النظير الضربي للمصفوفة المربعة

الرمز المستخدم للدلالة على النظير الضربي للمصفوفة أ ← $أ^{-1}$

سنقتصر على المصفوفة الثنائية $أ_{2\times2} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$

(تبديل: $أ_{11}$ و $أ_{22}$ — نعكس الإشارة: $أ_{12}$ و $أ_{21}$)

خطوات الحل:

١- نجد محددة أ

٢- نكتب القانون $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$

٣- نقسم كل مدخل في المصفوفة على |أ|

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ جدي النظير الضربي للمصفوفة أ.

[1] $|أ| = ٢ \times ٤ - ٣ \times ١ = ٨ - ٣ = ٥$

[2] $أ^{-1} = \frac{1}{٥} \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٤}{٥} & \frac{-١}{٥} \\ \frac{-٣}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$

سؤال : جدي النظير الضربي لكل من

① $أ = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$|أ| = -3 + 2 = -1$

$أ^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

② $ب = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$|ب| = 0 - 2 = -2$

$ب^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

المصفوفة المنفردة

هي المصفوفة التي تكون محددتها = صفر

هي المصفوفة التي لا يوجد لها نظير ضربي لأن |م| = ٠ يصبح في القانون كمية غير معرفة ($\frac{١}{٠}$)

مثال: أي المصفوفات التالية منفردة

① م = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

|م| = ١×٦ - ٢×٣

= ٦ - ٦

= ٠ ← م منفردة

② م = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

|م| = ٤×٣ - ١×٢

١٢ - ٢ = ١٠ ≠ صفر

م غير منفردة

③ ن = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٠ \\ -٣ & ٦ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

|ن| = $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٠ \\ -٣ & ٦ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{vmatrix}$ نخرج ٣

= ٣ $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{vmatrix}$

= صفر

لأن ص٢ = ٣ × ص١

أحد الصفوف من مضاعفات الصف الآخر

|ن| = ٠

ن منفردة

تمارين ص (١١٩) :

س١ : أ =
[٤ -٨]
[٣ ٦]

|أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ لها نظير ضربي

ب =
[جا س ٣]
[-١ ١]

|ب| = جا س + ٣ ≠ ٠ لها نظير ضربي

جا س + ٣ ≠ صفر

جا س + ٣ = ٠ ، جا س = -٣ ← جا س ≠ -٣

جـ =
[٣ ٣]
[٣ ٣]

|جـ| = ٩ - ٩ = ٠

|جـ| = ٠ منفردة ليس لها نظير ضربي

د =
[٢ -١ ٣]
[٦ -٣ ٩]
[٢ ٨ -١]

د = ٣
| ٢ -١ ٣ |
| ٢ -١ ٣ |
| ٢ ٨ -١ |

|د| = ٠ لأن أحد الصفوف من مضاعفات الآخر.

منفردة ليس لها نظير ضربي

د = ٣ × ٠ = ٠

س : م = $\begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ \text{٢ك} & \text{٤} \end{bmatrix}$

بما أن م منفردة فإن

|م| = ٠

|م| = ٢ك² - ٤ك

٢ك² - ٤ك = ٠

٢ك (ك - ٢) = ٠

ك = ٠ ، ك = ٢

ن = $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{ك} \\ \text{ك} & \text{١} \end{bmatrix}$

بما أن ن منفردة فإن |ن| = ٠

|ن| = ك² - ٤

ك² - ٤ = ٠

ك² = ٤

ك = ± ٢

مثال (٤-١ ص١١٦) :

م = $\begin{bmatrix} \text{٨} & \text{٢} \\ \text{س+١} & \text{٣} \end{bmatrix}$

|م| = ٠

|م| = (٢س+٢) - ٢٤ = ٠

٢س - ٢٢ = ٠

٢س = ٢٢

س = ١١

خصائص النظير الضربي :

① $أ \times أ^{-1} = أ^{-1} \times أ = م$ ← محايدة

$أ_{3\times3} \times أ^{-1} = س$ فإن $س =$

أ) $م_{2}$ ، ب) $م_{3}$ ، جـ) $أ^{-1}$ ، د) $أ_{3\times3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② $(أ^{-1})^{-1} = أ$

نظير النظير الضربي للمصفوفة أ = أ

③ $(ك أ)^{-1} = \frac{1}{ك} \times أ^{-1}$

مثلاً: $(5أ)^{-1} = \frac{1}{5} أ^{-1}$

④ $(أ \times ب)^{-1} = ب^{-1} \times أ^{-1}$

⑤ $|أ^{-1}| = \frac{1}{|أ|}$

مثال: إذا كان $أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

جد: ① $أ^{-1}$ ② $أ^{-1} \times أ$ ③ $(2أ)^{-1}$ ... ④ $|ب^{-1}|$

⑤ $(أب)^{-1}$

|م| = ٦ - ٤ |ن| = ٢×٠ - ٢×-١

|م| = ٢ |ن| = ٢

(١) $م^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{٢}{٢} & \frac{-٤}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

