مراجعة
الوحدة
الثانية

س: إذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$ اقتران معرف على الفترة $[1 ، 1+ن]$

أثبت أن $\sqrt{1+ن} - 1 < \frac{ن}{2}$ ، $ن > 1$

لاحظ أن $ق(س)$ متصل $\forall س \in [1 ، 1+ن]$ لأنه معرف على هذا المجال $(ن > 1)$ الفترة موجبة

$قَ(س) = \frac{1}{2\sqrt{س}}$ موجودة $\forall س \in]1 ، 1+ن[$ لأنه معرف على هذا المجال

∴ $ق(س)$ تحقق المتوسطة على $[1 ، 1+ن]$

$\exists$ ج $\in]1 ، 1+ن[$ بحيث $قَ(ج) = \frac{ق(ن+1) - ق(1)}{ن+1-1}$

$\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{ج}} = \frac{\sqrt{ن+1} - 1}{ن} \Leftarrow \frac{ن}{2\sqrt{ج}} = \sqrt{ن+1} - 1 \quad \text{...} ①$

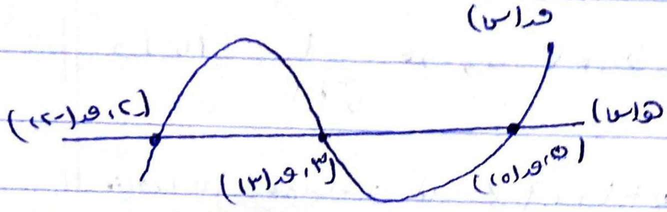
لكن ج $\in]1 ، 1+ن[\Leftarrow$ ج $> 1 \Leftarrow \sqrt{ج} > 1$

$\Leftarrow 2\sqrt{ج} > 2 \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{ج}} < \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{ن}{2\sqrt{ج}} < \frac{ن}{2}$

بالتعويض في ① $\Leftarrow \sqrt{ن+1} - 1 < \frac{ن}{2}$

س٥ : إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود وكان المستقيم هـ(س) = ٣س - ٢ يقطع منحنى ق(س) عند س = -٢، ٣، ٥ أثبت أنه يوجد عدد جـ ∈]-٢، ٥[بحيث قً(جـ) = ٠

المطلوب تطبيق رول على قً(س) وفترة تحقق فيها قً(س) شروط رول نبحث عن فترة



الشكل المقابل يمثل رسم تمثيلي للسؤال

لاحظ أن ق(س) يحقق المتوسطة في [-٢، ٣] لأنه متصل كثير حدود وقابل للاشتقاق كثير حدود ⇐ ∃ جـ₁ ∈]-٢، ٣[بحيث قً(جـ₁) = (ق(٣) - ق(-٢)) / (٣ - -٢)

= م القاطع = م هـ(س) = ٣

⇐ قً(جـ₁) = ٣

كذلك ق(س) يحقق المتوسطة في [٣، ٥] ⇐ جـ₂ ∈]٣، ٥[

بحيث قً(جـ₂) = (ق(٥) - ق(٣)) / (٥ - ٣) = م القاطع = م هـ(س) = ٣ ⇐ قً(جـ₂) = ٣

∴ قً(جـ₁) = قً(جـ₂) = ٣ جـ₂ ≠ جـ₁ ، نطبق رول على قً(س) ، [جـ₁، جـ₂]

قً(س) متصل ∀ س ∈ [جـ₁، جـ₂] لأنه كثير حدود

قً(س) موجودة ∀ س ∈]جـ₁، جـ₂[لأنه كثير حدود

انطبقت رول ⇐ ∃ جـ ∈]جـ₁، جـ₂[بحيث قً(جـ) = صفر لكن

[جـ₁، جـ₂] ⊆]-٢، ٥[⇐ جـ ∈]-٢، ٥[

** note **

إذا كان هـ(س) أفقي نطبق فقط رول لأن الصور ستكون متساوية وتساوي صفر

أما إذا كان الخط مائل نطبق المتوسطة أولاً ونوجد قً(جـ₁) و قً(جـ₂) ونطبق رول على جـ₁، جـ₂

