المصفوفات

تعريف : هي تنظيم مستطيل الشكل مكون من عدد من الصفوف والأعمدة

الرموز المستخدمة للدلالة على المصفوفة :

أ ، ب ، س ، ...

رتبة المصفوفة = عدد الصفوف x عدد الأعمدة

= م x ن

المدخلات : هي العناصر الموجودة داخل المصفوفة

$أ_{ي هـ}$ حيث ي : هو رمز الصف الموجود فيه المدخل

و هـ : رمز العمود الموجود فيه المدخل

مثال ١ :

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -١ & ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

١- جدي رتبة المصفوفة أ

رتبة أ = م x ن

= ٣ x ٣

٢- جدي المدخلات $أ_{٢١}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٣٢}$

$أ_{٢١} = -١$ $أ_{١٢} = ١$ $أ_{٣٢} = ٢$

لا ← الصف العمود

أنواع خاصة من المصفوفات :

١- المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة

$$م_{ن×ن} \leftarrow م_{٢×٢} = \begin{bmatrix} م_{١١} & م_{٢١} \\ م_{١٢} & م_{٢٢} \end{bmatrix}$$

مربعة ثنائية من الرتبة الثانية

$$م_{٣×٣} = \begin{bmatrix} م_{١١} & م_{٢١} & م_{٣١} \\ م_{١٢} & م_{٢٢} & م_{٣٢} \\ م_{١٣} & م_{٢٣} & م_{٣٣} \end{bmatrix}$$

٢- مصفوفة الوحدة (م) محايدة

هي مصفوفة مربعة وقطرها الرئيسي مدخلاته = ١ وباقي المدخلات أصفار

مثال :

$$م_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي الأيمن

$$م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & ي = هـ \\ ٠ & ي \neq هـ \end{cases}$$

$$م_{٣×٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي

٣- المصفوفة الصفرية (و)

$$و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٤- مصفوفة الصف ← تتكون من صف واحد

$م = \begin{bmatrix} ٤ & ١- & ٢ \end{bmatrix}$

٥- مصفوفة عمود ← تتكون من عمود واحد

$ل = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٦- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع مدخلاتها أصفار باستثناء مدخلات القطر الرئيسي.

$$م = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

← موجود

$$م = \begin{cases} ٠ & ي \neq هـ \\ أ_{ي هـ} & ي = هـ \end{cases}$$

ملاحظة: المصفوفة المحايدة هي أحد أنواع القطرية.

"كل محايدة قطرية والعكس غير صحيح"

٧- مصفوفة مثلثية علوية: هي مصفوفة مربعة تكون فيها المدخلات تحت القطر الرئيسي تساوي صفر

$$م = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

نشاط (٢) ص (٩٧):

$$ل_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ل_{٣١} & ل_{٢١} & ل_{١١} \\ ل_{٣٢} & ل_{٢٢} & ل_{١٢} \\ ل_{٣٣} & ل_{٢٣} & ل_{١٣} \end{bmatrix}$$

ي ≠ هـ

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & \frac{١}{٢} \\ ٥ & \frac{١}{٢} & ١ \\ \frac{١}{٢} & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$ل_{١١} = \frac{١}{١+١}$$

ي = هـ $= \frac{١}{٢}$

متى تتساوى مصفوفتان ؟

1. إذا كانت الرتب متساوية
2. إذا كانت المدخلات المتناظرة متساوية

مثال :

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ & \\ & ٠ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

مثال ١ : جدي قيمة س، ص فيما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ١٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ص^٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

٢س = ٨ $\qquad$ ص² = ١٦

$\boxed{س = ٤}$ $\qquad$ $\boxed{ص = \pm ٤}$

تمارين ص (٩٨):

س١:

أ)

	غزة	طولكرم	الخليل
الحجم الكبير	٧٥٠	٦٠٠	٨٠٠
الحجم الصغير	٦٥٠	٤٥٠	٩٠٠

ب) ١٠٥٠ إنتاج فرع طولكرم

س٢: أ)