(٢) $م^{-١} \times م = م_{٢}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{-٣}{٢} + \frac{٣}{٢} & \frac{٣}{٤} + \frac{-٣}{٤} \\ -٢ + ٣ & -٤ + ٤ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $(٢م)^{-١} = \frac{١}{٢} م^{-١}$

$= \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$

(٤) $|ب^{-١}| = \frac{١}{|ب|} = \frac{١}{٢}$

(٥) $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$

$ب^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -\frac{١}{٢} \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -١ & \frac{١}{٢} \\ -\frac{٣}{٢} + -٢ & \frac{١}{٢} + ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

س٣: ص (١١٩):

$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$|أ| = ١٢ - ١٠ = ٢$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -\frac{٥}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$(أ^{-١})^{-١} = أ$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

س٤: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$

$|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$

$\frac{١}{٥} = \frac{١}{|أ|}$

$|أ| = ٥$

$|أ| = ٣س - ١٠$

$٥ = ٣س - ١٠$

$١٥ = ٣س$

س = ٥

س٥: أ = $\begin{bmatrix} -٣ & س \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-١}| = |أ|$

$|أ| = س ص + ٣$

$|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|} = \frac{١}{س ص + ٣}$

$|أ| = |أ^{-١}|$

$\frac{١}{|أ|} = |أ|$

$س ص + ٣ = \frac{١}{س ص + ٣}$

$(س ص + ٣)^{٢} = ١$

إما $س ص + ٣ = ١$ أو $س ص + ٣ = -١$

$س ص = -٢$ ، $س ص = -٤$

مثـ : $م = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ن = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$م . جـ = ن$ $\quad جـ^{-١}$

$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$\times \; |م| = ٢ - ١٢ = -١٠$ ∴ غ. منفردة

$\times \; م^{-١} = \frac{١}{-١٠} \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$

$م . جـ = ن \times م^{-١}$

$م^{-١} م . جـ = م^{-١} ن$

$م^{-١} م . جـ = م^{-١} ن$

$جـ = م^{-١} . ن$

$جـ^{-١} = (م^{-١} . ن)^{-١} = ن^{-١} . م$

~~$م^{-١} \times م$~~ $. جـ = ن \times م^{-١}$

$جـ = م^{-١} \times ن$

$(جـ)^{-١} = (م^{-١} \times ن)^{-١}$

$جـ^{-١} = ن^{-١} \times م$

$|ن| = ٨ - ٩ = -١$

$ن^{-١} = -١ \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$

مـ٧ : أ . ب = أ . جـ

علماً أن أ غير منفردة فإن $أ^{-1}$ موجودة

$أ^{-1}$. أ . ب = $أ^{-1}$. أ . جـ

م . ب = م . جـ

ب = جـ

أسئلة خارجية على المحددة :

ضع دائرة

① إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = ٥ فما قيمة $\begin{vmatrix} ٣أ & ٢ب \\ ٣جـ & ٢د \end{vmatrix}$

أ) ٣٠ (circled) ب) ١٥ جـ) -٥ د) -٣٠

$\begin{vmatrix} ٣أ & ٢ب \\ ٣جـ & ٢د \end{vmatrix}$ = ٣ × ٢ $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$

= ٦ × ٥ = ٣٠

② إذا كانت س ، ص مصفوفتان غير منفردتان من الرتبة ن × ن حيث |٢ س ص^{-١}| = ٨

|س| = ٣ ، |ص| = ١٢ فما قيمة ن

أ) ٣ ب) ١٦ جـ) ٥ (circled) د) ٣٢

الخواص المستخدمة في حل السؤال

|ك س$_{ن×ن}$| = ك^{ن} |س|

|س ص| = |س| × |ص|

|ص$^{-١}$| = $\frac{١}{|ص|}$

|ص| = $\frac{١}{|ص^{-١}|}$

|٢ س ص$^{-١}$| = ٨

٢^{ن} × |س| × $\frac{١}{|ص|}$ = ٨

٤ × ٢^{ن} × ٣ × $\frac{١}{٣ × ٤}$ = ٨ × ٤

٢^{ن} = ٣٢

٢^{ن} = ٢^{٥}

ن = ٥

٣) إذا كان

$$\begin{vmatrix} جاس & ٣ & ١٦ \\ ٠ & جاس & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١$$

س ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ فإن قيمة س

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{٣\pi}{٢}$ ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٢}$

جاس × جاس × ٢ = ١

٢جا²س = ١

جا²س = $\frac{١}{٢}$

جاس = $\pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ مرفوض

س = $\frac{\pi}{٤}$

٤) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣ وكان |أ| = −٢

فإن قيمة $|(\frac{١}{٢} أ)^{-١}|$ =

أ) |أ|+١ ب) −٤ ج) −٨ د) $-\frac{١}{٨}$

$|(\frac{١}{٢} أ)^{-١}| = |\frac{١}{\frac{١}{٢}} \times أ^{-١}| = |٢ \times أ^{-١}|$

$= ٢^٣ \, |أ^{-١}| = ٨ \times \frac{١}{-٢}$

⑤ إذا كانت $(\frac{1}{3}ب)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ فإن $ب_{21} =$

أ) -2 ب) -3 ج) 1 ✔ د) -1

$\frac{3}{2} ب^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{9}{3} & \frac{6}{3} \end{bmatrix}$

$|ب^{-1}| = 1 \times 2 - 3 = -1$

$ب^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$ب = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$(ب^{-1})^{-1} = \frac{1}{|ب^{-1}|} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$ب = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$(ب^{-1})^{-1} = ب$

⑥ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ وكان $|أ| = |أ^{-1}|$ فإن أحد قيم س الممكنة

أ) 4 ب) 8 ج) -4 د) 5

$|أ| = -2س + 9$

$|أ^{-1}| = \frac{1}{-2س + 9}$

$-2س + 9 = \frac{1}{-2س + 9}$

$(-2س + 9)^2 = 1$

$|أ| = \frac{1}{|أ^{-1}|}$

$|أ| = \frac{1}{|أ|} \Leftarrow (|أ|)^2 = 1$

$4س^2 - 36س + 81 = 1$

$4س^2 - 36س + 80 = 0$

$س^2 - 9س + 20 = 0$

$(س - 5)(س - 4) = 0$

إما $س = 5$ أو $س = 4$

$(-2س + 9)^2 = 1$

$-2س + 9 = 1$

$-2س = -8$

$س = 4$

$-2س + 9 = -1$

$-2س = -10$

$س = 5$

أثبتي دون حساب قيمة المحددة أن

$$\begin{vmatrix} ١٣ & ٥ & ٠ \\ ٨ & ٧ & ٦ \\ ٦ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ٧٨$$

تبديل ص١ و ص٣

$$- \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & -٢ \\ ٨ & ٧ & ٦ \\ ١٣ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$$

ص١ × ٣ + ص٢

$$- \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & -٢ \\ ٢٦ & ١٣ & ٠ \\ ١٣ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$$

إخراج ١٣ عامل مشترك من ص٢

$$-١٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١٣ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$$

ص٢ × -٥ + ص٣

$$-١٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$-١٣ \times -٢ \times ١ \times ٣$$

$$= \boxed{٧٨}$$

حل أنظمة خطية

أولاً: طريقة النظير الضربي

خطوات الحل:

١- ترتيب النظام

٢- كتابة النظام الخطي على شكل نظام مصفوفات

٣- نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (م)

٤- نحسب ع = م$^{-1}$ × ج

مثال (١) ص (١٢١):

٢س + ص = -١٢

٤س + ص = ١

← نظام خطي

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

← نظام مصفوفات

مصفوفة المعاملات، مصفوفة المتغيرات، مصفوفة الثوابت

م$^{-1}$ × م × ع = م$^{-1}$ × ج

ع = م$^{-1}$ × ج

|م| = ٢ - ٤ = -٢

$$م^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \text{أ}^{-1} \times \text{جـ}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} +1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -2 + -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftarrow$ س = ١ ، ص = -٣

مثال (٢) ص (١٢٢) :

٣س - ن ص = ٣ن

ن س - ٣ص = ن حيث ن > ٣

$\underset{\text{أ}}{\begin{bmatrix} 3 & -\text{ن} \\ \text{ن} & -3 \end{bmatrix}} \underset{\text{ع}}{\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}} = \underset{\text{جـ}}{\begin{bmatrix} 3\text{ن} \\ \text{ن} \end{bmatrix}}$

|أ| = -٩ + ن²

= ن² - ٩ موجب

|أ| > ٠

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\text{ن}^2 - 9} \begin{bmatrix} -3 & \text{ن} \\ -\text{ن} & 3 \end{bmatrix}$

