المصفوفات

١ المصفوفة : هي مجموعة من الأعداد المرتبة على صورة صفوف وأعمدة بحيث يكون عدد الأعداد في كل صف متساوي وعدد الأعداد في كل عمود متساوي وتسمى عادة بأحد الأحرف أ ، ب ، ..... الخ

وتوضع هذه الأعداد داخل قوسين [ ]

٢ تسمى الأعداد الموجودة في داخل المصفوفة بمدخلات المصفوفة.

٣ رتبة المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة.

٤ لتحديد موقع أي مدخلة من مدخلات المصفوفة يجب معرفة رقم الصف ورقم العمود الذي يحتوي على هذه المدخلة ويرمز لأي مدخلة من مدخلات المصفوفة أ بالرمز $أ_{ي هـ}$ ← رقم الصف ← رقم العمود

س: إذا كانت أ =
$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢- & ٤ & ٥ \\ ١ & ١- & ٦ & ٣- \\ ٥ & ٤ & ٩ & ١٠ \end{bmatrix}$$

أوجد: ١ رتبة أ = ٣ × ٤

٢ مدخلات الصف الثاني: ١ ، -١ ، ٦ ، -٣

٣ مدخلات العمود الرابع: ٥ ، -٢ ، ١٠

٤ $أ_{٢٣}$ = ٦ $أ_{٢٢}$ = -١

$أ_{٣٣}$ = ٩

$أ_{٤١}$ = ٥

٥ $\sum_{ي=١}^{٣} أ_{ي٣} = أ_{١٣} + أ_{٢٣} + أ_{٣٣}$

= ٤ + ٦ + ٩ = ١٩

٦ $\sum_{هـ=١}^{٤} أ_{٢هـ} = أ_{٢٢} + أ_{٢٣} + أ_{٢٤}$

= -١ + ٦ + -٣ = ٢

٧) ٥ أ٢١ + ٣ أ٢٢ − ٢ أ١١

= ٥ (−٢) + ٣ (٦) − ٢ (٣)

= −١٠ + ١٨ − ٦ = ٢

س: مصنع للأقمشة له ثلاثة فروع أ ، ب ، جـ ينتج الفرع أ يومياً ١٠٠م قطن ، ١٥٠م صوف ، ٢٠٠م كتان ، ٥٠م حرير
وينتج الفرع ب يومياً ٢٠٠م قطن ، ١٠٠م صوف ، ٢٥٠م كتان ، ١٥٠م حرير
وينتج الفرع جـ يومياً ١٥٠م قطن ، ١٥٠م صوف ، ١٥٠م كتان ، ٣٠٠م حرير
نظم هذه البيانات في مصفوفة

١) من الرتبة ٣ × ٤

٢) من الرتبة ٤ × ٣

١)

	قطن	صوف	كتان	حرير
أ	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٥٠
ب	٢٠٠	١٠٠	٢٥٠	١٥٠
جـ	١٥٠	١٥٠	١٥٠	٣٠٠

٣ × ٤

٢)

	أ	ب	جـ
قطن	١٠٠	٢٠٠	١٥٠
صوف	١٥٠	١٠٠	١٥٠
كتان	٢٠٠	٢٥٠	١٥٠
حرير	٥٠	١٥٠	٣٠٠

٤ × ٣

أنواع المصفوفات :

١) المصفوفة المربعة وهي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة
وتسمى عادة المصفوفة الثنائية (٢×٢)
الثلاثية (٣×٣) وهكذا .

٢) المصفوفة الصفية وهي المصفوفة التي تحتوي على صف واحد فقط

٣) المصفوفة العمودية وهي المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد فقط

٤) المصفوفة الصفرية واو (و) وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها أصفار

٥) المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات (مصفوفة الوحدة) وهي المصفوفة المربعة (م) التي تكون جميع مدخلاتها أصفار ما عدا مدخلات القطر الأول فتكون جميعها واحدات

م = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

م = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٦) المصفوفة القطرية وهي المصفوفة التي تكون مربعة وتكون جميع مدخلاتها أصفار ما عدا مدخلات القطر الأول فتكون أعداد حقيقية (كل محايدة قطرية) القطرية ما اشترط القطر ١ مثل المحايدة .

٧) المصفوفة المثلثية العلوية وهي المصفوفة المربعة وتكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الأول أصفار وباقي المدخلات أعداد حقيقية

$\begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$$أ_{م\times ن} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ \vdots & & أ_{ي هـ} & \vdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} \end{bmatrix}$$

س: أوجدي المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٣ بحيث

$$أ_{ي هـ} = \begin{cases} ي^{٢} - هـ & ي < هـ \\ ٢هـ + ي & ي = هـ \\ ٢^{هـ} & ي > هـ \end{cases}$$

$$أ_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

ي > هـ

ي = هـ

ي < هـ

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢- \\ ٢ & ٦ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٩ \end{bmatrix}_{٣\times٣}$$

س: اكتبي المصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢ بحيث

$$ب_{ي هـ} = \begin{cases} ي^{٢} + هـ^{٢} & ي \neq هـ \\ ٣^{ي-١} & ي = هـ \end{cases}$$

$$ب_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{١٢} \\ ب_{٢١} & ب_{٢٢} \\ ب_{٣١} & ب_{٣٢} \end{bmatrix}$$

ي ≠ هـ

ي = هـ

ي ≠ هـ

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٥ & ٣ \\ ١٠ & ١٣ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

س٢: أوجدي المصفوفة أ $_{٣\times٤}$ حيث

$$أ_{يهـ} = \begin{cases} ٢ي + ١ & ي > هـ \\ ي + هـ & ي = هـ \\ ي^{٢} - هـ^{٢} & ي < هـ \end{cases}$$

$$أ_{٣\times٤} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} & أ_{١٤} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} & أ_{٢٤} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} & أ_{٣٤} \end{bmatrix}$$

ي < هـ

ي = هـ

ي > هـ

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٣ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٥ & ٥ \\ ٨ & ٥ & ٦ & ٧ \end{bmatrix}$$

تساوي المصفوفات:

المصفوفة أ = المصفوفة ب إذا كان:

١- رتبة أ = رتبة ب

٢- جميع المدخلات المتناظرة متساوية ($أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$)

س: أوجدي قيمة المجهول فيما يلي:

① $\begin{bmatrix} س^{٢} - ٢س & ٣^{٢ص+١} \\ لو_{٣} ع + ١ & ٢ل + ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨١ \\ ٢ & ٥ل + ١٠ \end{bmatrix}$