س٣: إذا كان ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$ أوجد

① مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

② القيم القصوى ونوعيتها للاقتران ق(س)

③ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)

④ نقاط وزوايا الانعطاف إن وجدت

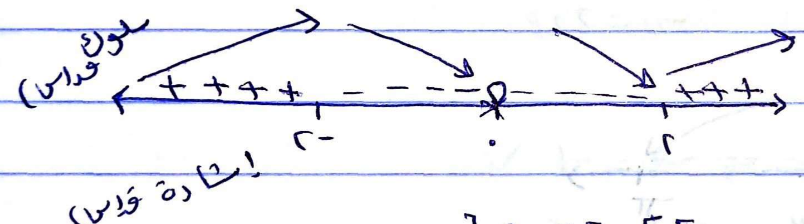
لاحظ أن ق(س) اقتران نسبي المجال غير محدد، نحدد المجال

مجال ق(س) هو ح / {أصفار المقام}

نجد أصفار المقام ⇐ س = ٠

∴ ق(س) متصل وقابل للاشتقاق ∀ س ∈ ح / {٠}

ق'(س) = ١ − $\frac{٤}{س^٢}$ = ٠ ⇐ س² = ٤ ⇐ س = ±٢ ∈ للمجال



① ق(س) متزايد ∀ س ∈]−∞، −٢]، [٢، ∞[

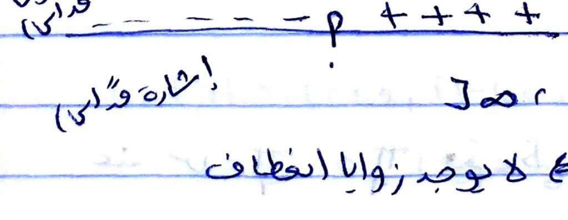
ومتناقص ∀ س ∈ [−٢، ٠[،]٠، ٢]

② عند س = −٢، قيمة عظمى محلية هي ق(−٢) = −٢ + −٢ = ٠

عند س = ٢، قيمة صغرى محلية هي ق(٢) = ٢ + ٢ = ٤ لا يوجد قيم مطلقة.

ق''(س) = $\frac{٨س}{س^٤}$ = $\frac{٨}{س^٣}$ = ٠ ⇐ ٨ = ٠ X

③



منحنى ق(س) مقعر للأسفل ∀ س ∈]−∞، ٠[وللأعلى ∀ س ∈]٠، ∞[

④ لا يوجد نقاط انعطاف لأن ٠ ∉ للمجال ⇐ لا يوجد زوايا انعطاف

س ٦ :

إذا كان ق(س) = ٢جاس + جتا٢س ، س ∈ [٠ ، π] ، أوجد

① مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

② القيم القصوى ونوعيتها للاقتران ق(س)

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، π]

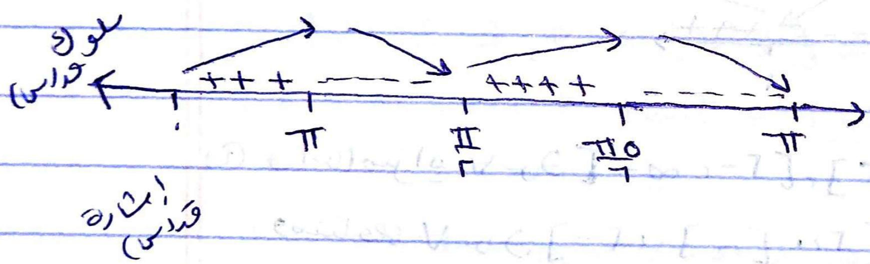
ق'(س) = ٢جتاس − ٢ جا٢س = ٠ لكن جا٢س = ٢جاس جتاس

