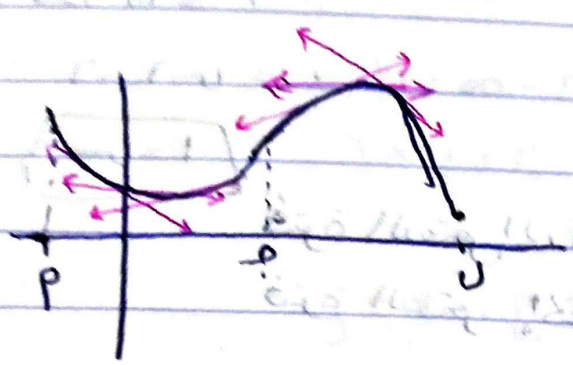
(فترات مفتوحة)

التقعر

إيجاد فترات التقعر :

- التعريف (الرسم البياني للاقتران)
- المشتقة الثانية (قـ(س) إشارتها)



تعريف التقعر :

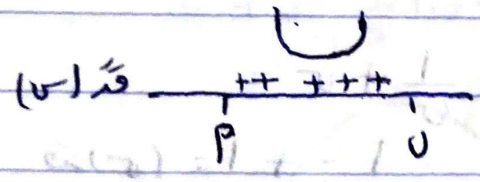
يكون ق(س) مقعر للأعلى إذا وقع منحناه فوق جميع مماساته

يكون ق(س) مقعر للأسفل إذا وقع منحناه تحت جميع مماساته.

اختبار المشتقة الثانية :

إذا كان ق(س) متصل على [أ، ب]

① قـ(س) > ٠، ∀ س ∈]أ، ب[يكون ق(س) مقعر للأعلى



② قـ(س) < ٠، ∀ س ∈]أ، ب[يكون ق(س) مقعر للأسفل

③ قـ(س) = ٠

لا توجد فترات تقعر لا للأعلى ولا للأسفل

مثال (١) ص (٧٦) :

$د(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$ $\quad س \in]-٢ ، ٥[$

د(س) متصل $\forall س \in]-٢ ، ٥[$ لأنه كثير حدود.

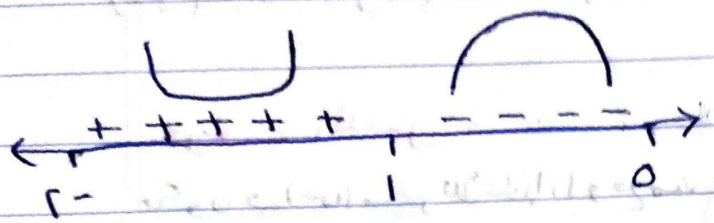
$د'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

$د''(س) = ٦ - ٦س$

$د'(س) = ٠$

$٦ - ٦س = ٠$

$\therefore س = ١$



فترة التقعر إلى الأعلى $]-٢ ، ١[$

فترة التقعر إلى الأسفل $]١ ، ٥[$

مثال (٢) : $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س}$ $\quad س \neq ٠$

د(س) متصل لأنه معرف على مجاله $\quad ح \setminus \{٠\}$

$د(س) = \frac{س^{٢}}{س} + \frac{١}{س}$

$= س + \frac{١}{س}$

$د'(س) = ١ + \frac{-١}{س^{٢}}$

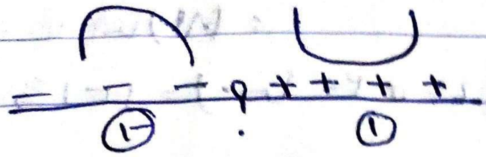
$د''(س) = \frac{+ ١ \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}} = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

$د'(س) \neq ٠$

$\frac{٢}{س^{٣}} \neq$ صفر

$٢ \neq ٠$

عندما يكون البسط ثابت في أي كسر لا يكون = ٠



قً(س) = خ.م

$س^3 = ٠$

س = ٠ ∉ {٠}

$قً(١) = \frac{٢}{١} = (+)$

$قً(-١) = \frac{٢}{(-١)^3} = (-)$

فترة التقعر للأسفل]-∞ ، ٠[

فترة التقعر للأعلى]٠ ، ∞[

مثال (٣): ق(س) = لو_هـ جتا س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

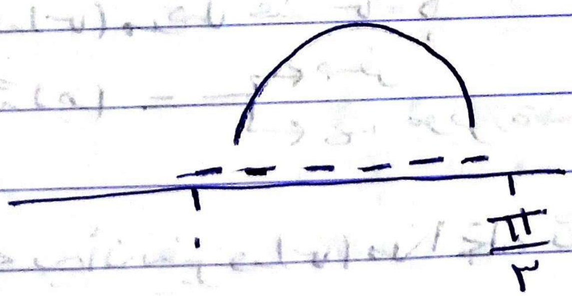
ق(س) متصل لأنه معرف على مجاله (لأنه في الربع الأول)

$قَ(س) = \frac{-جا س}{جتا س} = -ظا س$

$قً(س) = -قا^2 س$

$-قا^2 س \neq ٠$ ∴ $قا^2 س = \frac{1}{جتا^2 س} \neq ٠$

لا يوجد أصفار قً(س)



ق(س) مقعر للأسفل من]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

مثال : ص(١١) :

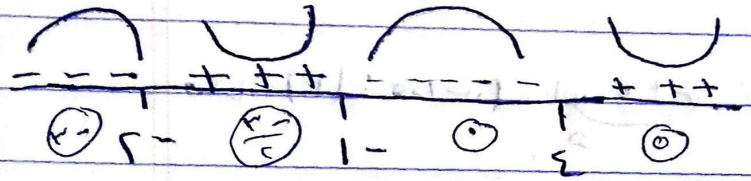
(ج) $ق'(س) = (س^3 - 2س - 4)(س + 2)$

$ق'(س) = 0$

$(س^3 - 2س - 4)(س + 2) = 0$

$(س + 1)(س - 4)(س + 2) = 0$ ∴

$س = -1$ $س = 4$ $س = -2$



$ق'(-٣) =$

$ق'(-\frac{٣}{٢}) =$

$ق'(-٢) =$

نقطة الانعطاف :

$(ج، ق(ج))$

شروط نقطة الانعطاف

① $ق(س)$ متصل عند $س = ج$

② $ق''(ج) = $ صفر / غ. موجودة

③ يجب أن يغير $ق(س)$ اتجاه تقعره حول $س = ج$

($ق''(س)$ تغير من إشارتها حول $س = ج$)

$- - - \; + + +$ أو $+ + + \; - - -$ (حول ج)

النقطة الحرجة

$(P، ق(P))$

① P ∈ مجال ق

ق معرف عند $س = P$

② $ق'(P) = $ صفر / غ. م

قيمة قصوى

① P ∈ مجال ق

② $ق'(P) = $ صفر / غ. م

③ $ق'(س)$ تغير إشارتها حول $س = P$

حالة خاصة من نقطة الانعطاف

(ه، ق(ه)) انعطاف

④ ق(ه) = صفر

تسمى عندها نقطة انعطاف أفقي

ق(ه) = ظاهـ

. = ظاهـ

= م يوجد مماس أفقي

مثال (٤) ص (٧٧):