$س^{٢} - ٢س = ٣ \Leftarrow س^{٢} - ٢س - ٣ = ∴$

$(س - ٢)(س + ١) = ∴$

$س = ٣ ، -١$

$لو_{م}\,س = ٥ \Leftarrow س = م^{٥}$

$٣^{٢ص+١} = ٨١$

$٣^{٢ص+١} = ٣^{٤}$

$٢ص + ١ = ٤$

$ص = \frac{٣}{٢}$

$لو_{٣}(ع+١) = ٢$

$ع + ١ = ٣^{٢} = ٩$

$\therefore ع = ٨$

$٣ل + ٥ = ٥ل + ١٠$

$-٥ = ٣ل$

$ل = \frac{-٥}{٣}$

(٢) $\begin{bmatrix} س^{٢} + ٥س & ٣ + ٢^{ص-١} & ٢س + ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣٥ & ٥ \end{bmatrix}$

$س^{٢} + ٥س = ٠$

$س(س + ٥) = ٠$

$س = ٠ \quad ، -٥ \times$

$٢س + ٥ = ٥$

$٢س = ٠$

$س = ٠$

$٣ + ٢^{ص-١} = ٣٥$

$٢^{ص-١} = ٣٢$

$٢^{ص-١} = ٢^{٥}$

$ص - ١ = ٥$

$\boxed{ص = ٦}$

$\therefore$ س = ٠ نأخذ الحل المشترك

وإذا لم يوجد تكون مجموعة الحل $\emptyset$

العمليات الحسابية على المصفوفات

أولاً : جمع وطرح المصفوفات

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان من نفس الرتبة و نجمع أو نطرح المدخلات المتناظرة

س: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$ب = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

أوجدي: ① أ + ب ② أ − ب

$$\underset{2\times3}{أ} + \underset{2\times3}{ب} = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 11 & 8 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$أ - ب = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -9 & -4 & 1 \end{bmatrix}}$$

س: أوجدي ناتج ما يلي :

① $\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ 6 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

② $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٥ & ٢ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٨ \\ -١ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$

س: أوجد قيمة المجهول فيما يلي:

① $\begin{bmatrix} ٣ص - ٢ & س^٢ + ٣س \\ ٣ل & ٢ + ٣^{ع+٢} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ص & ٢س \\ ٢ل - ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٦ \\ ٢٩ & ٣٢ \end{bmatrix}$

$س^٢ + ٣س + ٢س = ٦$

$س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

$(س + ٦)(س - ١) = ٠$

$س = -٦ ، ١$

$٣ص - ٢ + ٥ص = ١٦$

$٨ص = ١٨$

$ص = \frac{١٨}{٨}$

$٢ + ٣^{ع+٢} + ٣ = ٣٢$

$٣^{ع+٢} = ٢٧$

$٣^{ع+٢} = ٣^٣$

$ع + ٢ = ٣$

$ع = ١$

$٥ل - ١ = ٢٩$

$٥ل = ٣٠ \Leftarrow ل = ٦$

خصائص عملية جمع المصفوفات:

١- عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية $أ + ب = ب + أ$

٢- عملية جمع المصفوفات عملية تجميعية $(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)$

٣- المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد في عملية جمع المصفوفات $(أ + و = و + أ = أ)$

٤- النظير الجمعي للمصفوفة أ هو $-أ$ $(أ + -أ = -أ + أ = و)$

ثانياً : ضرب المصفوفة بعدد ثابت

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب جميع مدخلات هذه المصفوفة بذلك العدد الثابت وتنتج مصفوفة جديدة من نفس الرتبة

س: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٨ & ٦- & ٤ \\ ٢ & ١٠ & ٢- \end{bmatrix}$

① $٥أ = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٣٠- & ٢٠ \\ ١٠ & ٥٠ & ١٠- \end{bmatrix}$

② $-٣أ = \begin{bmatrix} ٢٤- & ١٨ & ١٢- \\ ٦- & ٣٠- & ٦ \end{bmatrix}$

③ $\frac{١}{٢}أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٢ \\ ١ & ٥ & ١- \end{bmatrix}$

س: أوجدي ناتج ما يلي :

① $٥ \begin{bmatrix} ٤ & ٢- & ٣ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ١- \\ ٢- & ٢ & ٠ \end{bmatrix} - ٣ \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٠ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٦ & ٤ & ١٠ \\ ١ & ٥ & ٥ \end{bmatrix}$

② $\left(\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢- & ٢ \\ ٣ & ٣- \end{bmatrix} ٥ + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} ٣$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ١٤ & ٩- \\ ١٠- & ٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٨- & ٦ \\ ١٩ & ١٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٦ & ٣- \\ ٩ & ١٥ \end{bmatrix} =$$

س: إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ن = $\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$

أوجدي ما يلي :

① ٣م − ٢ن + ٥م ② ٤و + م − ٣ن ③ ١٠٠م + ١٠١ن − ٩٩(م + ن)

عرفنا انه ٢ لأنه كله من نفس الرتبة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = ①$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ١١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٩ \\ ٦ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = ②$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٥- \\ ٦- & ٥- \end{bmatrix} =$$

③ ١٠٠م + ١٠١ن − ٩٩م − ٩٩ن = م + ٢ن

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} =$$

يعني المجهول مصفوفة وليس عدد .

س: حلّ المعادلات المصفوفية التالية :

① $٥س - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = ٢س + \begin{bmatrix} ١٨ & ١٢ & ١٠ \\ ١٥- & ٩ & ٧ \end{bmatrix}$

س مصفوفة لأنه بنجمع المصفوفات

$٥س - ٢س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} \qquad -٢س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٣} \times \quad ٣س = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٥ & ١١ \\ ١١- & ١١ & ٧ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٣}$

$س = \begin{bmatrix} \frac{٢٠}{٣} & ٥ & \frac{١١}{٣} \\ \frac{١١-}{٣} & \frac{١١}{٣} & \frac{٧}{٣} \end{bmatrix}$

② $٧س - ٣\left(س - \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١٠ & ٩ \\ ١١- & ١٢ \end{bmatrix}$

$٧س - ٣س + \begin{bmatrix} ١٥ & ٣ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٩ \\ ١١- & ١٢ \end{bmatrix}$

$- \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad - \begin{bmatrix} ١٥ & ٣ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٤} \times \quad ٤س = \begin{bmatrix} ٥- & ٦ \\ ٢٣- & ٦ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٤}$

$س = \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٤} & \frac{٦}{٤} \\ \frac{٢٣-}{٤} & \frac{٦}{٤} \end{bmatrix}$

(٣) ٣س + ص = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(٤) ٣س − ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ١٣- & ٨ \end{bmatrix}$

$\frac{1}{5}\times$ ٥س = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ١٠- & ١٠ \end{bmatrix} \times \frac{1}{5}$

س = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$

٢س + ص = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

ص = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٤ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix}$