أ ٤×٣

ب) أ٢٣ + أ١٢ = -٤ + ٦ = ٢

جـ) (أ٣٢)^٣ = ٢٧

(-س)^٣ = ٢٧

-س^٣ = ٢٧

س^٣ = -٢٧

$\boxed{\text{س} = -٣}$

س٣: س^٢ + ١ = ١٠ ، ٢ = س - ١

س^٢ = ٩ ، $\boxed{\text{س} = ٣}$

$\boxed{\text{س} = \pm ٣}$

∴ س = ٣ لأنها تحقق المعادلتين

س٤ :

$$م = \begin{bmatrix} م_{٢١} & م_{١١} \\ م_{٢٢} & م_{١٢} \end{bmatrix}$$

$$م = \begin{bmatrix} ٢^{-١} & ٢^{٠} \\ ٢^{٠} & ٢^{١} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

س٥ :

$$ن = \begin{bmatrix} ن_{٢١} & ن_{١١} \\ ن_{٢٢} & ن_{١٢} \\ ن_{٢٣} & ن_{١٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} م_{١٢} & م_{١١} \\ م_{٢٢} & م_{٢١} \\ م_{٣٢} & م_{٣١} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٣ & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

جمع وطرح المصفوفات

شرط عمليتي الجمع والطرح :

أن يكون لهما نفس الرتبة ونقوم (بجمع / طرح) المدخلات المتناظرة وبالتالي رتبة الناتج نفس المصفوفتان التي أجريت عليهما العمليات .

مثال ١ : جد ناتج ما يلي :

①

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٩ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}_{٢\times٣} + \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}_{٢\times٣}$$

②

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفة بعدد ثابت

ك × م ⇐ نقوم بضرب كل مدخل في المصفوفة بالعدد ك حيث ك ∈ ح

مثلاً : جد قيمة ما يلي إذا كانت

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = م$$

① ٢م

② -٣م

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} \times ٢ = ٢م$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ -٤ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} -٣ = -٣م$$

$$= \begin{bmatrix} -٩ & -٦ \\ ٦ & -١٢ \end{bmatrix}$$

حل معادلات مصفوفية

مثال: جدي حل المعادلة التالية:

$$٣س - \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \qquad + \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\frac{٣س}{٣} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٣} & \frac{١٢}{٣} \\ \frac{٦}{٣} & \frac{٦}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

سؤال: جدي حل المعادلات المصفوفية التالية:

① $$س - \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} = ٢س + \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \qquad + \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$س - ٢س = \begin{bmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$-س = \begin{bmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٤ & -١٠ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

ج- $٤\left(س + \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}\right) = ٣\left(\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} - س\right)$

$- ٤س + \begin{bmatrix} ١٦- & ٤ \\ ٨- & ٠ \end{bmatrix} - = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} - ٣س$

$+ ٤س \qquad\qquad + ٤س$

$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} - \qquad \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} -$

$س = \begin{bmatrix} ١٩- & ٤ \\ ٠ & ١١- \end{bmatrix}$

س١ -

ج- $س + ٢م = \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٦- & ١٠ \\ ٢ & ١٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

$$٣أ - ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٦ & ١ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٤- \\ ٨ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٥ & ٩- & ٦ \\ ٦ & ١٨ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ & ٨- \\ ١٦ & ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ١١- & ١٤ \\ ١٠- & ٨ & ١- \end{bmatrix}$$

ب) $$جـ + د = \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٥ & ٦- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= ٩\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= ٩ م_٢$$

س ٢ ص (١٠٢) :

$$٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣\text{س} = \text{س} + \text{م}_{١}$$

$$+٣\text{س} \qquad +٣\text{س}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} = ٤\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix} = ٤\text{س}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{-١٠}{٤} \\ \frac{١٠}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix}$$

س ٣ : $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ $\qquad ٢\text{أ} + \text{ب} = \text{و}$

$$٢\text{أ} + \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$٢\text{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{٥}{٢} \\ \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \end{bmatrix}$$

س٤ : $س \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + ص \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣٠ \end{bmatrix}$

$٣ص = ٩$

$\boxed{ص = ٣}$

$٣س + ٥ص = -٣$

$٣س + ٥ \times ٣ = -٣$

$٣س = -١٨$

$\boxed{س = -٦}$

س٥ : $س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$٣س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix} \times ٢$

$٦س - \cancel{٢ص} = \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ ١٦ & -١٠ \end{bmatrix}$

$س + \cancel{٢ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$٧س = \begin{bmatrix} ٧ & -٧ \\ ١٤ & -٢١ \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$٢ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix}$

$ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات :

ما هو شرط ضرب مصفوفتان ؟

$$\underset{م \times ن}{أ} \times \underset{ن \times ل}{ب} = \underset{م \times ل}{جـ}$$

* أن يكون عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية

مثال : جدي رتبة المصفوفة س فيما يلي :

① $\underset{٢ \times ٣}{أ} \times \underset{٣ \times ٤}{س} = \underset{٢ \times ٤}{جـ}$

② $\underset{٢ \times ٥}{س} \times \underset{٥ \times ١}{أ} = \underset{٢ \times ١}{ب}$

③ $\underset{٣ \times ٤}{أ} \times \underset{٤ \times ٢}{ب} = \underset{٣ \times ٢}{س}$

كيفية إجراء ضرب مصفوفتان :

نقوم بضرب مدخلات كل صف في الأولى بمدخلات كل عمود في الثانية
وهكذا نكرر العملية حتى تنتهي صفوف الأولى

مثال ١ : جدي ناتج ما يلي :

① $$\underset{٢ \times ٢}{\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}} \times \underset{٢ \times ٢}{\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} (٢ \times ١) + (١- \times ٣) & (٢ \times ٠) + (١- \times ٥) \\ (٣ \times ١) + (٤ \times ٣) & (٣ \times ٠) + (٤ \times ٥) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١- & ٥- \\ ١٥ & ٢٠ \end{bmatrix}$$

٢×٢

مثال (٦) ص (١٠٣) :

أ × ب لا يمكن
$\underset{2\times3}{أ} \times \underset{2\times2}{ب}$

$$\underset{3\times2}{أ} \times \underset{2\times3}{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٠.٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ٦ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (١٥ + ٣ + ٤) & (٦ + -٦ + ٢) \\ (٢٥ + -١٢ + ٠.) & (١٠ + ٢٤ + ٠.) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٢ & ٢ \\ ١٣ & ٣٤ \end{bmatrix}$$

$$ب \times ج = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ٦ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (١٠ + ٦) & (١٠ + ١٠) \\ (-٦ + ١٨) & (-٦ + ٣٠) \\ (٤ + ٣) & (٤ + ٥) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٢١ \\ ١٢ & ٢٤ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$$

مثال (٨) ص (١٠٥) :

① أ × م = $\begin{bmatrix} -١٢ + -٤٥ & -٣ + ٤٥ & -٦ + -١٠ \\ ٤ + -٣٠ & ١ + ٥٤ & ٢ + -١٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -٥٧ & ٤٢ & -١٦ \\ -٢٦ & ٥٥ & -١٠ \end{bmatrix}_{٢\times٣}$

② م × أ لا يمكن إجراء عملية الضرب.
$\underbrace{٢\times٣ \quad ٢\times٣}$

نلاحظ : عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية
أ × ب ≠ ب × أ

مثال (٩) :

أ × ب ⟸ ن = ٥
$\underbrace{١\times ن \quad ٥\times د}$

ب × أ ⟸ ل = ٢
$\underbrace{٥\times ل \quad ٢\times ن}$

مثال (١) ص (١٠٦) :

$\left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٨ + ٣ + ٠ & ١٠ + ٦ + -٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٣٣ + ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٦ \end{bmatrix}$

تمارين (صـ ١٠٧) :-

س١ : $أ_{٢\times٥} \cdot ب_{٥\times٤} = جـ_{٢\times٤}$

$أ_{٣\times٢} \cdot ب_{٣\times٥} = جـ_{٣\times٥}$

س٢ :

(أ) $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٠+٢٠ & ٢٤+٠ & -٨+٣٥ \\ -١٠+٤ & -١٢+٠ & ٤+٧ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤٠ & ٢٤ & ٢٧ \\ -٦ & -١٢ & ١١ \end{bmatrix}$

(ب) $جـ \cdot ب = \underset{٣\times٢}{\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}} \underset{٢\times٣}{\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} ٥+-١٦ & ٦+صفر & -٢+-٢٨ \\ ١٥+٢٠ & ١٨+صفر & -٦+٣٥ \\ ١٠+٨ & ١٢+٠ & -٤+١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١١ & ٦ & \cancel{-٣٢}\ -٣٠ \\ ٣٥ & ١٨ & \cancel{٤١}\ ٢٩ \\ ١٨ & ١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