ق(س) = ٢ جاس جتاس]π، ٠[

ق(س) متصل ∀ س ∈]π، ٠[لأنه حاصل ضرب اقترانين دائرين متصلين

ق(س) = ٣ جتاس × جتاس − جاس × ٣ جاس

= ٣ جتا٢س − ٣ جا٢س

= ٣ (جتا٢س − جا٢س)

= ٣ جتا٢س

ق(س) = −٣ جا٢س × ٢

ق(س) = −٦ جا٢س

ق(س) = صفر

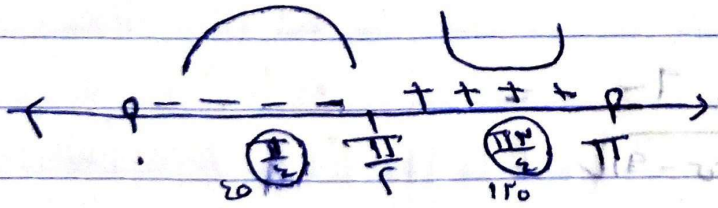
−٦ جا٢س = ٠

جا٢س = ٠

٢س = ٠ ← س = ٠ ✗

٢س = π ← س = π/٢ ✓

٢س = ٢π ← س = π ✗



ق(π/٤) = −٦ جا٢ × π/٤ = −٦ × جا π/٢ = −٦ × ١ = −٦

ق(٣π/٤) = −٦ × جا٢ × ٣π/٤ = −٦ × جا ٣π/٢ = −٦ × −١ = ٦ ⊕

= −٦ × ١

= −٦ ≠ ٠

نقطة الانعطاف (π/٢، ق(π/٢)) ← (π/٢، ٠)

ق(π/٢) = ٢ جتا ٢ × π/٢

= ٢ × −١ = −٢ ليست نقطة انعطاف أفقي

خلال هذه النقطة انعطاف أفقي

مثال (٩) : $د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ $\quad]-٢, ٣[$

$د(س)$ معرفة لأنه معرف على مجاله

$٩ - س^٢ \geq ٠$

$٩ - س^٢ = ٠$

$س^٢ = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$

المجال $]-٢, ٣[$

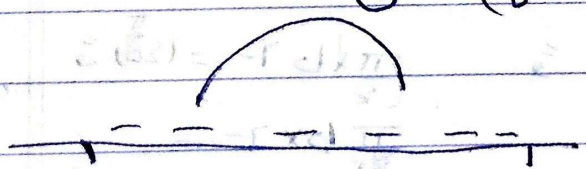
$د(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

$د'(س) = \frac{(-١ \times \sqrt{٩ - س^٢}) - (\frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^٢}} \times -س)}{٩ - س^٢}$

$= \frac{-\sqrt{٩ - س^٢} - \frac{س^٢}{\sqrt{٩ - س^٢}}}{٩ - س^٢} \times \frac{\sqrt{٩ - س^٢}}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

$= \frac{-(٩ - س^٢) - س^٢}{(٩ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{-٩ + س^٢ - س^٢}{(٩ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{-٩}{(٩ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

$\frac{-}{+} = \ominus$



$د(س)$ متحرك خلال $]-٢, ٣[$

ولا يوجد نقاط انعطاف.

مثال (٦) ص (٧٦) :

ق(س) = $س^٤ - ٢س^٣$

ق(س) متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢$

$ق'(س) = ١٢س^٣ - ١٢س$

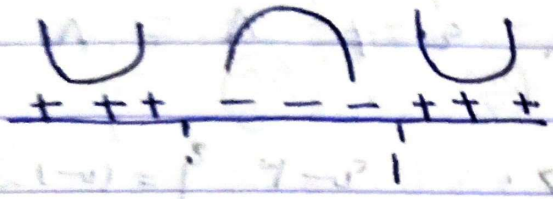
ق'(س) = ٠

$\frac{١٢س^٣}{١٢} - \frac{١٢س}{١٢} = \frac{٠}{١٢}$

$س^٣ - س = ٠$

$س(س-١) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ١$



نقط الانطفاف : (٠، ق(٠)) = (٠، ٠)

(١، ق(١)) = (١، -١)

$ه = ١،٠$

زوايا الانطفاف : $ق(ه) = ظاه$

$ق(١) = ٠ = ظاه$

ه = ٠ زاوية انطفاف

(٠،٠) نقطة انطفاف أفقي

$ق(١) = ٤ - ٦ = -٢$

$-٢ = ظاه$

$ه = ظا^{-١}(-٢)$

زاوية الانطفاف الثانية

$ظاه = \frac{جا ه}{جتا ه}$

$٠ = \frac{جا}{جتا}$

لإيجاد زوايا الانطفاف:

لكل نقط الانطفاف (جـ، ق(جـ))

$ق(س) = ظاه$

$ق(جـ) = ظاه$

زاوية الانطفاف

مثال (٦) ص (٧٦) :

$ق(س) = س^٤ - ٢س^٣$

ق(س) متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢$

$\boxed{ق'(س) = ١٢س^٣ - ١٢س}$

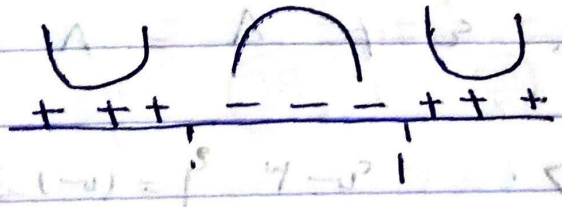
$ق'(س) = ٠$

$\frac{١٢س^٣}{١٢} - \frac{١٢س}{١٢} = \frac{٠}{١٢}$

$س^٣ - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ١$



نقط الانعطاف : $(٠، ق(٠)) \leftarrow (٠، ٠)$

$(١، ق(١)) \leftarrow (١، -١)$

$ه = ٠، ١$

زوايا الانعطاف : $ق(ه) = ظاه$

$ق(٠) = ٠ = ظاه$

$ه = ٠$ زاوية انعطاف

$(٠، ٠)$ نقطة انعطاف أفقي

$ق(١) = ٤ - ٦ = -٢$

$-٢ = ظاه$

$ه = ظا^{-١}(-٢)$

زاوية الانعطاف الثانية

$ظاه = \frac{جا ه}{جتا ه}$

$= \frac{جا}{جتا} = ٠$

لإيجاد زوايا الانعطاف:

لتكن نقط الانعطاف $(ج، ق(ج))$

$ق(س) = ظاه$

$ق(ج) = ظاه$

ه زاوية الانعطاف

مثال(٧) ص(٧٨):

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & ٠ < س \leq ٢ \\ س^٣ & ٢ < س < ٤ \end{cases}$$

متصل في الاتصال

$س^٢$ متصل لأن $\in]٠، ٢]$ لأنه كثير حدود

$س^٣$ متصل لأن $\in]٢، ٤[$ لأنه كثير حدود

$د(٢)$ يوجد نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٢$ (نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٢^+$ = نهاية $د(س)$ عندما $س \to ٢^-$)

$د(٢)^٢ = (٢)^٢ = ٨$

$٨ = ٨ \neq ٤$ ∴ غير متصل عند $س = ٢$

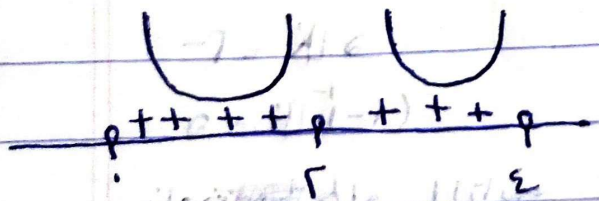
$$هـ(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ٢ < س < ٤ \\ ٤ & ٤ \leq س < ٥ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س & ٠ < س < ٢ \\ ٢ & ٢ < س < ٤ \\ ٤ & ٤ \leq س < ٥ \end{cases}$$