ثالثاً: ضرب المصفوفات

عند ضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية وتنتج مصفوفة جديدة رتبتها تساوي عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة الثانية

$$أ_{٣\times٥} \times ب_{٥\times٤} = جـ_{٣\times٤}$$

$$ب_{٥\times٤} \times أ_{٣\times٥}$$ لا يمكن

$$أ_{٣\times ن} \times ب_{م\times٤} = جـ_{٤\times٥}$$ ن = ٤ م = ٥ ع = ٣

$$أ_{ن\times م} \times ب_{٢\times٤} = جـ_{٥\times٥}$$ م = ٥ ن = ٢ ع = ٥

عند ضرب المصفوفات فإننا نضرب صف بعمود

س: إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

أ×ب ، ب×أ (إن أمكن)

$$أ_{٣\times٣} \times ب_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٣-٢+١٠ & ٣-٣+٠ \\ -٥+٤+٥ & ٥+٦+٠ \\ -٣+٠+١٠ & ٣+٠+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ١١ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

$$ب_{٣\times٢} \times أ_{٣\times٣}$$ لا يمكن

س: أوجد ناتج ما يلي إن أمكن

① $\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٥ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢- & ١ \end{bmatrix}$

٣×٢ ، ٣×٣

$= \begin{bmatrix} ٦+١٥+١٠ & ٤+٣+٥- & ٠+٩+٥ \\ ١٢+١٠-٢ & ٨+٢-١- & ٠+٦-١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣١ & ٢ & ١٤ \\ ٤ & ٥ & ٥- \end{bmatrix}$

٢×٣

② $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

٢×٢ ، ٢×٢

$= \begin{bmatrix} ٦+١- & ٩+١ \\ ١٠+٢- & ١٥+٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٨ & ١٧ \end{bmatrix}$

٢×٢

③ $\begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ١٩ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥-٣ & ٢-١ \\ ١٠+٩ & ٥+٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

3×2 3×2

لا يمكن

$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

بين أن $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2 & -3-1 \\ 6+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^2 = \text{ب} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+10 & 0+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 25 \end{bmatrix}$

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & -26 \end{bmatrix}$

$(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4 & -2-6 \\ 0-16 & 0-24 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & -24 \end{bmatrix} \neq \text{أ}^2 + \text{ب}^2$

خصائص عملية ضرب المصفوفات :

١- ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية أ × ب ≠ ب × أ

٢- عملية ضرب المصفوفات عملية تجميعية (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

٣- م هي المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المربعة (أ × م = م × أ = أ)

٤- عملية ضرب المصفوفات تتوزع على الجمع والطرح ومن الجهتين .

الجهتين أ (ب ± جـ) = أب ± أجـ ، (ب ± جـ) (أ) = ب × أ ± جـ × أ

الضرب ليس تبديلي

٣×٤ ، ٤×٣

$$\begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦+٠+٢+٠ & ٩-٢+٦+٢ & -٣-٣-٤+٠ \\ ٨+٠+٣+٠ & ١٢+٢+٩+٠ & -٤+٣-٦+٠ \\ ٤+٠+٥+٠ & ٦+٢+٩+٢ & -٢+٣-١٠+٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ١٥ & -١٠ \\ ١١ & ٢٣ & -٧ \\ ٩ & ١٩ & -٩ \end{bmatrix}$$

٣×٣

المحددات :

المحدِّد هو : عدد حقيقي يتم حسابه للمصفوفات المربعة يرمز لمحدِّد المصفوفة أ $|أ|$

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} - أ_{٢١})$

محدِّد أ

س : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ أوجد $|أ|$

$|أ| = ١٨ - ١٠ = ٨$

س : ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $|ب|$

$|ب| = ٢٠ - -٢ = ٢٢$

س : ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $|ب|$

$|ب| = -١٢ - ١٠ = -٢٢$

س: $أ = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، $|-2أ|$ ، $4|أ|$

$-2أ = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \Leftarrow |-2أ| = -48 - -8$

$= -40$

$4|أ| = 4(-12 - -2) = 4 \times -10 = -40$

س: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

① $|أ|$ ، $|ب|$ ، $|أب|$

② $|أ+ب|$ ، $|أ| + |ب|$

① $|أ| = 12 - 10 = 2$

$|ب| = -6 - 3 = -9$

$|أب| = \begin{vmatrix} -6+15 & 3+15 \\ -4+12 & 2+12 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}$

$= 126 - 144 = -18$

② $|أ+ب| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 30 = -23$

$|أ| + |ب| = 2 + -9 = -7$

$|أ| = ١$

س: أوجدي ناتج ما يلي :

$$* \; ٥\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$٥(٩ - ٨) - ٢(-٤ - -٤) + ٣(١٢ - ٧)$$
$$= ٥ - ٠ + ١٥ = ٢٠$$

$$* \; ٣\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} + ٧\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(١٢ - ٦) - \frac{١}{٢}(١٢ - ١٠) + ٧(١ - ٠) = ١٨ - ١ + ٧ = ٢٤$$

س: $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ -٢ & س \end{bmatrix}$ ، $|أ| = ٢٠$ أوجدي قيمة س

$$|أ| = س^٢ - -٤ = ٢٠$$
$$س^٢ = ١٦$$
$$س = \pm ٤$$

تسمى المصفوفة م مصفوفة منفردة، إذا كان |م| = صفر

س: م = $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أوجدي قيمة س التي تجعل م مصفوفة منفردة

|م| = ٠

٢س − ١٢ = ٠ ⇐ س = ٦

م = $\begin{bmatrix} ع & ص & س \\ ن & م & ل \\ ي & و & هـ \end{bmatrix}$

فإن |م| = س $\begin{vmatrix} ن & م \\ ي & و \end{vmatrix}$ − ص $\begin{vmatrix} ن & ل \\ ي & هـ \end{vmatrix}$ + ع $\begin{vmatrix} م & ل \\ و & هـ \end{vmatrix}$

س: م = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١- & ١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أوجدي |م|

|م| = ٣ $\begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ − ٢ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ + ٥ $\begin{vmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٣(٠ − ٦) − ٢(٠ − ٤) + ٥(٣ − −٢)

= −١٨ + ٨ + ٢٥ = ١٥

س: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ -٤ & ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ أوجد |أ|

$$|أ| = ٥\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & -٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٤ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٥(-٤ - ٩) + ٣(-٢ - -١٢) - ٢(٣ - -٨)$$

$$= -٦٥ + ٣٠ - ٢٢ = -٥٧$$

ب = $\begin{bmatrix} ٦ & -٤ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -٣ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، |ب|

$$|ب| = ٦\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} + ٤\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٦(-٣ - ١٠) + ٤(-١ - -١٥) + ٢(٢ - -٩)$$

$$= ٦ \times -١٣ + ٤ \times ١٤ + ٢ \times ١١$$

$$= -٧٨ + ٥٦ + ٢٢ = \text{صفر}$$

س: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

أوجدي $|أ|$

١) بالاعتماد على العمود الثاني

٢) بالاعتماد على الصف الثالث

١) $|أ| = 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 3 \times -1 (1 - -4) + 6 \times 1 (2 - -10) + 4 \times -1 (-4 - -5)$