note

|أ| = ٠

أ منفردة

لا يوجد لها نظير ضربي

$$م^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ن}{ن^{٢}-٩} & \frac{-٣}{ن^{٢}-٩} \\ \frac{٣}{ن^{٢}-٩} & \frac{-ن}{ن^{٢}-٩} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = م^{-1} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ن \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ن}{ن^{٢}-٩} & \frac{-٣}{ن^{٢}-٩} \\ \frac{٣}{ن^{٢}-٩} & \frac{-ن}{ن^{٢}-٩} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ن \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-٩}{ن^{٢}-٩} + \frac{ن^{٢}}{ن^{٢}-٩} \\ \frac{-٣ن}{ن^{٢}-٩} + \frac{٣ن}{ن^{٢}-٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ن^{٢}-٩}{ن^{٢}-٩} \\ \frac{-٣ن + ٣ن}{ن^{٢}-٩} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$ص = ٠$ ، $س = ١$

تمارين صـ(١٢٥):

س١: (أ) س − ص = ٣

٢س + ص = ٦

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

أ ع م

$$|\text{أ}| = 1 + 2 = 3$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ -2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

س = ٣

ص = ٠

(ب) س + ص = ٢

١٠س + ص = ١١

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

أ ع م

$$|\text{أ}| = 1 - 10 = -9$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-9} & \frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٩} + \frac{١١}{٩} \\ \frac{٢}{٩} + \frac{-١١}{٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٩}{٩} \\ \frac{٩}{٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{matrix} س = ١ \\ ص = ١ \end{matrix}$$

سؤال : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جدي المصفوفة

س حيث $(٢ س . أ)^{-١} = ب$

$أ \times (٢ س)^{-١} أ^{-١} = ب \times أ$

$(٢ س)^{-١} = أ \times ب$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ + ٢ & ١ + ٠ \\ ٠ + ١ & ٢ + ٠ \end{bmatrix}$$

$$٢ \times \frac{١}{٢} س^{-١} = ٢ \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$س^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$|س^{-١}| = ١٦ - ٤ = ١٢$$

$$(س^{-١})^{-١} = \frac{١}{١٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٦} \\ \frac{-١}{٦} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

سؤال : أوجد قيمة المصفوفة س

① س × $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(أ)

$|أ| = -2 - 6 = -8$

$أ^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{-8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{8} + \frac{6}{8} & \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \\ \frac{-8}{8} + 0 & \frac{8}{8} + 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(٢)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(م)

$$|م| = 0 - 2 = -2$$

$$م^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{3}{-2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + 0 & \frac{3}{2} + 1 \\ -1 + 0 & -1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: طريقة كريمر

خطوات الحل:

١- ترتيب النظام الخطي

٢- تحويل النظام الخطي إلى نظام مصفوفات.

٣- نجد محددة م |م|

٤- نجد |م س| ← [مصفوفة الثوابت | معاملات ص]

٥- نجد |م ص| ← م ص = [معاملات س | مصفوفة الثوابت]

٦- س = $\dfrac{|\text{م س}|}{|\text{م}|}$

ص = $\dfrac{|\text{م ص}|}{|\text{م}|}$

مثال صفحة ١٢٢

مثال١: ٣س + ٥ص = ١

٢س + ٣ص = ٠

$$\underset{\text{م}}{\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

|م| = ٣×٣ − ٢×٥

= ٩ − ١٠ = −١

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = أ$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = أس$$

$$٠ - ٣ \times ١ = |أس|$$

$$٣ =$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = أص$$

$$٢- = ٢- ٠ = |أص|$$

$$٣- = \frac{٣}{١-} = \frac{|أس|}{|أ|} = س$$

$$٢ = \frac{٢-}{١-} = \frac{|أص|}{|أ|} = ص$$

مثال (٣) ص (١٢٣):

أس = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، أص = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

|أ| = -١ - ٦ = -٧

|أس| = -٥ - ٢ = -٧

|أص| = ١ - ١٥ = -١٤

س = $\frac{|أس|}{|أ|}$ = $\frac{-٧}{-٧}$ = ١

ص = $\frac{|أص|}{|أ|}$ = $\frac{-١٤}{-٧}$ = ٢

س٢- ص(١٢٥) :

(أ) س - ص = ٥ ، س + ٢ص = ٢

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = 2 + 1 = 3$$

$$\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = 10 + 2 = 12$$

$$\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = 2 - 5 = -3$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-3}{3} = -1$$

(ب)

س + ص = −٣

٢ص + س = −٢

س + ص = −٣

س + ٢ص = −٢

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$|\text{أ}| = 2 - 1 = 1$

$$\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$|\text{أ}_{\text{س}}| = -6 + 2 = -4$

$$\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$|\text{أ}_{\text{ص}}| = -2 + 3 = 1$