$س = ٠$ ∉ $]٠، ٢[$ عندما $س > ٢$

$٢ \neq ٠$

$هـ(س)$ متصل لأعلى $]٠، ٢[$ ، $]٢، ٤[$



تمارين ص (٨١):

① $ق(س) = جا س - س$ $\quad س \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$ق(س)$ متصل لأنه قابل للاشتقاق

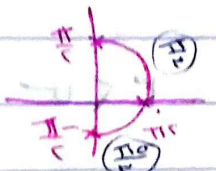
$ق'(س) = جتا س - 1$

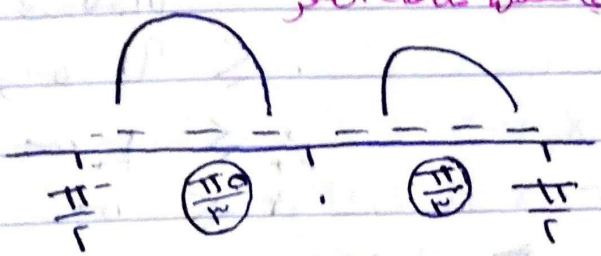
$ق'(س) = 0$

$جتا س - 1 = 0$

$جتا س = 1$ ... هـ.د

$س = 0$ $\quad$ $س = \pi$ هي نفسها مكانة الصفر





$ق'(\frac{\pi}{3}) = جتا \frac{\pi}{3} - 1$

$= \frac{1}{2} - 1$

$= -$

$ق'(\frac{5\pi}{3}) = جتا \frac{5\pi}{3} - 1$

$= \frac{1}{2} - 1$

$= -$

⑤ $ق(س) = 4س^2 - س^4 + س$ $\quad س \in]0, 4[$

$ق(س)$ متصل $\forall س \in]0, 4[$ لأنه كثير حدود

$ق'(س) = 12 س^2 - 4 س^3 + 1$

$ق'(س) = 24 س - 12 س^2$

$ق'(س) =$ صفر

$24 س - 12 س^2 = 0$

$\frac{24}{12} س - \frac{12}{12} س^2 = \frac{0}{12}$

$2 س - س^2 = 0$

$س(2 - س) = 0$

$س = 0$ $\quad$ $س = 2$

$س \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

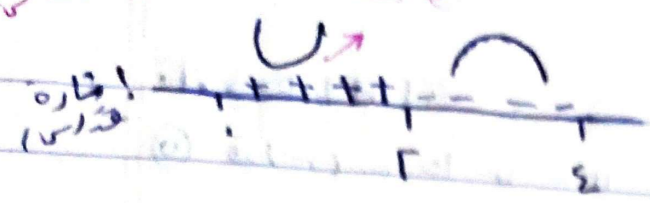
الحالة بين الاتصال والاشتقاق

$ق$ متصل ← قابل للاشتقاق

$ق$ غير قابل للاشتقاق ← $ق$ متصل

$ق$ غير متصل ← $ق$ غير قابل للاشتقاق

ما بين أكثر من عكس إشارة مطلق س



نقطة الانقطاف (٢، ق(٢))
(٢، ١٨)

س > ٣

③ ق(س) = (س - ٣)^{٣/٢}

ق'(س) = ٣/٢ (س - ٣)^{١/٢}

ق''(س) = ٣/٤ (س - ٣)^{-١/٢}

= ٣ / ٤√(س - ٣)

ق''(س) = ٠

٣ / ٤√(س - ٣) ≠ ٠

ق(س) معرف على]٣، ∞[

ق(س) متصل ∀ س > ٣ لأنه معرف على مجاله

ق''(س) = ٢(س - ٣)^{٣/٢} / ٢√(س - ٣)^{٣}

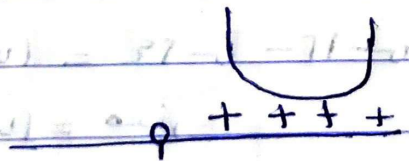
= ٢(س - ٣)^{٣/٢} / ٢(س - ٣)^{٣/٢}

= ١

ق''(س) = ١/٢ × ٣/٢ (س - ٣)^{-١/٢}

= ٣ / ٤√(س - ٣)

⊕ / ⊕ ⇒ ⊕



ق(س) مقعر للأعلى]٣، ∞[

٩ - س^٢ > ٠

٩ - س^٢ = ٠

٩ = س^٢ ← س = ± ٣

-٥ - ٣ > -٥

-س > -٥ / -١

س > ٥

٥) $ق(س) = جا\frac{س}{٢}$ على $[0, 2\pi]$

$ق(س)$ متصل لأنه اقتران دائري

$ق'(س) = جتا\frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$ق''(س) = -جا\frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤} جا\frac{س}{٢}$

$ق'(س) = ٠$

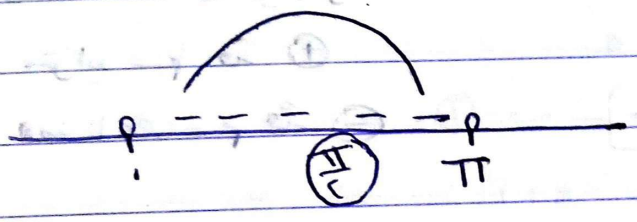
$-\frac{١}{٤} جا\frac{س}{٢} = ٠$

$-\frac{١}{٤}$ $-\frac{١}{٤}$

$جا\frac{س}{٢} = ٠$

$\frac{س}{٢} = ٠^{ج} \Leftarrow س = ٠$ ∈ طرف فترة

$\frac{س}{٢} = \pi^{ج} \Leftarrow س = ٢\pi$ ∉ $]0, 2\pi[$



$ق''(\frac{\pi}{٢}) = -\frac{١}{٤} جا\frac{\frac{\pi}{٢}}{٢}$

$= -\frac{١}{٤} \times جا\frac{\pi}{٤}$

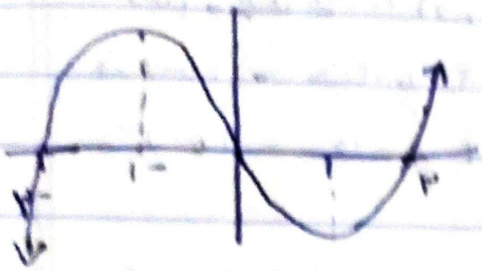
$= -\frac{١}{٤} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \ominus$

$ق(س)$ مقعر إلى الأسفل عند $]0, 2\pi[$

ولا يوجد نقاط انعطاف

تحديد فترات التزايد والتناقص والتعرف من خلال الرسم البياني:

مثال (٨) ص (٧٩):

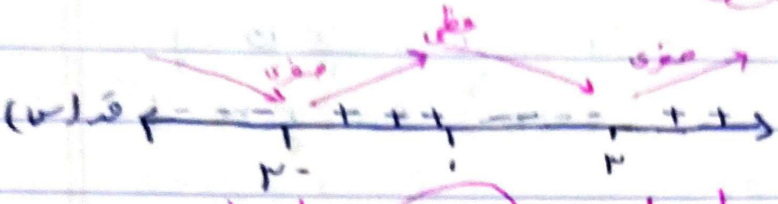


خطوات
إشارة المشتقة الأولى
وإشارة مشتقة الأولى

إشارة المشتق ق (س)