$= -15 + 72 - 4 = 53$

٢) $|أ| = 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2 \times 1 (-6 - -30) + 4 \times -1 (-4 - -5) + 1 \times 1 (12 - 3)$

$= 48 - 4 + 9 = 53$

نظريات :

(١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فإن

|ك أ| = ك^ن |أ|

(٢) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة فإن

|أ ب| = |أ| × |ب|

س : إذا كانت أ، ب مصفوفتان ثنائيتان وكان |٣ أ ب| = ٣٦

|-٢ أ| = ٢٠

أوجد |-٤ ب| = ؟؟

|-٤ ب| = (-٤)^٢ |ب| = ١٦ |ب|

|٣ أ ب| = ٩ |أ| |ب| = ٣٦

|-٢ أ| = ٢٠ ⟸ ٤ |أ| = ٢٠ ⟸ |أ| = ٥

٩ × ٥ |ب| = ٣٦

|ب| = ٣٦/٤٥ = ٤/٥

١٦ |ب| = ١٦ × ٤/٥ = ٦٤/٥

خصائص المحددات:

١- إذا كانت مدخلات صف كامل أو عمود كامل أصفار

$\begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

فإن المحدد = صفر

٢- عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود فإننا نعكس إشارة المحدد.

$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ١٠ - ٣ = ٧

$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ ٣ - ١٠ = ٧-

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ ١٠ - ٣ = ٧

٣- إذا كانت مدخلات أحد الصفوف أو أحد الأعمدة = مدخلات صف آخر أو عمود آخر مضروب بعدد ثابت فإن المحدد = صفر

$\begin{vmatrix} ٦- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{vmatrix}$ ١٢- - ١٢- = صفر

$\begin{vmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٥ & ٥ \end{vmatrix}$ ٤٥ - ٤٥ = صفر

٤- عند إضافة صف أو عمود مضروب بعدد ثابت ≠ صفر إلى صف آخر أو عمود آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٣ - ١٠ = ٧-

$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ١١ & ٨ \end{vmatrix}$ ضربنا $\begin{cases} ٣ \times ٢ + ٢ = ٨ \\ ٥ \times ٢ + ١ = ١١ \end{cases}$ ٣ / ٣

$\begin{vmatrix} ١- & ٣- \\ ٢- & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣- = ٢- ٩- = ٣-

٥- عند إخراج عامل مشترك من أحد الصفوف أو من أحد الأعمدة فإن قيمة المحدد لا تتأثر

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ - ١٢ = ٣$$

$$٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣(٥-٤) = ٣ \times ١ = ٣$$

٦- إذا كانت أ مصفوفة مثلثية علوية فإن محدد أ = حاصل ضرب الأعداد الواقعة على القطر الأول

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٥ \times ١ \times ٤ = ٢٠$$

س: باستخدام خصائص المحددات أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & \text{ب}+\text{ج} & ٣ \\ \text{ب} & \text{ج}+٢\text{أ} & ٣ \\ \text{ب}+\text{ج} & ٢\text{أ} & ٣ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\xrightarrow[\text{ع}_١ + \text{ع}_٢]{\text{عمود}_١ + \text{عمود}_٢} \begin{vmatrix} ٢\text{أ}+\text{ب}+\text{ج} & \text{ب}+\text{ج} & ٣ \\ \text{ب}+٢\text{أ}+\text{ج} & ٢\text{أ}+\text{ج} & ٣ \\ \text{ب}+\text{ج}+٢\text{أ} & ٢\text{أ} & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (٢\text{أ}+\text{ب}+\text{ج}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب}+\text{ج} & ٣ \\ ١ & ٢\text{أ}+\text{ج} & ٣ \\ ١ & ٢\text{أ} & ٣ \end{vmatrix}$$

$= (٢\text{أ}+\text{ب}+\text{ج})\,(٠)$ ← لأن العمود٣ = ٣ع١

= صفر

النظير الضربي للمصفوفات المربعة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان مربعتين من نفس الرتبة وكان $\text{أ} \times \text{ب} = \text{ب} \times \text{أ} = \text{م}$ (أي المصفوفة المحايدة) فإن أ نظير ضربي لـ (ب) وكذلك (ب) نظير ضربي لـ (أ)

يرمز للنظير الضربي للمصفوفة (أ^{-1})

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية (أ):

1- نجد محدد أ فإذا كان محدد أ = صفر فإن أ مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

2- نبدل المدخلات الواقعة على القطر الأول مع بعضها البعض

3- نعكس إشارات المدخلات الواقعة على القطر ~~الأول~~ الثاني

4- نضرب جميع المدخلات بالعدد ($\frac{1}{\text{محدد أ}}$)

مثال: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ أوجدي أ^{-1}

$$|\text{أ}| = 12 - 2 = 10$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \times \text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{10} - \frac{2}{10} & \frac{-3}{10} + \frac{3}{10} \\ \frac{5}{10} - \frac{5}{10} & \frac{-2}{10} + \frac{12}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

س: إذا كانت $م = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ أوجدي $م^{-1}$

$$|م| = 3 - -8 = 11$$

$$م^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{-4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

س: إذا كان $ن = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ أوجدي $ن^{-1}$

$$|ن| = 10 - 6 = 4$$

$$ن^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

س: إذا كان

$$أ = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد ① $(2أ)^{-1}$ ② $\frac{1}{2}(أ^{-1})$

$$2أ = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Leftarrow |2أ| = 40 - -12 = 52$$

$$(2أ)^{-1} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{52}_{26}} & \frac{\cancel{-6}^{-3}}{\cancel{52}_{26}} \\ \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{52}_{26}} & \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{52}_{26}} \end{bmatrix}$$

$$|أ| = 10 - -3 = 13$$

$$\frac{1}{2}أ^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{26} & \frac{-3}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{5}{26} \end{bmatrix} = (2أ)^{-1}$$

س: إذا كان $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$ أوجد أ

$|\text{أ}| = ٤ - -٦ = ١٠$

$\text{أ} = \frac{١}{١٠} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{١}{١٠} & \frac{٢-}{١٠} \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٤}{١٠} \end{bmatrix}$

خصائص النظير:

$(\text{ك أ})^{-1} = \frac{١}{\text{ك}}\,\text{أ}^{-1}$ حيث ك ≠ صفر

$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

$(\text{أ ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$ بوزع النظير وبيدل أ ب

$(\text{أ ب د})^{-1} = \text{د}^{-1}\,\text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

