥} د(س) \, د س > ٠$

دون إجراء التكامل أثبت أن $\int_{٣}^{٧} \frac{١ - س}{س^٢ + ٦} د س < ٠$

نبحث في إشارة $د(س) = \frac{١ - س}{س^٢ + ٦}$ ، $[٣ ، ٧]$

$\frac{١ - س}{س^٢ + ٦} = ٠ \Leftarrow ١ - س = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\Leftarrow د(س) < ٠ \quad \forall س \in [٣ ، ٧]$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٧} د(س) \, د س < ٠$

دون إجراء التكامل أثبت أن $\int_{-1}^{3} \frac{5}{س+2}\, dس > \int_{-1}^{3} \frac{2}{3س+7}\, dس$

نفرض $ق(س) = \frac{5}{س+2} - \frac{2}{3س+7}$ ، $[-1 ، 3]$

نبحث في إشارة $ق(س)$

$\Leftarrow \frac{15س + 35 - 2س - 2}{(س+2)(3س+7)} = 0$

$13س + 33 = 0 \Leftarrow س = \frac{-33}{13}$

$\underset{-1}{[} + + + + + + \overset{3}{]}$

$\therefore \frac{5}{س+2} - \frac{2}{3س+7} > 0 \quad \forall\, س \in [-1 ، 3]$

$\frac{5}{س+2} > \frac{2}{3س+7} \quad \forall\, س \in [-1 ، 3]$

$\Leftarrow \int_{-1}^{3} \frac{5}{س+2}\, dس > \int_{-1}^{3} \frac{2}{3س+7}\, dس$

دون إجراء التكامل أثبت $\int_{0}^{1} س^2\, dس \le \int_{0}^{1} س\, dس$

نفرض $ق(س) = س^2 - س$ ، $[0 ، 1]$

نبحث في إشارة $ق(س)$

$س^2 - س = 0 \Leftarrow س(س-1) = 0$

$س = 0$ ، $س = 1$

$+ + + \overset{0}{\uparrow} - - - - - - \overset{1}{\uparrow} + + +$

$س^2 - س \le 0 \quad \forall\, س \in [0 ، 1]$

$س^2 \le س \quad \forall\, س \in [0 ، 1]$

$\int_{0}^{1} س^2\, dس \le \int_{0}^{1} س\, dس$

إذا كان د(س) $\geq$ ٥ ∀ س ∈ [-٢، ٤] أوجدي أكبر قيمة

$\int_{-٢}^{٤} (٣د(س) + ٢س + ٥)$ ءس

د(س) $\geq$ ٥ ∀ س ∈ [-٢، ٤]

$\int_{-٢}^{٤}$ د(س) ءس $\geq \int_{-٢}^{٤}$ ٥ ءس

⇐ $\int_{-٢}^{٤}$ د(س) ءس $\geq$ ٣٠

أكبر قيمة $\int_{-٢}^{٤}$ د(س) ءس = ٣٠

∴ أكبر قيمة $\int_{-٢}^{٤}$ ٣د(س) ءس + $\int_{-٢}^{٤}$ (٢س + ٥) ءس

= ٣(٣٠) + $[$س^٢ + ٥س$]_{-٢}^{٤}$

= ٩٠ + ٣٦ - -٦

= ١٣٢

إذا كان د(س) $\leq$ ١٠ ∀ س ∈ [١، ٤] أوجدي أقل قيمة

$\int_{١}^{٤} (٥د(س) + ٧)$ ءس

د(س) $\leq$ ١٠ ∀ س ∈ [١، ٤]

⇐ $\int_{١}^{٤}$ د(س) ءس $\leq \int_{١}^{٤}$ ١٠ ءس

$\int_{١}^{٤}$ د(س) ءس $\leq$ ٣٠

أقل قيمة $\int_{١}^{٤}$ د(س) ءس = ٣٠

أقل قيمة $\int_{١}^{٤}$ ٥د(س) + $\int_{١}^{٤}$ ٧ ءس = ٥(٣٠) + ٧(٣)

= ١٥٠ + ٢١ = ١٧١

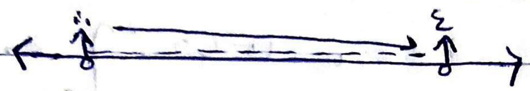
دون إجراء التكامل اثبت أن : $٠ \leq \int_{٠}^{٤} \sqrt{١٦ - \text{س}^٢}\, \text{د س} \leq ١٦$

نجد القيم القصوى المطلقة للاقتران $\text{ق(س)} = \sqrt{١٦ - \text{س}^٢}$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٤]$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١٦ - \text{س}^٢}} = ٠$$