٢جتاس − ٢ (٢جاس جتاس) = ٠ ÷ ٢

جتاس (١ − ٢جاس) = ٠ ⇐ جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{2}$ ✓ $\frac{3\pi}{2}$ ✗

أو ١ − ٢جاس = ٠ ⇐ جاس = $\frac{1}{2}$ ربع أول ← س = $\frac{\pi}{6}$

ربع ثاني ← س = $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ✓



① ق(س) متزايد ∀ س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{6}$] ، [$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$]

ومتناقص ∀ س ∈ [$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$] ، [$\frac{5\pi}{6}$ ، π]

② عند س = ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π قيم صغرى محلية هي ق(٠) = ١

مطلقة

ق($\frac{\pi}{2}$) = ٢ − ١ = ١

ق(π) = ١

عند س = $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ قيم عظمى محلية هي ق($\frac{\pi}{6}$) = $2(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

مطلقة

ق($\frac{5\pi}{6}$) = $2(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

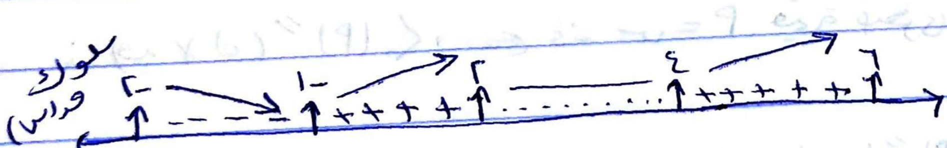
مثـ5: إذا كان د(س) = { س² + ٢س   -٢ ≤ س ≤ ٢
٨   ٢ < س < ٤
٣س - ٤   ٤ ≤ س ≤ ٦

أوجد: ① مجالات التزايد والتناقص لمنحنى د(س)
② القيم القصوى ونوعيتها

عند البحث د(س) متصل ∀ س ∈ [-٢، ٦]

د'(س) = { ٢س + ٢   -٢ < س < ٢
٠   ٢ < س < ٤
٣   ٤ < س < ٦
غ.م   س = -٢، ٦
غ.م   س = ٢، ٤

د'(س) = ٠ ⇐ ٢س + ٢ = ٠ ⇐ س = -١ ✓
٠ = ٠ ✓ ∀ س ∈]٢، ٤[
٣ = ٠ ✗



د(س) متناقص ∀ س ∈ [-٢، -١] ، متزايد ∀ س ∈ [-١، ٢]، [٤، ٦]
ثابت ∀ س ∈ [٢، ٤]
عند س = -٢، ٢، ٦ قيم قصوى عظمى محلية هي د(-٢)، د(٢)، د(٦)
عند س = -١، ٤ قيم صغرى محلية هي د(-١)، د(٤)
∀ س ∈]٢، ٤[يوجد قيم عظمى محلية وقيم صغرى محلية هي ٨

س٤ : إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين كثيري حدود يقع منحناهما فوق محور السينات
وكان لكل منهما قيمة صغرى محلية عند س = أ ، ق″(أ) ≠ ٠ ، هـ″(أ) ≠ ٠ .
أثبت أن للاقتران (ق × هـ)(س) قيمة صغرى عند س = أ

يمكن إثبات أن للاقتران (ق × هـ)(س) قيمة صغرى عند س = أ (١)
إذا أثبتنا أن (ق × هـ)′(أ) = ٠ ، (ق × هـ)″(أ) > ٠ (٢)

ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود ← متصلين وقابلين للاشتقاق عند س = أ ، قيمة صغرى لهما
ق′(أ) = هـ′(أ) = ٠
(ق × هـ)′(أ) = ق(أ) هـ′(أ) + هـ(أ) ق′(أ) = ٠