العلاقة بين $|\text{أ}|$ و $|\text{أ}^{-1}|$ $\Leftarrow$ $|\text{أ}| = \frac{١}{|\text{أ}^{-1}|}$

$م = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $م^{-١}$

$|م| = ٣ - -٨ = ١١$

$م^{-١} = \frac{١}{١١} \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{١١} & \frac{-٤}{١١} \\ \frac{٢}{١١} & \frac{٣}{١١} \end{bmatrix}$

← إذا ضربناها تطلع الجواب المصفوفة المحايدة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$م \times س = ن \Leftarrow س = م^{-١} \times ن$

$س \times م = ن \Leftarrow س = ن \times م^{-١}$

حل المعادلات المصفوفية التالية :

① $\underset{م}{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}} \times س = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$م \times س = ن \Leftarrow س = م^{-١} ن$

$|م| = ٦ - ٢ = ٤$

$م^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٤} & \frac{-٢}{٤} \\ \frac{-١}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix}$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٤} & -\frac{٢}{٤} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{٢}{٤} - \frac{٤}{٤} & ٠ - \frac{٦}{٤} \\ \frac{١}{٤} + \frac{٦}{٤} & ٠ + \frac{٩}{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٦}{٤} & -\frac{٦}{٤} \\ \frac{٧}{٤} & \frac{٩}{٤} \end{bmatrix}$$

② $$٣س \times \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}}_{أ} = \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}}_{ب}$$

$$٣س = ب \times أ^{-١}$$

$$|أ| = ٩ - ٨ = ١$$

$$أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$٣س = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ - ٢٠ & -٢ + ١٥ \\ ٦ - ١٢ & -٤ + ٩ \end{bmatrix}$$

$$٣س = \begin{bmatrix} -١٧ & ١٣ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٣}$$

$$س = \begin{bmatrix} -\frac{١٧}{٣} & \frac{١٣}{٣} \\ -٢ & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$$

سؤال مهم ص ٦ :

١ $س \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + ٢س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

:

عند إخراج مصفوفة عامل مشترك يكون معاملها مصفوفة الوحدة م إذا لم يكن هنالك مصفوفة

$٢س = ٢م س$

$س \left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + ٢م \right) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$س \left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$س \times \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$س \times أ = ب \Leftarrow س = ب \times أ^{-١}$

$|أ| = ١٦ - -٣ = ١٩$

$أ^{-١} = \frac{١}{١٩} \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{١٩} & \frac{-٣}{١٩} \\ \frac{١}{١٩} & \frac{٤}{١٩} \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٤}{١٩} & \frac{-٣}{١٩} \\ \frac{١}{١٩} & \frac{٤}{١٩} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٤}{١٩} + ٠ & \frac{-٣}{١٩} + ٠ \\ \frac{-٤}{١٩} + \frac{٣}{١٩} & \frac{٣}{١٩} + \frac{١٢}{١٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{١٩} & \frac{-٣}{١٩} \\ \frac{-١}{١٩} & \frac{١٥}{١٩} \end{bmatrix}$

إخراج س عامل مشترك من جهة اليسار ((الضرب ليس تبديلي))

④

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = ٥س + س \times \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = س \left(٥م_٢ + \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = س \left(\begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = س \left(\begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} \right)$$

$ب = س \times م$

$ب م^{-١} = س$

$٤٥ = ٣ + ٤٢ = |م|$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٤٥} & \frac{٦}{٤٥} \\ \frac{٧}{٤٥} & \frac{٣-}{٤٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١}{٤٥} = م^{-١}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{٤٥} & \frac{٦}{٤٥} \\ \frac{٧}{٤٥} & \frac{٣-}{٤٥} \end{bmatrix} = س$$

إذا كانت م ، ب ، ج ثلاث مصفوفات ثنائية وكان

$$م^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad ج^{-1} = \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة ب بحيث م × ب = ج

$$ب = م^{-1} \times ج$$

نجد ج

$$|ج^{-1}| = ١٦ - ١٥ = ١ \Leftarrow ج = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٨ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٨ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ + ٢٤ & ٤ - ٩ \\ -٥ - ٢٤ & ٢ + ٩ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٤ & -٥ \\ -٢٩ & ١١ \end{bmatrix}$$

تطبيقات على المصفوفات

أولاً: حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام النظير الضربي.

استخدمي النظير الضربي لحل أنظمة المعادلات التالية:

① $3\text{س} - 2\text{ص} = 8$

$2\text{س} + 5\text{ص} = -1$

$\text{ن} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \text{م}^{-1} \times \text{ن}$

$$\underset{\text{معاملات}}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{\text{المجاهيل}}{\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}} = \underset{\text{الأعداد}}{\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$|\text{م}| = 10 - -4 = 19$

$$\text{م}^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{-2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{40}{19} - \frac{2}{19} = \frac{38}{19} = 2 \\ \frac{-16}{19} - \frac{3}{19} = \frac{-19}{19} = -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{س} = 2}$ $\boxed{\text{ص} = -1}$

① $٥س = ٣ص + ٦$

$٢س - ص - ٣ = ٠$

$٥س - ٣ص = ٦$

$٢س - ص = ٣$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}}_{م} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ٦ \\ ٣ \end{bmatrix}}_{ب}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = م^{-١} \times ب$$ كل مرة

$$|م| = -٥ - -٦ = ١$$

$$م^{-١} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ + ٩ = ٣ \\ -١٢ + ١٥ = ٣ \end{bmatrix}$$

$س = ٣$ $ص = ٣$

ص = ٢   س = ١

② ٤س + ٥ص = ١٤

٣ص − ٣س = ٣ ∴

$$٤س + ٥ص = ١٤$$
$$-٣س + ٣ص = ٣$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}}_{أ} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ١٤ \\ ٣ \end{bmatrix}}_{ب}$$

$$|أ| = ١٢ - -١٥ = ٢٧$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢٧} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢٧} & \frac{-٥}{٢٧} \\ \frac{٣}{٢٧} & \frac{٤}{٢٧} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢٧} & \frac{-٥}{٢٧} \\ \frac{٣}{٢٧} & \frac{٤}{٢٧} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٤ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤٢}{٢٧} + \frac{-١٥}{٢٧} \\ \frac{٤٢}{٢٧} + \frac{١٢}{٢٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢٧}{٢٧} \\ \frac{٥٤}{٢٧} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

س = ١   ص = ٢

ثانياً: طريقة كرامر

استخدمي طريقة كرامر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

① ٤س + ٢ص = ٤

٥س + ص = -٣

$$أ = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

|أ| = ٤ - ١٠ = -٦ إذا طلع صفر يعني ما في حل

$$أ_س = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow |أ_س| = 4 - -6 = 10$$