$-٢\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$ ، ✗

سلوك ق(س)



إشارة ق'(س)

عند س = ٠ قيمة عظمى مطلقة هي ق(٠) = ٤

عند س = ٤ قيمة صغرى مطلقة هي ق(٤) = ٠

$٠ \leq \text{ق(س)} \leq ٤ \quad \forall\, \text{س} \in [٠ ، ٤]$

$$\int_{٠}^{٤} ٠\, \text{د س} \leq \int_{٠}^{٤} \text{ق(س)}\, \text{د س} \leq \int_{٠}^{٤} ٤\, \text{د س}$$

$$٠ \leq \int_{٠}^{٤} \text{ق(س)}\, \text{د س} \leq ١٦$$

دون إجراء التكامل أثبت أن : $-٢\pi \leq \int_{٠}^{٢\pi} \text{جتا}^٣\text{س}\, \text{د س} \leq ٢\pi$

$-١ \leq \text{جتا س} \leq ١ \quad \forall\, \text{س} \in [٠ ، ٢\pi]$

$-١ \leq \text{جتا}^٣\text{س} \leq ١$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٢\pi} -١\, \text{د س} \leq \int_{٠}^{٢\pi} \text{جتا}^٣\text{س}\, \text{د س} \leq \int_{٠}^{٢\pi} ١\, \text{د س}$$

$$-٢\pi \leq \int_{٠}^{٢\pi} \text{جتا}^٣\text{س}\, \text{د س} \leq ٢\pi$$

م إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على ح وكان ق(س) ≥ هـ(س)

∀ س ∈ [٢ ، ٥] أثبت أن $\int_{٧}^{٤} ق(س-٢)\, دس \le \int_{٣}^{٠} هـ(س+٢)\, دس$

ق(س) ≥ هـ(س) ∀ س ∈ [٢ ، ٥]

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس \ge \int_{٢}^{٥} هـ(س)\, دس$

$\Leftarrow -\int_{٥}^{٢} ق(س)\, دس \ge -\int_{٥}^{٢} هـ(س)\, دس$ X -1

ع = س - ٢ ⇐ دس = دع

س = ٧ ⇐ ع = ٥

س = ٤ ⇐ ع = ٢

$\int_{٥}^{٢} ق(س)\, دس \le \int_{٥}^{٢} هـ(س)\, دس$

$\int_{٧}^{٤} ق(س-٢)\, دس$

$= \int_{٥}^{٢} ق(ع)\, دع$

$\int_{٧}^{٤} ق(س-٢)\, دس \le \int_{٣}^{٠} هـ(س+٢)\, دس$

نفرض ل = س + ٢ ⇐ دل = دس

س = ٣ ⇐ ل = ٥

س = ٠ ⇐ ل = ٢

$\int_{٣}^{٠} هـ(س+٢)\, دس$

$= \int_{٥}^{٢} هـ(ل)\, دل$

م إذا كان ق(س) اقتران ≠ صفر ∀ س ∈ ح وكان $\frac{٥}{ق(س)} > ٠$

∀ س ∈ [١ ، ٣] أثبت أن $\int_{٣}^{١} ق(س)\, هـ^{س} < ٠$

$\frac{٥}{ق(س)} > ٠$ ∀ س ∈ [١ ، ٣]

⇐ ق(س) > ٠ ∀ س ∈ [١ ، ٣]

$هـ^{س} > ٠$ ∀ س ∈ [١ ، ٣]

$\Leftarrow$ ق(س) $هـ^{س} > ٠$ ∀ س ∈ [١، ٣]

$\Leftarrow \int_{١}^{٣}$ ق(س) $هـ^{س}$ دس > ٠

$- \int_{٣}^{١}$ ق(س) $هـ^{س}$ دس $> ٠ \quad \times -١$

$\int_{٣}^{١}$ ق(س) $هـ^{س}$ دس < ٠

ب) إذا كان منحنى قَ(س) يقع فوق محور السينات في الفترة [-١، ٥]
أثبت أن $\int_{٠}^{٣}$ (قَ(س) + $هـ^{س}$) دس > ٠

قَ(س) > ٠ ، ∀ س ∈ [٠، ٣]

$هـ^{س} > ٠$ ، ∀ س ∈ [٠، ٣]

$\Leftarrow$ قَ(س) + $هـ^{س} > ٠$ ، ∀ س ∈ [٠، ٣]

$\Leftarrow \int_{٠}^{٣}$ (قَ(س) + $هـ^{س}$) دس > ٠