$\text{س} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{-4}{1} = -4$

$\text{ص} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{1}{1} = 1$

سؤال :

عند حل المعادلتين $ب ص - س = ٤$

$ص = - م س + ٥$

م ، ب عددان حقيقيان لا يساويان صفر

باستخدام قاعدة كريمر

إذا كانت $\begin{vmatrix} ٤ & -١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ تمثل محددة م ص

$|٣ م س| = -٥٤$

جدي ① م ، ب

② س ، ص

$|م ص| = -٥ - ٤ = -٩$

$- س + ب ص = ٤$

$م س + ص = ٥$

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ب & -١ \\ ١ & م \end{bmatrix}$$

$|٣ م س| = -٥٤$ $\boxed{م = ١}$

$٩|م س| = -٥٤$

$|م س| = -٦$

$\begin{vmatrix} ب & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = -٦$

$$4 - 5ن = -6$$

$$5ن = 10$$

$$\boxed{ن = 2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|أ| = -1 - 2 = -3$$

$$أ_س = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|أ_س| = 4 - 10 = -6$$

$$أ_ص = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|أ_ص| = -5 - 4 = -9$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

ثالثاً: حل أنظمة خطية بطريقة غاوس

خطوات الحل:

١- نكون مصفوفة ممتدة أ̄ تحتوي على معاملات س، ص، ع ومصفوفة الثوابت.

أ١١ س + أ١٢ ص + أ١٣ ع = جـ١

أ٢١ س + أ٢٢ ص + أ٢٣ ع = جـ٢

أ٣١ س + أ٣٢ ص + أ٣٣ ع = جـ٣

أ١١	أ٢١	أ٣١	جـ١
أ١٢	أ٢٢	أ٣٢	جـ٢
أ١٣	أ٢٣	أ٣٣	جـ٣

مثلثية علوية

أصفار

٢- نجعل المصفوفة أ̄ مثلثية علوية وذلك بإحدى الطرق.

① تبديل صفين أو أكثر — لا يجوز استبدال الصفوف بالأعمدة.

② ضرب أحد الصفوف بمقدار ثابت.
(وقسمة)

③ ضرب أحد الصفوف بمقدار ثابت ثم إضافته إلى صف آخر

٣- نقوم بالتعويض العكسي ابتداءً من معاملات ع ← ص ← س

مثال (٢) ص (٤٢) :

٣س + ٧ص = ١٠

٢س − ٥ص = −٣

٣	٧	١٠
٢	−٥	−٣

←

٣	٧	١٠
٠	−٢٩/٣	−٢٩/٣

−٢ص١/٣ + ص٢

٧ × −٢/٣ + −٥

−١٤/٣ + −١٥/٣

١٠ × −٢/٣ + −٣

−٢٠/٣ + −٩/٣

−٢٩/٣

−٢٩/٣ ص = −٢٩/٣

ص = ١

٣س + ٧ص = ١٠

٣س + ٧ × ١ = ١٠

٣س + ٧ = ١٠

٣س = ٣

س = ١

جدي حل النظام التالي باستخدام جاوس :

① ٣س + ص = ٧
٢س + ٣ص = ٧

② ٤س + ص = ٧
٢س − ص = −١

[١]

٣	١	٧
٢	٣	٧

←

٣	١	٧
٠	٧/٣	٧/٣

−٢/٣ ص١ + ص٢

٣ × −٢/٣ + ٢ = ٠

١ × −٢/٣ + ٣ = −٢/٣ + ٩/٣ = ٧/٣

٧ × −٢/٣ + ٧ = −١٤/٣ + ٢١/٣ = ٧/٣

٧/٣ ص = ٧/٣

ص = ١

٣س + ص = ٧

٣س + ١ = ٧

٣س = ٦

س = ٢

[٢]

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٤ & ١ & ٧ \\ ٢ & -١ & -١ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ٤ & ١ & ٧ \\ ٠ & \frac{-٣}{٢} & \frac{-٩}{٢} \end{array}\right]$$

$$م_١ \times \frac{-١}{٢} + م_٢$$

$$٤ \times \frac{-١}{٢} + ٢ = -٢ + ٢ = ٠$$

$$١ \times \frac{-١}{٢} + -١ = \frac{-١}{٢} + \frac{-٢}{٢} = \frac{-٣}{٢}$$

$$٧ \times \frac{-١}{٢} + -١ = \frac{-٧}{٢} + \frac{-٢}{٢} = \frac{-٩}{٢}$$

$$\frac{-٣}{٢} ص = \frac{-٩}{٢}$$

$$\boxed{ص = ٣}$$

$$٤س + ٣ = ٧$$

$$٤س = ٤$$

$$\boxed{س = ١}$$

مثال (٤) ص (١٢٤) :