$أ^٢ = أ \times أ$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦+-١٠ & ٢٠+٥ \\ -٨+-٢ & -١٠+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢٥ \\ -١٠ & -٩ \end{bmatrix}$

س٣ :

$$\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ -٣٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ص & ٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & س & ٣ \\ -٢ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$$

$ص_١ \times ع_١ = ج_{١١} = ٢٠$

$ص_٢ \times ع_٢ = ج_{٢٢}$

$٣ + ٤س + ٢٥ = ٢٠$

$٤س + ٢٨ = ٢٠$

$٤س = -٨$

$\boxed{س = -٢}$

$-٦ + ٤ص + -١٦ = -٣٤$

$٤ص \underset{+٢٢}{-٢٢} = \underset{+٢٢}{-٣٤}$

$\frac{٤ص}{٤} = \frac{-١٢}{٤}$

$\boxed{ص = -٣}$

س٤ :

$س = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} ، ص = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} ، ع = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٣ + ٦ + ١٠ & ٠ + ٣ + ٨ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٣ & ١١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦٦ + -٢٦ & ٢٢ + ١٣ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤٠ & ٣٥ \end{bmatrix}$

$= ٥ \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \end{bmatrix}$

$= ٥ص$

س٥ :

$\text{أ}^2 = \text{أ} \times \text{أ}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤+٠ & ٢+٣ \\ ٠+٠ & ١+٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^2 = \text{ب} \times \text{ب}$

$= \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١+٢ & -٢+٨ \\ -١+٤ & ٢+١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٣ & ١٨ \end{bmatrix}$

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & -٨ \end{bmatrix}$

$(\text{أ} - \text{ب}) \cdot (\text{أ} + \text{ب})$

$\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -١ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣+-١ & ٩+-٧ \\ -١+-١ & -٣+-٧ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٢ & -١٠ \end{bmatrix}$

في عالم المصفوفات $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

س٦ : أ² = أ × أ = ن

$$= \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ س + ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

ص١ × ع١ = ن١١

س² = ١

س = ± ١

ص٢ × ع١ = ن٢١

س + ١ = ٥

س = ٤

س² = ١ ، س + ١ = ٥

س = ± ١ ، س = ٤

م.ح = ∅

س٧ : (ب) أ + ٢د = ب د ، ن ، د

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ + س \\ -٣ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

٢ + س = ٣س + ٢ص

٢ = ٢س + ٢ص

١ = س + ص

٣ = -س + ص

س = ص + ٣

٣ = س - ص

٤ = ٢ص

ص = ٢

س + ص = ١

س + ٢ = ١

س = -١

$$\Leftarrow د = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

(ج) $ب^{٣} = ب \times ب \times ب$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \end{bmatrix} =$$

$$ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix} =$$

المحددات

أولاً: محددة المصفوفة الثنائية

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix}$$

المحددة

$$|\text{أ}|_{2\times 2} = \text{أ}_{11} \times \text{أ}_{22} - \text{أ}_{12} \times \text{أ}_{21}$$

مثال ١: $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = (1 \times 4) - (2 \times 3)$$

$$= 4 - 6 = -2$$

سؤال ١: جدي قيمة المحددات التالية:

① $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (4 \times 3) - (-2 \times 5)$

$= 12 - -10 = 22$

② $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2 \times 2) - (1 \times 3)$

$= -4 - 3 = -7$

سؤال ٢: جدي قيمة س حيث

$$\begin{vmatrix} 2\text{س} & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$2\text{س} - 6 = 4$$

$$2\text{س} = 10 \Leftarrow \text{س} = 5$$

ثانياً : محددة المصفوفة الثلاثية

$$\text{أ}_{3\times3} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix}$$

إيجاد المحددة باستخدام التعريف (القانون)

$$|\text{أ}| = \text{أ}_{11}\begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} - \text{أ}_{21}\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} + \text{أ}_{31}\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix}$$

مثال ١ : $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (10-4) + 2(-12) + 3(-6)$

$= 6 - 24 - 18$

$= 6 - 42$

$= -36$

تمارين ص ١١٣ :

س ١ : (أ)

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(10-3) - 3(12 - -4) + 2(18 - -20)$$

$$= -4\times 7 - 3\times 16 + 2\times 38$$

$$= -28 - 48 + 76$$

$$= -76 + 76$$

$$= 0$$

(ب)