فوق محور السينات ق ⊕

تحت محور السينات ق ⊖



خلال تزايد وتناقص

ق (س) المشتق في الرسمة

ق متزايد ⟺ ق ⊕

ق متناقص ⟺ ق ⊖

فترات التزايد $[-٢، ٠] \cup [٢، \infty[$

فترات التناقص $]-\infty، -٢] \cup [٠، ٢]$

ق(-٢) صغرى محلية

ق(٠) عظمى محلية

ق(٢) صغرى محلية

ق مقعر للأعلى $]-\infty، -١[\cup]١، \infty[$

ومقعر للأسفل $]-١، ١[$

نقط الانعطاف $(-١، ق(-١))$

$(١، ق(١))$

مثال ٨ (٢) :

$ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د$

$(٢ ، ٥^{\circ})$

$ق(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + د$

$\boxed{د = ٥}$

نقطة انعطاف أفقي $(٢ ، ١)$ ← يحقق معادلة $ق(س)$ ، $ق'(٢) = ٠$ ، $ق''(٢) = ٠$

$ق(٢) = ١$

$١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ٥$

$\boxed{-٤ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ}$ ... ①

$ق'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ$

$\boxed{٠ = ١٢أ + ٤ب + جـ}$ ... ②

$ق''(س) = ٦أ س + ٢ب$

$\boxed{٠ = ١٢أ + ٢ب}$ ... ③

بحل ① + ② لحذف جـ

$$\begin{array}{r} -٢ = ٤أ + ٢ب + ٥ \\ ٠ = ١٢أ + ٤ب + ٥ \\ \hline \end{array} \quad \text{بضرب} \times -٤$$

$\boxed{٢ = ٨أ + ٢ب}$ ... ④

بحل ③ + ④ لحذف ب

$$\begin{array}{r} ٠ = ١٢أ + ٢ب \\ ٢ = ٨أ + ٢ب \\ \hline \end{array} \quad \text{بضرب} \times -١$$

$$\frac{-٤}{-٤} = \frac{-٤أ}{-٤}$$

$$أ = \frac{-١}{٢}$$

بتعويض $أ = -\frac{1}{2}$ في ④

$$2 = 8أ + 2ب$$

$$2 = 8 \times -\frac{1}{2} + 2ب$$

$$2 = -4 + 2ب$$

$$6 = 2ب$$

$$\boxed{ب = 3}$$

بتعويض $أ = -\frac{1}{2}$ $ب = 3$ في ③

$$0 = 12أ + 4ب + جـ$$

$$0 = 12 \times -\frac{1}{2} + 4 \times 3 + جـ$$

$$0 = -6 + 12 + جـ$$

$$0 = 6 + جـ$$

$$\boxed{-6 = جـ}$$

$$د(س) = -\frac{1}{2} س^3 + 3س^2 - 6س + 5$$

س ∈ [صفر، ٢π] : ⑤ د(س) = هـ^س جتاس

د(س) متصل ∀ س ∈ [صفر، ٢π] لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

(أسي طبيعي و دائري)

$$د'(س) = هـ^س جتاس - هـ^س جاس = هـ^س (جتاس - جاس)$$

$$د''(س) = هـ^س (جتاس - جاس) + هـ^س (-جاس - جتاس)$$

$$= هـ^س جتاس - هـ^س جاس - هـ^س جاس - هـ^س جتاس$$

$$= -2 هـ^س جاس$$

$$=$$

$$9 = \frac{1}{1}$$

ق′(س) = صفر

$-\frac{2}{ه^{س}}$ جا س = $\frac{1}{ه^{س}}$

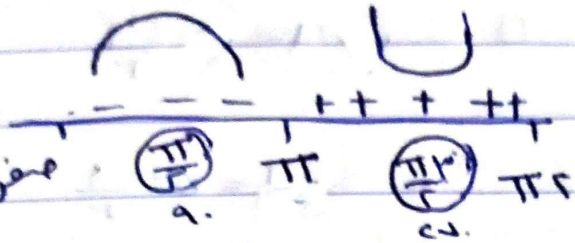
إما $ه^{س} \neq 0$

أو جا س = 0

س = 0

π

2π



ق′ $(\frac{\pi}{2})$ = $-2ه^{-\frac{\pi}{2}}$ جا 90

= $-2ه^{-\frac{\pi}{2}} \times 1$

= $-2 \times ه^{-\frac{\pi}{2}}$

⊖ × ⊕

= ⊖

ق′ $(\frac{3\pi}{2})$ = $-2ه^{-\frac{3\pi}{2}}$ جا $\frac{3\pi}{2}$

= $-2ه^{-\frac{3\pi}{2}} \times -1$

= $2ه^{-\frac{3\pi}{2}}$ ⊕

فترة التقعر إلى الأعلى $]\pi, 2\pi[$

فترة التقعر للأسفل $]0, \pi[$

نقطة الانعطاف $(\pi, ق(\pi))$

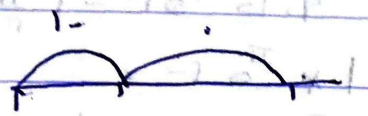
① $ق(س) = \begin{cases} [س - \frac{1}{2}س - 1] & 1 < س \leq 3 \\ س^2 & 3 < س < 5 \end{cases}$

عبارة تعريف $[س - \frac{1}{2}س - 1]$

$س - \frac{1}{2}س - 1 = 0$

$\frac{1}{2}س = 1$

$س = 2$



$ل = \frac{1}{|ق''(2)|} = \frac{1}{|\frac{1}{2}|} = 2$

$ق(س) = \begin{cases} 1- & 1 < س < 3 \\ 0 & س = 3 \\ س^2 & 3 < س < 5 \end{cases}$

$ق(3) \stackrel{؟}{=} \lim_{س \to 3^-} ق(س) \stackrel{؟}{=} \lim_{س \to 3^+} ق(س)$

$0 \neq 1- \neq 9$ ∴ غير متصل عند $س = 3$

$ق(س)$ متصل في الفترات المفتوحة لأنه كثير حدود

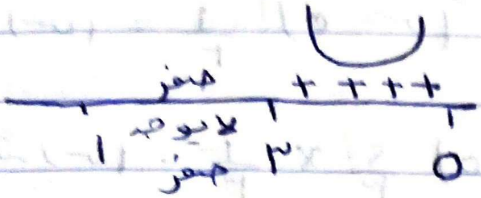
$ق(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 2 \\ 3س & 2 < س < 5 \\ \text{غير معرف} & 0,1,2,3 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 3 \\ 6س & 3 < س < 5 \\ \text{غير معرف} & 0,1,3 \end{cases}$

ق(س) = ٠ | ٦س = ٠

|س| < ٢ | س = ٠ ∈]٠،٢[

٠ = ٠

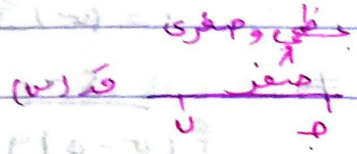


فترة التقعر للأعلى]٠،٣[

د(س) = P اقتران ثابت

يوجد قيم قصوى عظمى وصغرى

لا توجد فترات تقعر للأعلى ولا للأسفل لـ د(س)