س + ص - ع = ٩ ، ص + ٣ع = ٣ ، - س - ٢ع = ٢

ترتيب النظام

س + ص - ع = ٩

٠س + ص + ٣ع = ٣

-س + ٠ص - ٢ع = ٢

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ص}_1 + \text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_2 \times -1 + \text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right]$$

$\frac{-6\text{ع}}{-6} = \frac{8}{-6} \Rightarrow \boxed{\text{ع} = \frac{-4}{3}}$

ص + ٣ع = ٣	س + ص - ع = ٩
ص + ٣ × $\frac{-4}{3}$ = ٣	س + ٧ + $\frac{4}{3}$ = ٩
ص - ٤ = ٣	س + $\frac{4}{3}$ = ٢
$\boxed{\text{ص} = 7}$	س = ٢ - $\frac{4}{3}$
	$\boxed{\text{س} = \frac{2}{3}}$

باستخدام جاوس

٢س + ٣ص - ع = ٩

س + ص + ع = ٢

٣س + ص + ٢ع = ٣

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

ص٢ × -٣ + ص٣

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

ص١ × $-\frac{1}{2}$ + ص٢

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$3 \times -\frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$-1 \times -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$9 \times -\frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = -3$$

ص٢ × ٢

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

ص٢ × -٢ + ص٣

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right]$$

$-٧ع = ٧$

$ع = -١$

$-ص + ٣ع = -٥$

$-ص - ٣ = -٥$

$-ص = -٢$

$ص = ٢$

$٢س + ٣ص - ع = ٩$

$٢س + ٦ + ١ = ٩$

$٢س = ٢$

$س = ١$

س٤ : (أ)

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$$

$ص_١ \times -\frac{١}{٢} + ص_٢ \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & \frac{٧}{٢} & \frac{١٤}{٢} \end{array}\right]$

$-١ \times -\frac{١}{٢} + ٣ = \frac{١}{٢} + \frac{٦}{٢} = \frac{٧}{٢}$

$١ \times -\frac{١}{٢} + ٥ = -\frac{١}{٢} + \frac{١٥}{٢} = \frac{١٤}{٢}$

$\frac{٧}{٢} ص = \frac{١٤}{٢}$ ، $ص = ٢$

$٢س - ص = ١$

$٢س - ٢ = ١$

$٢س = ٢$

$س = ١$

-ص + ٣ع = -٥

-ص - ٣ = -٥

-ص = -٢

ص = ٢

٢س + ٣ص - ع = ٩

٢س + ٦ + ١ = ٩

٢س = ٢

س = ١

س٤ : (ب)

تبديل ص١ و ص٢ ←

١	٢	٥
٣	-١	١

-٣×ص١ + ص٢ ←

١	٢	٥
٠	-٧	-١٤

-٧ص = -١٤ | س + ٢ص = ٥

ص = ٢ | س + ٤ = ٥

س = ١

ص١ × -١/٣ + ص٢ ←

٣	-١	١
٠	٧/٣	١٤/٣

-١×-١/٣ + ٢ = ١/٣ + ٦/٣ = ٧/٣

١×-١/٣ + ٥ = -١/٣ + ١٥/٣ = ١٤/٣

٧/٣ ص = ١٤/٣ ، **ص = ٢**

٣س - ص = ١

٣س - ٢ = ١

٣س = ٣

س = ١

$$\text{ص}_1 \times -2 + \text{ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ ① & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & [illegible] \end{array}\right]$$

$$\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & (-3) & -3 & [illegible] \end{array}\right]$$

$$\text{ص}_2 + \text{ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

(٧)

س − ص + ع = ٦

س + ٢ص + ع = ٣

٢س + ص − ع = [illegible]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & [illegible] & [illegible] \\ 1 & 2 & [illegible] & [illegible] \\ 2 & 1 & -[illegible] & [illegible] \end{array}\right]$$

$$\text{ص}_1 \times -2 + \text{ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

$$\text{تبديل ص}_2 \text{ و ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\text{ص}_2 \times -1 + \text{ص}_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

٣ع = ٩

ع = ٣

٣ص − ٣ع = −١٢

٣ص − ٣ × ٣ = −١٢

٣ص − ٩ = −١٢

٣ص = −٣

ص = −١

س − ص + ع = ٦

س + ١ + ٣ = ٦

س + ٤ = ٦

س = ٢

تمارين عامة ص (١٢٦) :