(ق × هـ)″(أ) = ق(أ) هـ″(أ) + هـ′(أ) ق′(أ) + هـ(أ) ق″(أ) + ق′(أ) هـ′(أ)
= ق(أ) هـ″(أ) + (٠) + هـ(أ) ق″(أ) + (٠) نعوض

∴ (ق × هـ)″(أ) = ق(أ) هـ″(أ) + هـ(أ) ق″(أ)
= (+) × (+) + (+) × (+) = (+) > ٠

∴ (ق × هـ)″(أ) > ٠ ← عند س = أ قيمة صغرى للاقتران (ق × هـ)

لاحظ أن ق′(أ) = ٠ ، ق″(أ) > ٠ لأنها صغرى (ق″(أ) ≠ ٠)
ق(أ) > ٠ لأن منحنى ق(س) فوق السينات

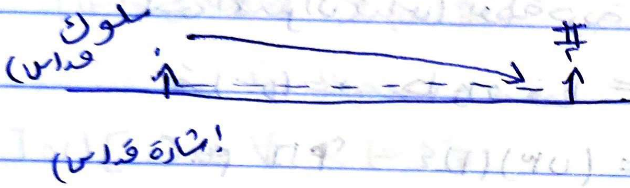
و هـ′(أ) = ٠ ، هـ″(أ) > ٠ لأنها صغرى (هـ″(أ) ≠ ٠)
هـ(أ) > ٠ لأن المنحنى فوق السينات .

س7: بين أن الاقتران ق(س) = جا س - س ، متناقص على الفترة $[0 ، \frac{\pi}{2}]$

ومن ذلك أثبت أن جا س $\leq$ س في نفس الفترة

ق(س) متصل $\forall$ س $\in [0 ، \frac{\pi}{2}]$

قَ(س) = جتا س - ١ = ٠ $\Leftarrow$ جتا س = ١ $\Leftarrow$ س = ٠ ، 2π ✗



ق(س) متناقص $\forall$ س $\in [0 ، \frac{\pi}{2}]$

لاحظ أن س $\in [0 ، \frac{\pi}{2}] \Leftarrow$ س $\geq$ ٠   لكن ق(س) متناقص

$\Leftarrow$ ق(س) $\leq$ ق(٠) $\Leftarrow$ جا س - س $\leq$ جا ٠ - ٠

$\Leftarrow$ جا س - س $\leq$ ٠ $\Leftarrow$ جا س $\leq$ س

س٨ : إذا كان ق(س) = ١/٣ س٣ + ٢أ س٢ + ٣ب س ، وكان للاقتران ق(س) نقطة حرجة واحدة عند س = -٣ ، جد قيم أ ، ب ...

عند س = -٣ نقطة حرجة ⇐ قَ(-٣) = ٠ ، كثير حدود

قَ(س) = س٢ + ٤أ س + ٣ب ⇐ قَ(-٣) = ٩ - ١٢أ + ٣ب = ٠

-٤أ + ب = -٣ ... ①

لكن الاقتران ق(س) نقطة حرجة فقط ⇐ للمعادلة

قَ(س) = ٠ ، حل واحد فقط ⇐ المميز = صفر

⇐ ١٦أ٢ - ٤(١)(٣ب) = ٠ ⇐ ٤أ٢ - ٣ب = ٠ ... ①

من معادلة ① ب = ٤أ - ٣ ⇐ ٣ب = ١٢أ - ٩

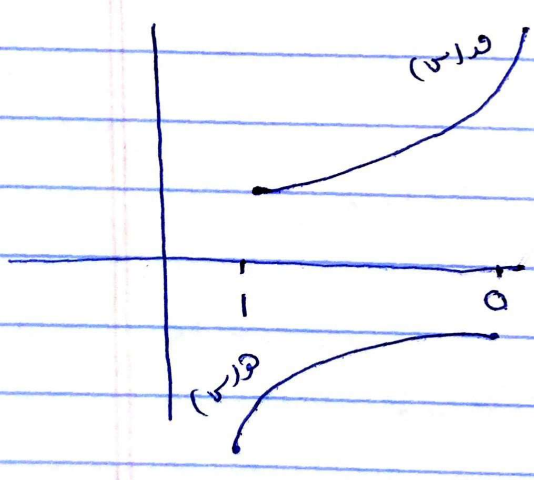
∴ ٤أ٢ - (١٢أ - ٩) = ٠ ⇐ ٤أ٢ - ١٢أ + ٩ = ٠