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (2\times 8) - (4\times -4)$$

$$= 16 - -16$$

$$= 32$$

إيجاد المحددة الثلاثية باستخدام مدخلات أي صف أو عمود:

* نقوم باتباع طريقة القانون (التعريف)

حيث نستخدم في القانون مدخلات أي صف أو عمود

* بشرط $(-1)^{ي+هـ}$ ي: رقم الصف هـ: رقم العمود

مثال ١: أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ جدي |أ| باستخدام مدخلات العمود الأول

|أ| = $2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(-5) - (-3) + 4(-5-9)$

|أ| = $-10+3 + -56$

$= -66 + 3$

|أ| = -63

سؤال ١: جدي |أ| حيث أ = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

باستخدام مدخلات الصف الثالث

$$|أ| = ١(-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} + ٢(-١)^{٢+٣}\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} + ٣(-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ -٦ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= ٠ - ٢(-٦ - -٦) + ٣(٠)$$

$$= -٢(٠)$$

$$= ٠$$

مثال (٣):

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$$

وعصر بدلالة الصف الثالث:

$$|أ| = ٥(-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix}$$

$$٢٠ = ٥(س - ٤)$$

$$٤ = س - ٤$$

$$\boxed{س = ٨}$$

خصائص المحددات :

(١) عند تبديل صفين او عمودين تنعكس إشارة المحدد

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٨ - ٣ = ٥$

$\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \Leftarrow ٣ - ٨ = -٥$

* كل حركة تبديل تعكس الإشارة *

(٢) يمكن إخراج عامل مشترك من أي صف أو أي عمود في المحددات

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$

محددة

$\begin{vmatrix} ٦ & ٩ \\ ١٢ & ٢١ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٩ \\ ٤ & ٢١ \end{vmatrix} = ٣ \times ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix}$

مصفوفة

$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{bmatrix} = ٢ \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ ٥ & ١٠ & ١٥ \end{vmatrix} = ٣ \times ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$

* في المصفوفة نخرج العامل المشترك من جميع المدخلات أما في المحددة فقط من صف أو عمود *

(٣) إذا أضيفت مدخلات أي صف / عمود إلى مدخلات صف آخر / عمود فلا تتغير قيمة المحددة

إذا أضيفت أمثال (نظائر) أي صف / عمود إلى آخر لا تتغير المحددة

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}| = ٨ - ٦ = ٢$	
$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = ١٤ - ١٢ = ٢$	ص١ + ص٢ بينما يبقى الصف الأول مكانه
$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢٢ & ١٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢٢ - ٣ \times ١٤ = ٤٤ - ٤٢ = ٢$	(ص١ × ٥ + ص٢) ٢ × ٥ + ٤ ١٤ ٣ × ٥ + ٧ ١٥ + ٧ = ٢٢

٤ إذا تساوى صفان أو عمودان داخل محددة فإن قيمتها = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - ٥ = ٠ \therefore$

إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة من مضاعفات ~~الصف~~ الآخر فإن المحددة = صفر

$\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$

$\begin{vmatrix} ١٢ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= ٦ \times (٢ - ٢)$

$= ٦ \times ٠ = ٠$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ ٦ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

⑤ محددة المصفوفة المثلثية العلوية = حاصل ضرب قطرها الرئيسي

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

أصفار

$$|أ| = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$$

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = ١ \times ٢ \times ٥ = ١٠$$

$$م_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|م_{٣\times٣}| = ١$$

محددة المصفوفة المحايدة = ١

$$م_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|م_{٢\times٢}| = ١$$

٦ |ك أ ن×ن| = كⁿ |أ|

مثال :

أ ٢×٢ = [١ ٢ ؛ ٣ ٤]

ن = ٢

جد ① |أ| = (١ × ٤) − (٢ × ٣)