س١ : ① $أ_{١٢} - أ_{٢١} = ٦ - ٥ = ١$ (ج)

② **س = ٢**

$س^٢ + س = ٦$

$س^٢ + س - ٦ = ٠$ ∴

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣$ ، **س = ٢** (ب)

③ $٢٢أ - ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب$

$= ٢٢أ - ٥أ - ١٠ب + ٢٧ب$

$= ١٧أ + ١٧ب$

$= ١٧(أ + ب)$

$= ١٧ \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ (ج)

④ $|ب \cdot أ^{-١}| = \frac{|ب|}{|أ|}$

$|ب| \cdot |أ^{-١}|$

$= |ب| \times \frac{١}{|أ|} = \frac{|ب|}{|أ|}$ (د)

(٧) |م| = ١٠ - ٩ = ١

م^{-١} = ١ [٥ -٣ ؛ -٣ ٢]

م^{-١} + م = [٥ -٣ ؛ -٣ ٢] + [٢ ٣ ؛ ٣ ٥]

(ج) = [٧ ٠ ؛ ٠ ٧] = ٧ م٢

(٨) |م.ب| = ١٨ |م| + |ب| = ١١ |م| > |ب|

|م| |ب| = ١٨   ثم |م| = ١١ - |ب|

|ب| (١١ - |ب|) = ١٨

١١|ب| - |ب|^٢ = ١٨

|ب|^٢ - ١١|ب| + ١٨ = ٠

(|ب| - ٢)(|ب| - ٩) = ٠

|ب| = ٢ |ب| = ٩

|م| = ١١ - ٢ |م| = ١١ - ٩

= ٩ ✓   = ٢

(ب)

(٩) م × م = [٢ ٢ ؛ ٣ -١] [٢ ٢ ؛ ٣ -١] = [٤+٦ ٤-٢ ؛ ٦-٣ ٦+١]

= [١٠ ٢ ؛ ٣ ٧] - [٢ ٢ ؛ ٣ -١]

(د) ٨ م٢ = [٨ ٠ ؛ ٠ ٨] =

(١٠) $|م س| = ٢|م| = -\frac{١}{٢}|م ص|$

① ②

$\frac{|م س|}{|م|} = \frac{٢|م|}{|م|}$

$س = ٢$

$\frac{٢|م|}{|م|} = -\frac{١}{٢}\frac{|م ص|}{|م|}$

$٢ \times ٢ = -\frac{١}{٢} ص \times ٢$

(ب) $ص = -٤$

س٢: $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ص \\ -٤ & س \end{vmatrix} = ٧$

$٢س - ص = ٧$

$-س + ٤ص = ٧ \times ٢$

$٢س - ص = ٧$

$-٢س + ٨ص = ١٤$

$٧ص = ٢١$

$ص = ٣$

$٢س - ٣ = ٧$

$٢س = ١٠$

$س = ٥$

س٣: $أ = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$|أ| = -12 + 10 = -2$

$أ^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(أ) $|أ| \cdot أ^{-1} = -2 \times \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(ب) $|3أ| = 9|أ|$

$= 9 \times -2 = -18$

(جـ) $(-2أ)^{-1} = \frac{1}{-2} أ^{-1}$

$= \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}$

س٤:

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & 2 \\ \text{س} & 3 & \text{س} \\ 4 & \text{س} & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$1\begin{vmatrix} 3 & \text{س} \\ \text{س} & 5 \end{vmatrix} - \text{س}\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 4 & \text{س} \end{vmatrix} = -9$$

$$15 - \text{س}^2 - \text{س}(\text{س}) + 2(\text{س}^2 - 12) = -9$$

$$15 - \text{س}^2 - \text{س}^2 + 2\text{س}^2 - 24 = -9$$

$$-9 = -9$$

س أي عدد حقيقي .

س: (م)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\text{م}| = 4 - 6 = -2$$

$$\text{م}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 + 1 \\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\text{س} = -5$ $\quad$ $\text{ص} = 4$

②

$$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+0 & -3+0 & 9+0 \\ 0-4 & 0+0 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\text{س} - 4\text{ص} & -3\text{س} & 9\text{س} - 8\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$-3\text{س} = -3$

$\boxed{\text{س} = 1}$

$3\text{س} - 4\text{ص} = 4$

$3 - 4\text{ص} = 4$

$-1 = 4\text{ص}$

$\boxed{\text{ص} = -\frac{1}{4}}$

س ج: $\text{ا} = \begin{bmatrix} \text{س} & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\text{ا}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & \text{ص} \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$\text{ا} \cdot \text{ا}^{-1} = \text{م}_2$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \text{ص} \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\text{س} - 15 & \text{س ص} + 12 \\ 20 - 20 & 4\text{ص} + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٤س − ١٥ = ١ | ٥ص + ١٦ = ١