س٢ : P) د(س) = س^{٣} + س

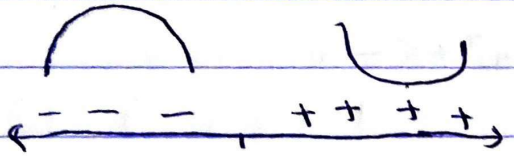
د(س) متصل لأنه كثير حدود

ق(س) = ٣س^{٢} + ١

ق'(س) = ٦س

٦س = ٠

س = ٠



(٠، د(٠)) نقطة انحطاف

(٠،٠)

ب) د(س) = جتاس س ∈]٠،٢π[

د(س) متصل لأنه دائري

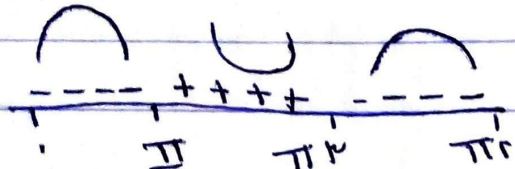
ق(س) = - جاس

ق'(س) = - جتاس

- جتاس = ٠

جتاس = ٠

س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$



نقاط الانحطاف $(\frac{\pi}{٢}، د(\frac{\pi}{٢}))$ ⇐ $(\frac{\pi}{٢}، ٠)$

$(\frac{٣\pi}{٢}، د(\frac{٣\pi}{٢}))$ ⇐ $(\frac{٣\pi}{٢}، ٠)$

ب) $ق(س) = \sqrt[3]{٥ - س}$

$ق(س)$ متغلا لأنه معرف على مجال لـ $ح$

$ق(س) = (٥ - س)^{\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{1}{3} (٥ - س)^{-\frac{2}{3}} \times -1$

$ق'(س) = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} (٥ - س)^{-\frac{2}{3}} \times -1$

$= \frac{-2}{9} \times \frac{1}{(٥ - س)^{\frac{2}{3}}}$

$ق'(س) = ٠$

$\frac{-2}{9(٥ - س)^{\frac{2}{3}}} \neq ٠$ لأن البسط ثابت

$ق'(س)$ غ.م

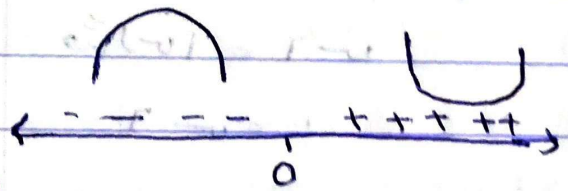
$٥ - س = ٠$

$\boxed{س = ٥}$

$\frac{-2}{9(٥ - س)^{\frac{2}{3}}}$ = $\frac{-}{\text{إشارة خطي}}$

إشارة خطي: $٥ - س$

	$س$	٥
نفس عكس		++ | --



Note:

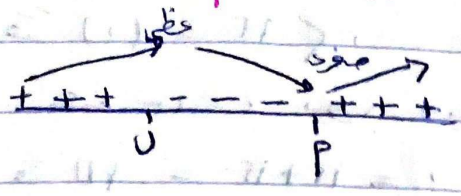
إذا كان الجذر فردي

نفس إشارة الخطي

وإذا كان زوجي فهو دائماً موجب

$(٥ ، ق(٥))$ نقطة انعطاف

استخدام اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى :



اختبار المشتقة الأولى لـ ق(س)

خطوات الحل :

① نبحث في الاتصال ق(س)

② نجد ق'(س) = صفر

لـ نأخذ النقاط التي تكون عندها المشتقة الأولى = ٠

ب ، م ، ج

③ نجد ق''(س)

④ ق''(ب) > ٠ ← قيمة صغرى محلية

ق''(م) < ٠ ← قيمة عظمى محلية

ق''(ج) = ٠ أو غ.م

يفشل الاختبار ونعود إلى اختبار المشتقة الأولى

مثال (١٩ صـ ١٨٠) :

إذا كان ق(س) = ٣ س^{٤} − ٨ س^{٣} + ١ س^{٢}

ق(س) متصل لأنه كثير حدود

ق'(س) = ١٢ س^{٣} − ٢٤ س^{٢} + ١٢ س

ق'(س) = ٠

$\frac{١٢ س^{٣}}{١٢} - \frac{٢٤ س^{٢}}{١٢} + \frac{١٢ س}{١٢} = \frac{٠}{١٢}$

س^{٣} − ٢ س^{٢} + س = ٠

س (س^{٢} − ٢ س + ١) = ٠

إما **س = ٠** أو س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠

(س − ١) (س − ١) = ٠ **س = ١**

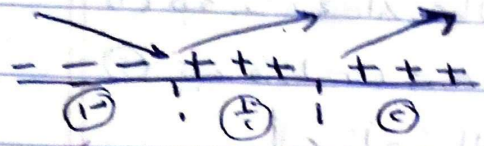
$ق'(س) = ٦س^٢ - ٤٨س + ١٢$

$ق'(٠) = ١٢ > ٠$

عند $س = ٠$ توجد قيمة صغرى محلية وهي $ق(١)$

$ق'(١) = ٦ - ٤٨ + ١٢ = ٠$

بفشل الاختبار ونعود إلى التزايد والتناقص



لا توجد قيم حرجة عند ١

خلال ق(س) = ٢س^٣ - ٢٤س + ١٢ متزايد
إشارة ق'(س) تغيرت من سالب إلى موجب

٣٣ ص(٨٢) : ⓑ $ق(س) = س^٣ + ٦س^٢$

$ق(س)$ متصل $\forall س \in ح$ لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٣س^٢ + ١٢س$

$ق'(س) = ٠ \therefore$

$٣س^٢ + ١٢س = ٠ \therefore$ $\quad س^٢ + ٤س = ٠ \therefore$

$٣س(س + ٤) = ٠ \therefore$ $\quad س(س + ٤) = ٠ \therefore$

$س = ٠ \quad ، \quad س = -٤$

$ق'(س) = ٦س + ١٢$

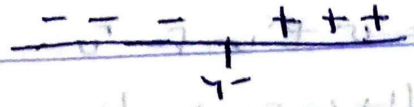
$ق'(٠) = ١٢ > ٠ \therefore$ صغرى محلية

$ق'(-٤) = -١٢ < ٠ \therefore$ عظمى محلية

ⓒ $ق(س) = |س + ٦|$

$س + ٦ = ٠$

$س = -٦$



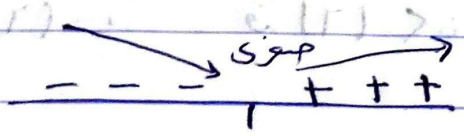
$$ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & ، س \geq -٦ \\ -س - ٦ & ، س < -٦ \end{cases}$$