تخلو من معاملات س

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{10}{-6} = \frac{-5}{3}$$

$$أ_ص = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Leftarrow |أ_ص| = -12 - 20 = -32$$

تخلو من معاملات ص

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-32}{-6} = \frac{16}{3}$$

② ٤س = ٣ص + ٦

٥س - ٤ص = ٧

٤س - ٣ص = ٦

٥س - ٤ص = ٧

$$أ = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

|أ| = -١٦ + ١٥ = -١

$$أ_س = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \Leftarrow |أ_س| = -24 + 21 = -3$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

أص = $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ ⇐ |أص| = ٢٨ − ٣٠ = −٢

ص = $\dfrac{|أص|}{|أ|}$ = $\dfrac{-٢}{-١}$ = ٢

مقرر

عند استخدام طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين وجد أن

أس = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٣- \end{bmatrix}$

أوجدي : ١ قيم س، ص

٢ واكتبي هذا النظام

أ = $\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix}$

|أس| = ١٠ + ٣ = ١٣ ، |أص| = ٩ + ٦ = ١٥

|أ| = ١٥ − ٣ = ١٢

س = $\dfrac{|أس|}{|أ|}$ = $\dfrac{١٣}{١٢}$ ، ص = $\dfrac{|أص|}{|أ|}$ = $\dfrac{١٥}{١٢}$

٣س − ١ص = ٢

−٣س + ٥ص = ٣

سؤال قبل سنتين في القسم الخارجي :

إذا كانت س + ٢ص = ١٢

أوجد المعادلتين الخطيتين بمتغيرين

وعند استخدام طريقة كرامر وجد أن

٢ |أس| = ٨ − ٨ |أص|

أوجد |أ|

علماً أن |أ| ≠ صفر

٢ |أس| = ٨ − ٨ |أص|

٤ |أس| + ٨ |أص| = ٨ ÷ ٤

|أس| + ٢ |أص| = ٢ ÷ |أ|

$$\frac{|\text{أس}|}{|\text{أ}|} + ٢\,\frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = \frac{٢}{|\text{أ}|}$$

$$\text{س} + ٢\text{ص} = \frac{٢}{|\text{أ}|}$$ لكن س + ٢ص = ١٢

$$١٢ = \frac{٢}{|\text{أ}|} \Leftarrow |\text{أ}| = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

عمليات الصف البسيط :

١- تبديل صف مكان صف .

٢- ضرب مدخلات أي صف بأي عدد ثابت لا يساوي صفر .

٣- ضرب مدخلات أي صف بأي عدد ثابت لا يساوي صفر وإضافته إلى صف آخر

ثالثاً : طريقة غاوس

لاستخدام طريقة غاوس يجب جعل مصفوفة المعاملات على شكل مصفوفة مثلثية علوية وذلك باستخدام عمليات الصف البسيط .

س/ استخدمي طريقة غاوس لحل أنظمة المعادلات التالية :

① ٢س + ٣ص = ٨

٣س − ص = ١

$$\left[\begin{array}{cc:c} ٢ & ٣ & ٨ \\ ٣ & ١- & ١ \end{array}\right] \xrightarrow{ص_٢ + (\frac{٣-}{٢} ص_١)} \left[\begin{array}{cc:c} ٢ & ٣ & ٨ \\ ٠ & \frac{١١-}{٢} & ١١- \end{array}\right]$$

$$٣ \times \frac{٣-}{٢} + ١- = \frac{٩-}{٢} - \frac{٢}{٢} = \frac{١١-}{٢} \qquad ٢ \times \frac{٣-}{٢} = ٣-$$

$$\cancel{٨}^{٤} \times \frac{٣-}{\cancel{٢}_{١}} + ١ = ١١-$$

$\frac{١١-}{٢}$ ص = ١١-

١١- ص = ٢٢- ⇐ ص = ٢

٢س + ٣(٢) = ٨

٢س = ٢

$\boxed{س = ١}$

(٢) $٥س + ٢ص = ٨$

$٣س + ٤ص = ٢$

$$\left[\begin{array}{cc:c} ٥ & ٢ & ٨ \\ ٣ & ٤ & ٢ \end{array}\right] \xrightarrow{ص_٢ + (-\frac{٣}{٥} ص_١)} \left[\begin{array}{cc:c} ٥ & ٢ & ٨ \\ ٠ & \frac{١٤}{٥} & -\frac{١٤}{٥} \end{array}\right]$$

$٥ \times -\frac{٣}{٥} = -٣ \quad +٣ = ٠$

$٢ \times -\frac{٣}{٥} + ٤ = -\frac{٦}{٥} + \frac{٢٠}{٥} = \frac{١٤}{٥}$

$٨ \times -\frac{٣}{٥} + ٢ = -\frac{٢٤}{٥} + \frac{١٠}{٥} = -\frac{١٤}{٥}$

$\frac{١٤}{٥} ص = -\frac{١٤}{٥} \Leftarrow ص = -١$

$٥س + ٢(-١) = ٨ \Leftarrow ٥س = ١٠$

$س = ٢$

$$2\text{س} + 3\text{ص} + 2\text{ع} = 6$$
$$3\text{س} - \text{ص} + 3\text{ع} = -2$$
$$\text{س} + 2\text{ص} - 2\text{ع} = 3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ص}_3]{\text{تبديل ص}_1\text{ مع}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{ص}_3 + (-2\text{ص}_1)]{\text{ص}_2 + (-3\text{ص}_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -11 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_3 + (-\frac{1}{7}\text{ص}_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{33}{7} & \frac{11}{7} \end{array}\right]$$

في العمليات
للعمود الأول ← الصف الأول
للعمود الثاني ← الصف الثاني

$$9 \times -\frac{1}{7} + 6 = -\frac{9}{7} + \frac{42}{7} = \frac{33}{7}$$
$$-11 \times -\frac{1}{7} + 0 = \frac{11}{7}$$

$$\frac{33}{7}\text{ع} = \frac{11}{7} \Leftarrow \text{ع} = \frac{1}{3}$$

$$-7\text{ص} + 9\left(\frac{1}{3}\right) = -11 \Leftarrow -7\text{ص} = -14 \Leftarrow \text{ص} = 2$$

$$\text{س} + 2(2) - 2\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

$$\text{س} + 4 - \frac{2}{3} = 3 \Leftarrow \text{س} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$٣س + ٢ص + ٢ع = ٧$

$٢س - ٣ص + ع = ٤$

$٤س + ص - ع = ٢$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ٣ & ٢ & ٢ & ٧ \\ ٢ & -٣ & ١ & ٤ \\ ٤ & ١ & -١ & ٢ \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ص}_٣ + (-\frac{٤}{٣}\text{ص}_١)]{\text{ص}_٢ + (-\frac{٢}{٣}\text{ص}_١)} \left[\begin{array}{ccc|c} ٣ & ٢ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -\frac{١٣}{٣} & -\frac{١}{٣} & -\frac{٢}{٣} \\ ٠ & -\frac{٥}{٣} & -\frac{١١}{٣} & -\frac{٢٢}{٣} \end{array}\right]$$