⇐ (٢أ - ٣)(٢أ - ٣) = ٠ ⇐ أ = ٣/٢

ب = ٤أ - ٣ = ٤(٣/٢) - ٣ = ٦ - ٣ = ٣

س٩ : إذا كان ل(س) = (هـ(س) / ق(س))

بالاعتماد على الشكل المقابل أثبت أن ل(س) اقتران متناقص ∀ س ∈ [١، ٥]



لاحظ ان ل(س) متصل ∀ س ∈ [١، ٥] لأنه حاصل قسمة اقترانين متصلين والمقام ≠ صفر (معطيات)

$$ل'(س) = \frac{ق(س)\, هـ''(س) - هـ'(س)\, ق'(س)}{(ق(س))^2}$$

$$= \frac{(+)\,(-) - (+ \times +)}{(+)}$$

$$= - < ٠$$

ق(س) > ٠ ∀ س ∈]١، ٥[لأنه فوق محور السينات

هـ''(س) < ٠ لأن منحنى هـ(س) مقعر للأسفل

هـ'(س) > ٠ ∀ س ∈]١، ٥[لأنه متزايد (هـ(س))

ق'(س) > ٠ ∀ س ∈]١، ٥[لأن ق(س) متزايد

∴ ل'(س) < ٠ ∀ س ∈]١، ٥[

⟸ ل(س) اقتران متناقص ∀ س ∈ [١، ٥]

س ١٥ : إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة (١، ٥)
وله نقطة انعطاف عند النقطة (٢، ١) فإذا كانت زاوية الانعطاف هي هـ $= \frac{\pi}{٤}$
احسب قاعدة ق(س)

نفرض أن ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، أ ≠ ٠

ق(١) = ٥ ⟸ أ + ب + جـ + د = ٥ --- (١)

(٢، ١) نقطة انعطاف ⟸ ق(٢) = ١ ، ق''(٢) = ٠ ، كثير حدود

ق(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ --- (٢)

ق'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ ، زاوية الانعطاف = $\frac{\pi}{٤}$

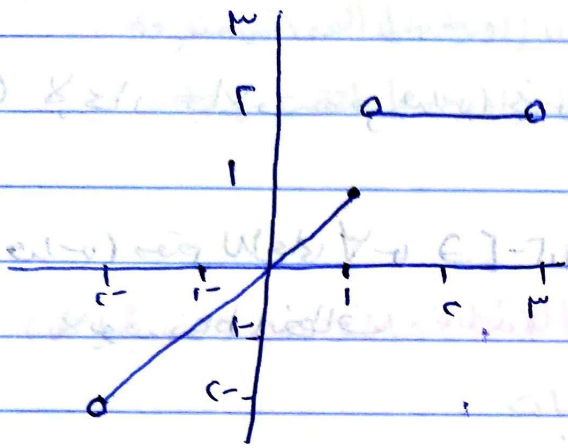
ق'(٢) = ظا $\frac{\pi}{٤}$ ⟸ ١٢أ + ٤ب + جـ = ١ --- (٣)

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب ⟸ ق''(٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠

⟸ ٦أ + ب = ٠ --- (٤)

بحل المعادلات نجد قيم أ، ب، جـ، د

مثال : الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران قَ(س) ، فإذا كان ق(س) متصل على [-٢، ٣] اوجد ما يلي :