$ق(س)$ متصل $\forall س \in ح$ لأنه اقتران قيمة مطلقة

$$ق'(س) = \begin{cases} ١ & س > -٦ \\ -١ & س < -٦ \\ غ.م & س = -٦ \end{cases}$$

ق'(-٦) غ.م ⇐ ق (-٦) غ.م

* فشل اختبار المشتقة الثانية



ق(-٦) = ٠ صغرى محلية ~~مطلقة~~ -٦

س٤ : ق(س) = ٢ س^{٢} + س^{٣}

نقطة انعطاف عند س = -١ ⇐ ق'(-١) = ٠

اعطلوبي قيمة/ قيم ٢

ق(س) = ٢ ٢ س + ٣ س^{٢}

ق'(س) = ٢ ٢ + ٦ س

ق'(-١) = ٢ ٢ - ٦

٠ = ٢ ٢ - ٦

٦ = ٢ ٢

٢ = ٢

ق(١) = ٠ ، ٦٠ نقاط حرجة

ق(٦) = ٠

س٥ : (أ) عين إشارة ق'(س)

ق(س) متزايدة على]-∞ ، ٣[فترات التغير مفتوحة

ق(س) متناقصة على]٣ ، ∞[

نقطة الانعطاف (٣ ، ق(٣))

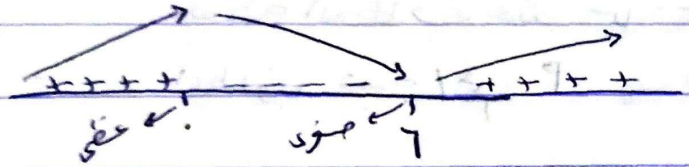
(ب) ق(١) = ٠ ، ق''(١) > ٠ ، عظمى محلية ق(١)

ق(٦) = ٠ ، ق''(٦) < ٠ ، صغرى محلية ق(٦)

(ج)

ق(س) متزايدة في]-∞ ، ٠] ∪ [٦ ، ∞[

ق(س) متناقصة في [٠ ، ٦]



السلوك وبعدها الإشارة

س٦ : ق(س) = ٢ س^٣ + ب س^٢ + ٥ س + ٤

(١ ، ٥) تحقق المنحنى

س = ٢ نقطة انعطاف ونقطة تماس

معادلة المماس عند نقطة الانعطاف ٣ س + ص = ٧

ق(١) = ٢ + ب + ٥ + ٤

٠ = ٢ + ب + ٥ + ٤ ... ①

بتعويض نقطة التماس في معادلة المماس

٧ = ص + (٢ × ٣)

٧ = ص + ٦

ص = ١

(٢ ، ١) تحقق الاقتران ق(س)

$$\text{ص}(-١) = ٨\text{أ} + ٤\text{ب} + ٢\text{ج} + \text{د} = ٠$$

$$١ = ٨\text{أ} + ٤\text{ب} + ٢\text{ج} + \text{د} \quad \cdots ②$$

① + ②

$$-٥ = -\text{أ} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د}$$

$$١ = ٨\text{أ} + ٤\text{ب} + ٢\text{ج} + \text{د}$$

$$-٤ = ٧\text{أ} + ٣\text{ب} + \text{ج} \quad \cdots ③$$

معادلة المماس $٣\text{س} + \text{ص} = ٧$

$$\text{ص} = -٣\text{س} + ٧$$

$$\text{م} = -٣$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{م} = -٣$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٢\text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$$

$$-٣ = ١٢\text{أ} + ٤\text{ب} + \text{ج} \quad \cdots ④$$

$$\text{ق}'(٢) = ٠$$

لأن $(٢، ١)$ نقطة انعطاف

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{أ}\,\text{س} + ٢\text{ب}$$

$$\text{صفر} = ١٢\text{أ} + ٢\text{ب} \quad \cdots ⑤$$

③ + ④

$$-٤ = ٧\text{أ} + ٣\text{ب} + \text{ج}$$

$$-٣ = ١٢\text{أ} + ٤\text{ب} + \text{ج}$$

$$١ = ٥\text{أ} + \text{ب} \quad \cdots ⑥$$

بحل ⑤ + ⑥

$$٠ = ١٢\text{أ} + ٢\text{ب}$$

$$١ = (٥\text{أ} + \text{ب}) \times -٢$$

$0 = 12أ + 24ب + 12ج$

$-2 = -10أ - 24ب - 12ج$

$\frac{-2}{2} = \frac{24ب}{2}$

$\boxed{ب = -1}$

نعوض ب = -1 في ①

$1 = 25أ + ج$

$1 = -5 + ج$

$\boxed{ج = 6}$

نعوض ب = -1 في ②

$-4 = 27أ + 23 + د$

$-4 = -7 + 18 + د$

$\frac{-4}{-11} = \frac{11 + د}{-11}$

$\boxed{د = -15}$

نعوض في ①

$0 = 1 + ج + 5د + هـ$

$0 = 1 + 6 - 15 + هـ$

$0 = -8 + هـ$

$\boxed{هـ = 8}$

$د(س) = -س^3 + 6س^2 - 15س + 8$

إثرائي

س١ : إذا كان ق(س) = ٢ جتا٢س + س٢ ، س ∈]٠ ، π[

جد فترات التقعر إلى الأعلى والأسفل ونقط الانعطاف وزاوية الانعطاف.

ق(س) متصل ∀ س ∈]٠ ، π[لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين دائمًا وكثيرحدود

ق(س) = -٤ جتا س جا س + ٢ س

= -٢ × ٢ جتا س جا س + ٢ س

= -٢ جا ٢س + ٢ س

ق''(س) = -٢ × جتا ٢س × ٢ + ٢

= -٤ جتا ٢س + ٢

ق''(س) = ٠

-٤ جتا ٢س + ٢ = ٠ ∴

$\frac{-٤ \text{ جتا } ٢س}{-٤} = \frac{-٢}{-٤}$

جتا ٢س = $\frac{١}{٢}$

٢س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π
ق''(س)	+	٠	-	٠	+
ق(س)	∪	نقطة انعطاف	∩	نقطة انعطاف	∪

ق''($\frac{\pi}{٦}$) = -٤ × جتا $\frac{\pi}{٣}$ × ٢ + ٢

= -٤ جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ = -٤ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = ٤ (+)

ق''($\frac{\pi}{٢}$) = -٤ × جتا π × ٢ + ٢

= -٤ × -١ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦ (+)

ق''($\frac{٥\pi}{٦}$) = -٤ × جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ × ٢ + ٢

= -٤ جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ٢ = -٤ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = ٤ (+)

ق(س) مقعر للأعلى]٠ ، $\frac{\pi}{٦}$[∪]$\frac{٥\pi}{٦}$ ، π[

ق(س) مقعر للأسفل]$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$[

نقطتا انعطاف ($\frac{\pi}{٦}$ ، ق($\frac{\pi}{٦}$)) ، ($\frac{٥\pi}{٦}$ ، ق($\frac{٥\pi}{٦}$))

($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$) ، ($\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥\pi}{٣}$)

نقطتا انعطاف تفصل ويغير منحنى تقعره عندهما

زاوية الانعطاف هـ = ق($\frac{٥\pi}{٦}$) = ظا هـ

ق($\frac{٥\pi}{٦}$) = ٢م + $\frac{\pi}{٣}$ ظا هـ = ٢م + $\frac{٥\pi}{٦}$ هـ = ظا$^{-١}$(٢م + $\frac{٥\pi}{٦}$) + ٢ن π