$٣ \times \frac{-٢}{٣} = -٢$

$٣ \times \frac{-٤}{٣} = -٤$

$٢ \times \frac{-٢}{٣} + -٣ = \frac{-٤}{٣} - \frac{٩}{٣} = \frac{-١٣}{٣}$

$٢ \times \frac{-٢}{٣} + ١ = \frac{-٤}{٣} + \frac{٣}{٣} = -\frac{١}{٣}$

$٧ \times \frac{-٢}{٣} + ٤ = \frac{-١٤}{٣} + \frac{١٢}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

$$٣ \times \frac{-٤}{٣} + ١ = \frac{-٨}{٣} + \frac{٣}{٣} = \frac{-٥}{٣}$$

$$٢ \times \frac{-٤}{٣} + -١ = \frac{-٨}{٣} - \frac{٣}{٣} = \frac{-١١}{٣}$$

$$٧ \times \frac{-٤}{٣} + ٢ = \frac{-٢٨}{٣} + \frac{٦}{٣} = \frac{-٢٢}{٣}$$

$$-١٣ \times \frac{٥}{١٣} = -٥$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} ٣ & ٢ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -١٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & -٥ & -١١ & -٢٢ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{ص}_٣ \times ٣]{\text{ص}_٢ \times ٣ \ \text{بالتبسيط}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} ٣ & ٢ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -١٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & \frac{-١٣٨}{١٣} & \frac{-٢٧٦}{١٣} \end{array}\right] \xleftarrow{\text{ص}_٣ + \left(\frac{-٥}{١٣}\,\text{ص}_٢\right)}$$

$$-١ \times \frac{-٥}{١٣} + -١١ = \frac{٥}{١٣} + \frac{-١٤٣}{١٣} = \frac{-١٣٨}{١٣}$$

$$-٢ \times \frac{-٥}{١٣} + -٢٢ = \frac{١٠}{١٣} - \frac{٢٨٦}{١٣} = \frac{-٢٧٦}{١٣}$$

$\frac{-١٣٨}{١٣}$ ، ع = $\frac{-١٢٦}{١٣}$ ⇐ ع = ٢

-١٣ ص - ١(٢) = -٢ ⇐ -١٣ ص = ٠ ∴ ص = ٠

٣س + ٢(١) + ٢(٢) = ٧ ⇐ ٣س = ٣

س = ١

س١: استخدمي خصائص المحددات لإيجاد قيمة ما يلي:

$\boxed{١}$

$$\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٣س} & \text{٣س} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{ب+١} & \text{أ+١} & \text{أ+ب} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

إخراج ٣س عامل مشترك من ص١

$$\text{٣س} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{ب+١} & \text{أ+١} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

ص٣ + (ص٢ ص١)

$$\text{٣س} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{أ+ب+١} & \text{أ+ب+١} & \text{أ+ب+١} \end{vmatrix}$$

إخراج أ+ب+١ عامل مشترك

$$\text{٣س}(\text{أ+ب+١}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

أحد الأسئلة الوزاري وعليه 7 أو 8 علامات

لأن $ص_٣ = ١ \times ص_١$

$= ٣س\,(أ + ب + ١)\,(٠)$

$=$ صفر

*** بعد إثبات أحد الصفوف من مضاعفات الآخر ***

$\boxed{٢}$

$$\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ س^٢ & ١ & س \\ س & س^٢ & ١ \end{vmatrix} = (س^٣ - ١)^٢$$

$ص_٢ + (-س^٢ \times ص_١)$

$ص_٣ + (-س\, ص_١)$

$$\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ١ - س^٣ & س - س^٤ \\ ٠ & ٠ & ١ - س^٣ \end{vmatrix}$$

$= ١ \times (١ - س^٣)\,(١ - س^٣)$

$= (١ - س^٣)^٢ = (س^٣ - ١)^٢$

هي نفسها بوجود التربيع

$\boxed{٣}$

$$\begin{vmatrix} أ + ٢ب + ١ & أ & ١ \\ ب & ٢أ + ب + ١ & ١ \\ ب & أ & أ + ب + ٢ \end{vmatrix} = ٢(أ + ب + ١)^٣$$

$ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$

$$\begin{vmatrix} ٢أ + ٢ب + ٢ & أ & ١ \\ ٢أ + ٢ب + ٢ & ٢أ + ب + ١ & ١ \\ ٢أ + ٢ب + ٢ & أ & أ + ب + ٢ \end{vmatrix}$$

إخراج ٢أ+٢ب+٢ ← عامل مشترك من ع١

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١+ب+٢أ} & \text{١} \\ \text{٢+ب+أ} & \text{أ} & \text{١} \end{vmatrix} \text{(١+ب+أ)٢}$$

ص٢ + (-١ ص١) ، ص٣ + (-١ ص١) ←

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١+ب+أ} & \text{٠} \\ \text{١+ب+أ} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix} \text{(١+ب+أ)٢}$$

$$\text{(١+ب+أ)(١+ب+أ)(١)(١+ب+أ)٢ =}$$

$$\text{٣(١+ب+أ)٢ =}$$

$\boxed{\text{٤}}$

$$\text{(ب - ٢هـ)(٢ب - د)ب =} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ب-هـ} & \text{ب-د} \\ \text{ب-هـ} & \text{هـ} & \text{ب-د} \\ \text{ب+هـ} & \text{ب-هـ} & \text{-د} \end{vmatrix}$$

ع١ + (ع٢ + ع٣) ←

$$\begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ب-هـ} & \text{٢ب-د} \\ \text{ب-هـ} & \text{هـ} & \text{٢ب-د} \\ \text{ب+هـ} & \text{ب-هـ} & \text{٢ب-د} \end{vmatrix}$$

إخراج (٢ب - د) ← عامل مشترك من ع١

$$\begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ب-هـ} & \text{١} \\ \text{ب-هـ} & \text{هـ} & \text{١} \\ \text{ب+هـ} & \text{ب-هـ} & \text{١} \end{vmatrix} \text{٢ب - د}$$

* في المصفوفة المثلثية العلوية يكون المحدد حاصل ضرب القطر *

ص٢ + (−١ ص١) ، ص٣ + (−١ ص١) ← (٢ل − د)

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ل − م} & \text{م} \\ \text{٠} & \text{٢م − ل} & \text{ل − ٢ج} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

= (٢ل − د) (١) (٢م − ل) (ل)

= ل (٢ل − د) (٢م − ل)