① قيم س التي يكون عندها نقاط حرجة لـ ق(س)

② مجالات تزايد وتناقص ق(س)

③ القيم القصوى ونوعيتها لـ ق(س)

④ مجالات تزايد وتناقص قَ(س)

⑤ القيم القصوى ونوعيتها لـ قَ(س)

⑥ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) ونقاط الانعطاف ان وجدت

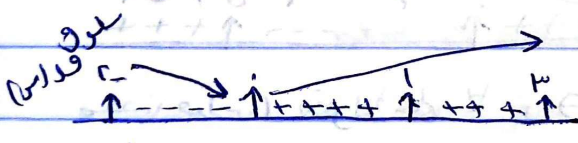
① القيم الحرجة عندما قَ(س) = ٠ أو غير موجودة

عند س = -٢ ، ٠ ، ١ ، ٣ يوجد نقاط حرجة .

② تزايد وتناقص يعتمد على إشارة قَ(س)

ق(س) متناقص ∀ س ∈ [-٢، ٠]

ومتزايد ∀ س ∈ [٠، ٣]



③ للاقتران ق(س) قيم عظمى محلية عند س = -٢ ، ٣ هي ق(-٢) ، ق(٣)

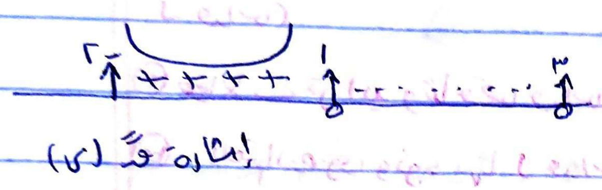
للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) عند س = ١ لا يوجد

④ تزايد وتناقص قَ(س) يعتمد على زاوية الميل لـ قَ(س) متزايد ∀ س ∈]-٢، ١[

(زاوية الميل حادة) وثابت ∀ س ∈]١، ٣[

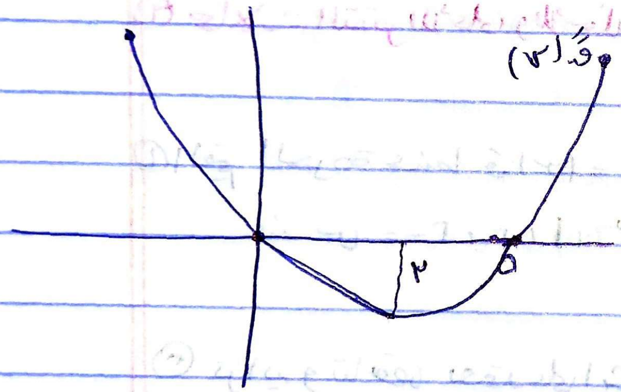
⑤ لا يوجد قيم قصوى للاقتران ق(س) عند س = -٢ ، ١ ، ٣
∀ س ∈]١ ، ٣[يوجد قيم عظمى وصغرى محلية لـ ق(س) = ٢

⑥ لإيجاد مجالات تقعر ق(س) نحدد إشارة ق''(س) من تزايد وتناقص ق'(س)



ق(س) مقعر للأعلى ∀ س ∈]-٢ ، ١[
لا يوجد نقاط انعطاف

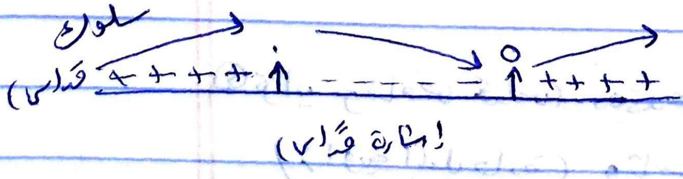
س12 : الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران ق'(س) بالاعتماد عليه جد ما يلي :



① مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى ق(س)
مجالات تقعر ق(س) تعتمد على إشارة ق''(س) نحدد إشارة ق''(س) من المنحنى المرسوم