٤س = ١٦ | ٥ص = −١٥

س = ٤ | **ص = −٣**

س٧: أ × ب = و

لم نأخذ المحددة لكلا الطرفين

أ$^{-1}$ × أ × ب = أ$^{-1}$ و = و

أ . ب = و

(أ . ب) . ب$^{-1}$ = و . ب$^{-1}$

أ = و

س٨: م س − ص = ٥   ل س + ص = ٣

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} م & -١ \\ ل & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} م & ٥ \\ ل & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

م = ٦   **ل = ٢**

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٦ & ١- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨$$

$$|أس| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٠ = ٨$$

$$|أص| = \begin{vmatrix} ٥ & ١- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٥ + ٣ = ٨$$

$$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$$

$$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$$

س٩ : $$أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$(أ^{-١})^{٢} = أ^{-١} \times أ^{-١}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١+٢ & ٢+٦ \\ ٣+١ & ٢+٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١١ \end{bmatrix}$$

$$|أ^{-١}| = ٣ - ٢ = ١$$

$$أ = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$$

$$م \times م = {}^{٢}م$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٨- & ١١ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢-٦- & ٢+٩ \\ ١+٢ & ١-٣- \end{bmatrix} =$$

$$١ = ٣٢ - ٣٣ = |{}^{٢}م|$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix} ١ = {}^{١-}({}^{٢}م)$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix} =$$

$${}^{٢}({}^{١-}م) = {}^{١-}({}^{٢}م)$$

س١٠ :

$$٤- = ٣س + ٢ص$$

$$٣ = س + ٥ص$$

$$٤- = ٣س + ٢ص$$

$$٣ = س + ٥ص$$

$$\begin{bmatrix} ٤- \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

|أ| = ١٥ - ٢ = ١٣

أس = [٤- ٢]
[٣ ٥]

|أس| = ٢٠- - ٦ = -٢٦

أص = [٣ ٤-]
[١ ٣]

|أص| = ٩ + ٤ = ١٣

س = |أس| / |أ|

= -٢٦ / ١٣

= -٢

ص = |أص| / |أ|

= ١٣ / ١٣

= ١

س ١١ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

ص١ × -١ + ص٣

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -13 \end{array}\right]$$

ص١ × -٢ + ص٢

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -6 & -16 \\ 0 & 4 & -5 & -13 \end{array}\right]$$

ص٢ × $-\frac{٤}{٥}$ + ص٣

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$-٦ \times -\frac{٤}{٥} + -٥$

$\frac{٢٤}{٥} + \frac{-٢٥}{٥} = \frac{-١}{٥}$

$-١٦ \times -\frac{٤}{٥} + -١٣$

$\frac{٦٤}{٥} - \frac{٦٥}{٥} = \frac{-١}{٥}$

$-\frac{١}{٥}$ ع $= -\frac{١}{٥}$

ع = ١

٥ص − ٦ع = −١٦

٥ص − ٦ = −١٦

٥ص = −١٠

ص = −٢

س − ص + ٤ع = ٩

س + ٢ + ٤ = ٩

س + ٦ = ٩

س = ٣

س٢١ :

$$\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$$

$$س \times -٤ \times \frac{١}{٢} س = -٥٠$$

$$-٢ س^{٢} = -٥٠$$

$$س^{٢} = ٢٥$$

$$س = \pm ٥$$

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ١٣ \\ ٦ & ٧ & ٨ \\ -٢ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٧٨$$

تبديل ص١ مكان ص٣

(نعكس إشارة المحددة)

$$- \begin{vmatrix} -٢ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٧ & ٨ \\ ٠ & ٥ & ١٣ \end{vmatrix}$$

إخراج -٢ من الصف الأول

$$-(-٢) \begin{vmatrix} ١ & -١ & -٣ \\ ٦ & ٧ & ٨ \\ ٠ & ٥ & ١٣ \end{vmatrix}$$

ص١ × -٦ + ص٢ ←

$$٢ \begin{vmatrix} ١ & -١ & -٣ \\ ٠ & ١٣ & ٢٦ \\ ٠ & ٥ & ١٣ \end{vmatrix}$$

٢ × ١٣

٣-	١-	١
٢	١	٠
١٣	٥	٠

ص٢ × -٥ + ص٣

٢٦

٣	١-	١
٢	١	٠
٣	٠	٠

٢٦ × ٣ = ٧٨