⑤

$$\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{م} & \text{ل} & \text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ل} \end{vmatrix}$$ = (ل + م + ن) (ل − ن) (ل − م)

ع١ + (ع٢ + ع٣) ←

$$\begin{vmatrix} \text{ل + م + ن} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ل + م + ن} & \text{ل} & \text{ن} \\ \text{ل + م + ن} & \text{ن} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

إخراج (ل + م + ن) عامل مشترك من ع١ ← (ل + م + ن)

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{١} & \text{ل} & \text{ن} \\ \text{١} & \text{ن} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

ص٢ + (−١ ص١) ، ص٣ + (−١ ص١) ←

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{٠} & \text{ل − م} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{ن − م} & \text{ل − ن} \end{vmatrix}$$

تبديل ع١ مع ع٢ مع ع٣ ⟵ $-(\text{ل}+\text{م}+\text{ن})$

$$\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ن} & 1 \\ \text{ل}-\text{م} & 0 & 0 \\ \text{ن}-\text{م} & \text{ل}-\text{ن} & 0 \end{vmatrix}$$

تبديل ص٢ مع ص٣ ⟵ $-\,-(\text{ل}+\text{م}+\text{ن})$

$$\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ن} & 1 \\ \text{ن}-\text{م} & \text{ل}-\text{ن} & 0 \\ \text{ل}-\text{م} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ل}+\text{م}+\text{ن})(\text{ل}-\text{ن})(\text{ل}-\text{م})$$

إذا كانت س+٢ص = ١٢ إحدى المعادلتين الخطيتين بمتغيرين وعند استخدام طريقة كرامر وجد أن |أ س| = ٨ - ٨|أ ص| ما قيمة |أ| ، علماً أن |أ| ≠ ٠

|أ س| = ٨ - ٨|أ ص|

ربنا لأنه المعادلتين خطيتين يعني ثنائية أما ثلاثية بنكعب

٤|أ س| + ٨|أ ص| = ٨ ÷ |أ|

$$\frac{4|\text{أس}|}{|\text{أ}|} + \frac{8|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = \frac{8}{|\text{أ}|}$$

$$4\text{س} + 8\text{ص} = \frac{8}{|\text{أ}|} \quad \div 4$$

$$\text{س} + 2\text{ص} = \frac{2}{|\text{أ}|}$$

$$12 = \frac{2}{|\text{أ}|} \Leftarrow |\text{أ}| = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

أجي بالقسم الخارجي وعليه ٦ علامات

إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، وكان $|\text{س}| = 1$

أثبت أن $\text{س} + \text{س}^{-1} = (\text{أ} + \text{د})\,\text{م}_2$

نجد س^{-1} :

$|\text{س}| = 1$

$$\text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} + \text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ} + \text{د} & 0 \\ 0 & \text{أ} + \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ} + \text{د} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{د})\,\text{م}_2$$

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢}\,\text{أ} = (\text{ب} - \text{جـ})^{-١}$ أوجد جـ

بأخذ النظير الضربي للطرفين

$$\left(\frac{١}{٢}\,\text{أ}\right)^{-١} = \left((\text{ب} - \text{جـ})^{-١}\right)^{-١}$$

$$٢\,\text{أ}^{-١} = \text{ب} - \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{ب} - ٢\,\text{أ}^{-١}$$

$$|\text{أ}| = ٢٠ - ٢٤ = -٤$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٤}\begin{bmatrix} ١٠ & -٤ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-٥}{٢} & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$$

$$٢\,\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

إذا كانت س مصفوفة غير منفردة من الرتبة ٢ وكان $س_{٢٢} = ك\,س_{١١}$

$س_{١١} \neq$ صفر ، أوجدي قيمة ك التي تجعل $|س + م_٢| = |س| + |م_٢|$

$$س = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{١٢} \\ س_{٢١} & س_{٢٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{١٢} \\ س_{٢١} & ك\,س_{١١} \end{bmatrix}$$

$$|س + م_٢| = \begin{vmatrix} س_{١١}+١ & س_{١٢} \\ س_{٢١} & ك\,س_{١١}+١ \end{vmatrix}$$

$$= ك\,س_{١١}^٢ + س_{١١} + ك\,س_{١١} + ١ - س_{١٢}\,س_{٢١}$$

$$|س| + |م_٢| = \cancel{ك\,س_{١١}^٢} - \cancel{س_{١٢}\,س_{٢١}} + \cancel{١} = \cancel{ك\,س_{١١}^٢} + س_{١١} + ك\,س_{١١} + \cancel{١} - \cancel{س_{١٢}\,س_{٢١}}$$

$$س_{١١} + ك\,س_{١١} = ٠ \quad \therefore \div س_{١١}$$

$$١ + ك = ٠ \Leftarrow ك = -١$$

عند حل معادلتين خطيتين بمتغيرين س ، ص بطريقة كرامر

وجد أن $أ ، أ_س = \begin{bmatrix} ١١ & ٦- \\ ١٢- & ١٠ \end{bmatrix}$

$$أ_س ، أ_ص = \begin{bmatrix} ٢١ & ٧- \\ ٢٨ & ١٤- \end{bmatrix}$$

أوجدي قيمة ص

$|أ . ب| = |أ| \, |ب|$

$= ١١٠ - ١٢ = ٩٨$ ...... ①

$|أ ص . ب أ| = |أ ب| \, |أ ص| = -٩٨$ .... ②

بقسمة معادلة ② على معادلة ①

$$\frac{|أ ص| \, |\cancel{أ} ب|}{|أ| \, |\cancel{أ} ب|} = \frac{-٩٨}{٩٨}$$

$$\boxed{ص = -١}$$

ثم استخدام طريقة النظير الضربي في حل نظام المعادلات التالية

$$\begin{bmatrix} ن & -١ \\ ل & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

وجد أن ص = −٢س ، وكان ن + ل = ٤

أوجد ل ، ن

$ن س - ص = ١٠$

$ل س + ص = -٢$ ⊕

$(ن + ل) س = ٨$

$٤ س = ٨$

$س = ٢$

$ص = -٢س = -٤$

$ن(٢) - -٤ = ١٠$

$٢ن = ٦$

$ن = ٣$

$ن + ل = ٤$

$ل = ١$

استخدمي طريقة كرايمر لحل النظام

٢س - ٣ص = ١

م س - ل ص = -٤

علماً أن ٣م - ٢ل = ٤

م = [٢   -٣ ; م   -ل] ، [١ ; -٤]

|م| = -٢ل - -٣م = ٣م - ٢ل = ٤

م س = [١   -٣ ; -٤   -ل] ⇐ |م س| = ، - ١٢ = -١٢

س = -١٢ / ٤ = -٣

م ص = [٢   ١ ; م   -٤]

|م ص| = -٨

ص = -٨ / ٤ = -٢