منحنى ق(س) مقعر للأعلى ∀ س ∈]-∞ ، ٠[،]٥ ، ∞[
وللأسفل ∀ س ∈]٠ ، ٥[، (٠ ، ق(٠)) ، (٥ ، ق(٥)) نقاط انعطاف

② مجالات التزايد والتناقص ق(س) والقيم القصوى ونوعها
مجالات تزايد وتناقص ق(س) تعتمد على إشارة ق'(س)



ق(س) متزايد ∀ س ∈]-∞ ، ٠[،]٥ ، ∞[
متناقص ∀ س ∈]٠ ، ٥[
ق(٠) قيمة عظمى محلية ، ق(٥) قيمة صغرى محلية

③ مجالات تزايد وتناقص ق(س) والقيم القصوى ونوعيتها

نجد مجالات تزايد وتناقص ق(س) من خلال زاوية ميل المماس

ق(س) متناقص ∀ س ∈]-∞، ٣] لأن زاوية ميل المماس منفرجة.

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [٣، ∞[لأنه زاوية ميل المماس حادة

ق(٣) قيمة صغرى مطلقة

④ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف إن وجدت لمنحنى ق(س)

نجد مجالات تقعر ق(س) من خلال المماسات

منحنى ق(س) مقعر للأعلى ∀ س ∈ ح لأنه يقع فوق جميع مماساته في هذا المجال

لا يوجد نقاط انعطاف

⑤ إذا كان ق′(-٢) = ق′(١) = ق′(٧) = ٠ ، جد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س) والقيم القصوى ونوعيتها.

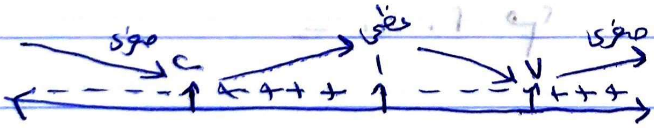
نلاحظ أن المنحنى المرسوم هو ق′(س) ، لا نستطيع إيجاد تزايد وتناقص ق(س) من إشارة ق′(س)

من ق′(س) نحدد القيم القصوى لـ ق(س) ثم نجد فترات التزايد والتناقص

ق′(-٢) = ٠ ، ق″(-٢) > ٠ ⇐ ق(-٢) قيمة صغرى محلية.

ق′(١) = ٠ ، ق″(١) < ٠ ⇐ ق(١) قيمة عظمى محلية

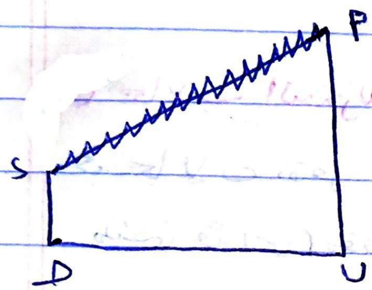
ق′(٧) = ٠ ، ق″(٧) > ٠ ⇐ ق(٧) قيمة صغرى محلية



ق(س) متناقص ∀ س ∈]-∞، -٢] ، [١، ٧]

ومتزايد ∀ س ∈ [-٢، ١] ، [٧، ∞[.

س 13 : أراد مزارع تسييج أرضه التي على شكل شبه منحرف تقع على حافة نهر كما بالشكل المقابل، فإذا كان أحد الضلعين المتوازيين = ٣ أمثال طول الضلع الآخر فإذا كان لدى المزارع ٤٠٠ م من السياج أوجد أكبر مساحة يمكن لهذا المزارع أن يحيطها بهذا السياج علمًا أن الحافة المقابلة للنهر لا تحتاج لسياج