= ٤ − ٦ = −٢

② |٣أ| = ٣² |أ|

= ٩ × −٢

= −١٨

③ |٥أ| = ٥² |أ|

= ٢٥ × −٢

= −٥٠

مثال (٤) ص (١١١) :

|٢أ| = ٤٠

٢ⁿ |أ| = ٤٠

٢ⁿ × ٥ = ٤٠

٢ⁿ = ٨

٢ⁿ = ٢³

ن = ٣

٧ إذا كانت أ، ب مصفوفتان مربعتان

|أ × ب| = |أ| × |ب|

توزيع المحددات في عملية الضرب

$|أ^{ن}| = |أ| \times |أ| \times |أ| \cdots |أ|$

ن مرة

نتيجة $|أ^{ن}| = (|أ|)^{ن}$

$أ = [أ_{1\times1}]$

$|أ| = أ_{1\times1}$

مثال $أ = [٥]$

$|أ| = ٥$

$أ = [-٦]$

$|أ| = -٦$

$\underset{1\times1}{[٢]} \times \underset{1\times1}{[-٣]} = [-٦]$

أ ، ب مربعتان

$|أ.ب| = |أ| \times |ب|$

$|ب.أ| = |ب|\,|أ|$

$|أ.ب| = |ب.أ|$

س١ : جـ $|٥\, م_{3\times3}| = ٥^{٣}\, |م|$

$= ١٢٥ \times ١ = ١٢٥$

س٢ :

$$\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$$

$$٢\begin{vmatrix} س & ٥ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} -(-١)\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = س^{٢} - (-١)$$

$٢(٣س - ٣٠) + (١٢ - ٥) + ٣ \times (٢٤ - س) = س^{٢} + ١$

$٦س - ٦٠ + ٧ + ٧٢ - ٣س = س^{٢} + ١$

٣ س + ١٩ = س٢ + ١
س٢ − ٣ س − ١٨ = صفر
(س + ٣) (س − ٦) = ٠
س = −٣   س = ٦

س٣ : |٣أ| = ٥٤
٣٢ |أ| = ٥٤
٩ |أ| = ٥٤
|أ| = ٦

|أ.ب| = −١٢
|أ| × |ب| = −١٢
٦ |ب| = −١٢
|ب| = −٢

|٢أ| + |٥ب|
٤|أ| + ٢٥ |ب|
٤×٦ + ٢٥×−٢
٢٤ − ٥٠ = −٢٦

س٤ : |أ٣| = ١٢٥
|أ|٣ = ١٢٥
|أ| = $\sqrt[3]{125}$
|أ| = ٥
$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & س \\ س & ٢ \end{vmatrix}$

٥ = س٢ − ٤
س٢ = ٩
س = ± ٣

س٥ :
$\begin{vmatrix} ١ & ص & س \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$

باستخدام مدخلات العمود الثالث

$١(-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} + ١(-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} ص & س \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix}$
$+ ١(-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ص & س \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$

(٢١ − ١٠) − (٧س − ٥ص) + (٢س − ٣ص) = ٠
١١ − ٧س + ٥ص + ٢س − ٣ص = ٠
−٥س + ٢ص + ١١ = ٠

س٥ :

$$\begin{vmatrix} ١ & ص & س \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} ١ + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} ص - \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} س$$

$$٠ = ١١ + ٢ص + ٥س-$$

س٦ : (أ) ضرب الصف الأول في (−٢) وإضافته للصف الثاني أي $-٢ص_١ + ص_٢$

$١ \leftarrow ص_٢ + \square \times ص_١$

$٢ك + ٥ = ١$ ، $\frac{٢ك}{٢} = \frac{-٤}{٢}$ ، $\boxed{ك = -٢}$ $\quad ص_٢ + ٢- \times ص_١$

(ب) إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفراً.

$٣ \times ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ إذا تساوى صفان أو عمودان فإن المحدد صفر

(هـ) تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب ب (−١)

تبديل العمود الأول بالعمود الثاني تعكس إشارة المحددة

مثال: (أ)

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ}+\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$\xleftarrow{ع_1 + ع_2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب}+\text{جـ}+\text{أ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}+\text{ب}+\text{أ} \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}+\text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix}$$

$\xleftarrow{\text{إخراج أ+ب+جـ عامل مشترك}}$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \times \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & 1 \\ 1 & \text{جـ} & 1 \\ 1 & \text{ب} & 1 \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

$= 0$ لأن $ع_1 = ع_3$

(ب)

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 9 & -4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -200$$

$$= 5 \times -4 \times 10 = -200$$

في المثلثية العلوية فإن محددة المصفوفة تساوي حاصل ضرب القطر الرئيسي