هـ : ق($\frac{\pi}{٦}$) = ٢م + $\frac{\pi}{٣}$

ظا هـ = ٢م + $\frac{\pi}{٦}$ هـ = ظا$^{-١}$(٢م + $\frac{\pi}{٦}$) + ٢ن π

مرين: الشكل التالي قـ(س) للاقتران كثير حدود المعرف على ح

وكان قـ(-٥) = قـ(١) = ٠

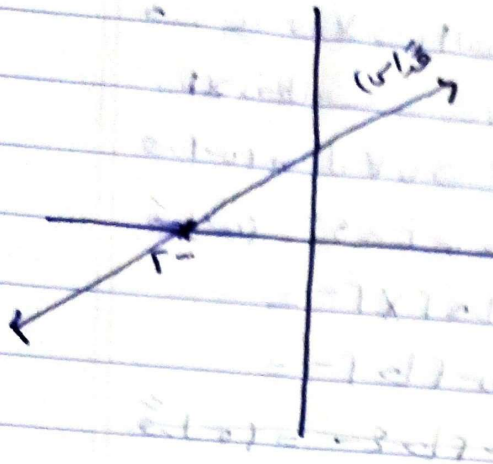
احسبه

① مجالات التغير للأعلى والأسفل لـ قـ

② القيم القصوى لـ قـ(س)

③ التزايد والتناقص لـ قـ

④ قاعدة قـ(س) علماً بأن معادلة المماس لـ ﻣ عند س = ٠ هي ص = ٣ - ١٥س

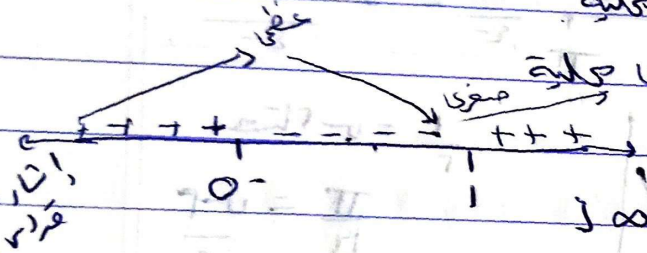


① قـ'(س) متغير للأعلى]-٢، ∞[

ومتغير للأسفل]-∞، -٢[

② قـ'(-٥) > ٠ ⇐ قـ(-٥) عظمى محلية

قـ'(١) < ٠ ⇐ قـ(١) صغرى محلية



③ قـ'(س) متزايد]-∞، -٥[∪]١، ∞[

قـ'(س) متناقص]-٥، ١[

④ قـ'(-٢) = ٠ من الشكل

قـ(-٥) = ٠ معطى

قـ(١) = ٠ معطى

قـ(٠) = ٣

ﻣ = -١٥

قـ'(٠) = -١٥ + ٠ + ٠

قـ(س) من الدرجة الثالثة

قـ(س) = ٢س³ + ٧س² + ٥س + ﻫ

قـ(٠) = ٣ ← ﻫ = ٣

قـ'(س) = ٦س² + ١٤س + ﻫ

قـ'(١) = ٦ + ١٤ + ﻫ = ٠ ... ①

قـ'(-٥) = ١٥٠ - ٧٠ + ﻫ = ٠ ... ②

بالطرح -٨٠ + ١٢ = ٠

ب = ٦

قـ(٠) = ﻫ = ١٥

بالتعويض في ① ٦ + ١٤ - ١٥ = ٠

ب = -٦ ⇐ ٢ب = -١٥

ﻫ = ٣

قـ(س) = ٢س³ - ٦س² - ١٥س + ٣

س٧ : ص(٨٢) :

ق(س) = س³ - ٤س² + ل(س)

(١، ٢) نقطة انعطاف أفقي ← ق(١) = ٢ ، ق''(١) = ٠

ع(س) = ل(س³) الطلوب ق'(١)

عَ(س) = ٣ل(س) لَ(س)

عَ''(س) = ٣ لَ(س) لَ(س) + لَ''(س) × ٣ل(س)

= ٣ لَ(س)² + ٣ل(س) لَ''(س)

عَ''(١) = ٣(لَ(١))² + ٣ل(١) لَ''(١)

= ٣×٤×٦ + (٣×٥×١٢)

= ٨٤٢

ق''(١) = ١ - ٤ + ل''(١)

٣ = -٣ + ل''(١)

ل''(١) = ٥

س٨ : ق(س) متصل في [-٣، ٢]

ق(٠) = ٠ ، ق(١) = ٠ ، ق(-٢) = ٠

ق'(س) > ٠ عندما س < ٠

ق'(س) < ٠ عندما س > ٠

ق'(س) | + + + | ٠ | - - - | ٠ | + + +

-٣ | -٢ | ١ | ٢

ق(١) قيمة صغرى لأن ق'(١) > ٠

ق(-٢) قيمة عظمى محلية لأن ق'(-٢) < ٠

ق'(س) = ٣س² - ١٢س + ل'(س)

ق'(١) = ٣ - ١٢ + ل'(١)

٠ = -٩ + ل'(١)

ل'(١) = ٩

ق''(س) = ٦س - ١٢ + ل''(س)

ق''(١) = ٦ - ١٢ + ل''(١)

٠ = -٦ + ل''(١)

ل''(١) = ٦

عظمى ، صغرى ، عظمى ، صغرى

-٣ ، -٢ ، ١ ، ٢

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [-٣، -٢] ∪ [١، ٢]

ق(س) متناقص [-٢، ١]

ق(-٢) عظمى محلية ، ق(٢) عظمى محلية

ق(١) صغرى محلية

ق(٠) = ق(٠) = نقطة انعطاف

(٠، ٠) ، (١، ١)

ص (٩٠)

س٤ : ق(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠ ، π/٤]

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، π/٤] لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين داخل مجاله

ق(س) = جتا س - جا س

ق(س) = ٠

جتا س - جا س = ٠

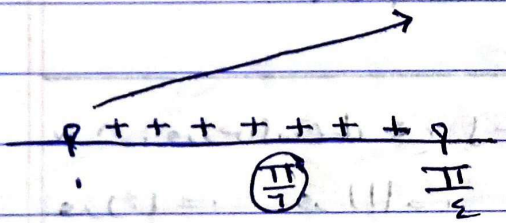
جتا س = جا س

جتا س / جتا س = جا س / جتا س

١ = ظا س

س = π/٤ × ٤ ∈ [٠ ، π/٤]

ق(س) غ.م عند أطراف الفترة ٠ ، π/٤



ق(π/٦) = جتا π/٦ - جا π/٦

= √٣/٢ - ١/٢ = (+)

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [٠ ، π/٤]

س٣ : ق(س) = (س + ١) / (س٢ + ٣)