نفرض أن طول د جـ = س ⇐ أ ب = ٣ س

ب جـ = ص

م = $\frac{١}{٢}$ (٣ س + س) (ص) = ٢ س ص

لكن طول السياج = ٤٠٠

⇐ س + ص + ٣ س = ٤٠٠

ص = ٤٠٠ − ٤ س

∴ م = ٢ س (٤٠٠ − ٤ س) = ٨٠٠ س − ٨ س²

م' = ٨٠٠ − ١٦ س = ٠ ⇐ س = ٥٠

∴ أكبر مساحة عندما س = ٥٠ م

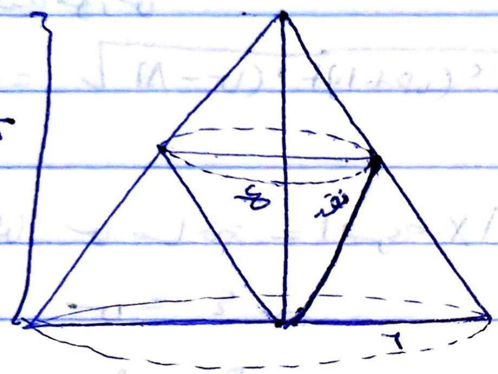
أكبر مساحة = ٨٠٠ (٥٠) − ٨ (٥٠)²

= ٤٠٠٠٠ − ٢٠٠٠٠

= ٢٠٠٠٠ م²

س١٦ : اوجد ابعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث يقع رأسه عند مركز قاعدة المخروط .

حجم المخروط الداخلي = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



ح = $\frac{١}{٣}$ نق² π ع

ح = $\frac{\pi}{٣}$ نق² (١٢ - نق)

ح = $\frac{\pi}{٣}$ (١٢ نق² - ٢ نق³)

ح' = $\frac{\pi}{٣}$ (٢٤ نق - ٦ نق²) = ٠

⇐ ٦ نق (٤ - نق) = ٠

نق = ٠   نق = ٤

من التشابه $\frac{١٢}{٦} = \frac{١٢ - ع}{نق}$

⇐ ٢نق = ١٢ - ع

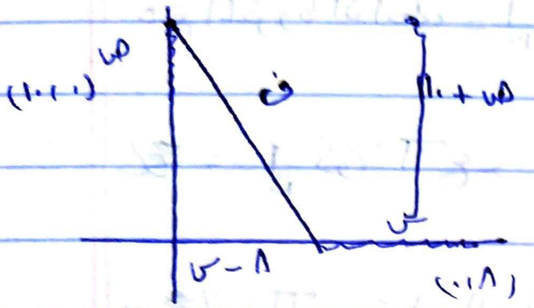
⇐ ع = ١٢ - ٢نق

أكبر حجم عندما نق = ٤

ع = ١٢ - ٨ = ٤

س١٥ : من النقطة (٨،٠) تحرك جسم على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤ م/ث ، وفي نفس اللحظة انطلق من النقطة (٠،١٠) جسم ثاني على محور الصادات مبتعداً عن نقطة الأصل بسرعة ٢ م/ث ،

أوجد أقل مسافة بين الجسمين



من فيثاغورس

ف = √((٨ − س)² + (١٠ + ص)²)

لكن س مسافة = السرعة × الزمن

س = ٤ن

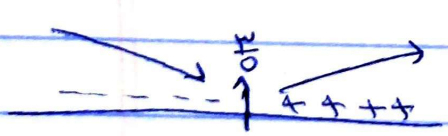
ص = ٢ن

∴ ف = √((٨ − ٤ن)² + (١٠ + ٢ن)²)

ف̀ = [٢(٨ − ٤ن) × −٤ + ٢(١٠ + ٢ن) × ٢] / [٢√((٨ − ٤ن)² + (١٠ + ٢ن)²)] = ٠

−٣٢ + ١٦ن + ٢٠ + ٤ن = ٠ ⟸ ٢٠ن = ١٢ ⟸ ن = ٣/٥

∴ أقل مسافة عندما ن = ٣/٥ = ٠,٦



إشارة ف̀

ف = √((٨ − ٢,٤)² + (١٠ + ١,٢)²)