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح

ق'(س) = [(س٢ + ٣) - ٢س(س + ١)] / (س٢ + ٣)٢

= (س٢ + ٣ - ٢س٢ - ٢س) / (س٢ + ٣)٢

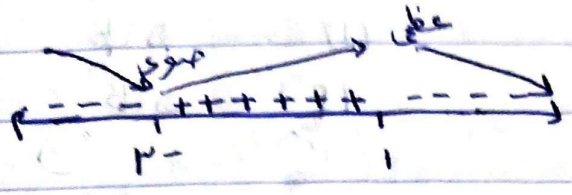
= (-س٢ - ٢س + ٣) / (س٢ + ٣)٢

$= س^2 - 2س + 3 = 0$ ∴

$س^2 + 2س - 3 = 0$ ∴

$(س + 3)(س - 1) = 0$ ∴

$س = -3$ $\quad$ $س = 1$



$ق(س)$ متزايد $[-3, 1]$

متناقص في $]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$

$ق(-3)$ صغرى محلية $= -\frac{1}{6}$

$ق(1)$ عظمى محلية $= \frac{1}{2}$

مثال: $ق(س) = س^3 - 3س^2 - 9س + 5$ $\quad$ $س \in [-2, 6]$

$ق(س)$ متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = 3س^2 - 6س - 9$

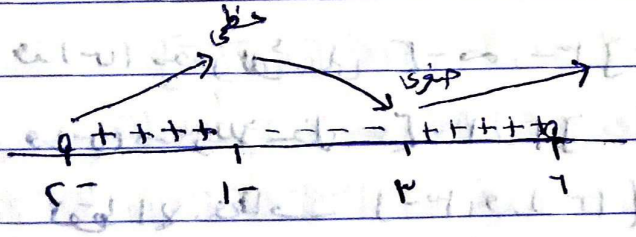
$ق'(س) = 0$ ∴

$3س^2 - 6س - 9 = 0$ ∴

$س^2 - 2س - 3 = 0$ ∴

$(س - 3)(س + 1) = 0$ ∴

$س = 3$ $\quad$ $س = -1$



$ق(-1)$ قيمة عظمى محلية

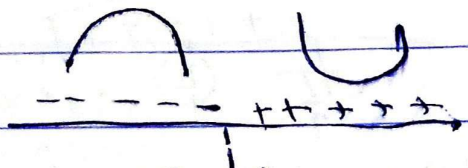
$ق(3)$ قيمة صغرى محلية

$ق'(س) = 6س - 6$

$ق'(س) = 0$ ∴

$0 = 6س - 6$

$س = 1$



فترة التقعر للأعلى $]1, \infty[$

فترة التقعر للأسفل $]-\infty, 1[$

نقط الانعطاف

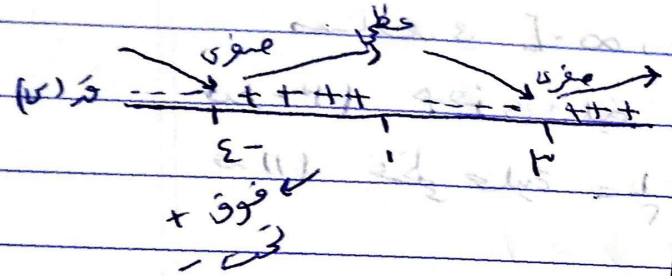
(١، ق(١))

زاوية الانعطاف

ظاهـ = ق(١)

ظاهـ = -١٢

مرة: ① التزايد والتناقص والقيم القصوى



ق(س) متزايد [-٤، ١] ∪ [٣، ∞[

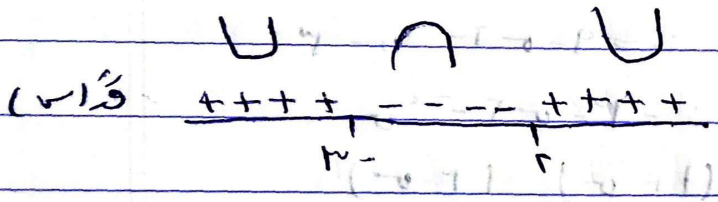
ق(س) متناقص]-∞، -٤] ∪ [١، ٣]

ق(-٤) صغرى محلية

ق(١) عظمى محلية

ق(٣) صغرى محلية

② فترات التقعر والانعطاف



ق(س) مقعر للأعلى]-∞، -٣[∪]٢، ∞[

ق(س) مقعر للأسفل]-٣، ٢[

نقط الانعطاف (-٣، ق(-٣)) ، (٢، ق(٢))

لمعرفة الحصول على إشارة ق'(س) من منحنى ق(س)

ق متزايد ق' > ٠

ق متناقص ق' < ٠

س٨ : $f(x)$ مقعر في الربع الأول

∴ موجب

$f(x)$ متناقص على $]0, \infty[$

$h(x) = 8 - x$

$h'(x) = -1 < 0$

$g(x) = f(x)\,h(x) + h(x)\,f(x)$

$g(x) = (\text{سالب} \times \text{موجب}) + (\text{سالب} \times \text{موجب})$

$= \text{سالب} + \text{سالب} = \text{سالب}$

∴ $g(x)$ متناقص $\forall x \in [0, 8]$

$h(3) = 8 - 3 > 0$

$h(4) = 8 - 4 > 0$

$h(6) = 8 - 6 > 0$

∴ $h(x)$ موجب

أو

	+	+	+	+	−	−	−
	ج		٦	٨			

أو

$h = 8 - x$

$x = 0$

$h = 8$

$(0, 8)$

$h = 0$

$x = 8$

$(8, 0)$

$h(x)$ متناقص

$f(x) > 0$

$f(x)$ مقعر في الربع الأول

$f(x)$ (+)

س٩ : $f(x) = \text{جتا}\,x + h(x) + 3x \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$h(x)$ قابل للاشتقاق أثبت أن $(f + h)(x)$ متزايد في تلك الفترة بدون

$f(x) + h(x) = \text{جتا}\,x + 3x$ نفرض أن $f(x) + h(x) = g(x)$

$g(x) = \text{جتا}\,x + 3x$

$g'(x) = -\text{جا}\,x + 3$

$-\text{جا}\,x + 3 = 0 \quad \therefore -\frac{1}{2}\text{جا}\,x$

$\text{جا}\,x = 3 \times$

$g(x)$ متزايد $[0, \frac{\pi}{2}]$

$g(x) = (f + h)(x)$

+	+	+	+	+	+	+
			$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	

$g'(\frac{\pi}{6}) = -\text{جا}\,\frac{\pi}{6} + 3$

$= -\frac{1}{2} + 3 > 0$ (+)

س١ :

ق(س) يقع في الربع الأول ⇐ ق(س) > ٠

ق(س) متزايد ⇐ ق'(س) > ٠

ق(س) متقعر للأعلى ⇐ ق''(س) > ٠

هـ(س) يقع في الربع الثاني ⇐ هـ(س) < ٠

هـ(س) متناقص ⇐ هـ'(س) < ٠

$$\left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{ق'(س)\,هـ(س) - ق(س)\,هـ'(س)}{(هـ(س))^2}$$

$$= \frac{(+)(+) - (-)(+)}{+}$$

$$= \frac{(+) - (-)}{+} = \frac{+}{+} > ٠$$

∴ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متزايد على [٢، ٥]

س١١ : ق(س) = ٢س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ٤

(٢، -١) صغرى محلية ⇐ ق'(٢) = ٠

(٣، ٠) نقطة انعطاف ⇐ ق''(٣) = ٠

ق'(س) = ٦س^٢ + ٢ب س + جـ

ق'(٢) = ٢٤ + ٤ب + جـ = ٠

ق(٢) = ١٦ + ٤ب + ٢جـ + ٤ = -١

٤ب + ٢جـ = -٢٤ ... ①

ق''(س) = ١٢س + ٢ب

ق''(٣) = ٣٦ + ٢ب = ٠

ب = -١٨

٤(-١٨) + ٢جـ = -٢٤

-٧٢ + ٢جـ = -٢٤

٢جـ = ٤٨

جـ = ٢٤

ق(٠) = ٤

د = ٤

ق(س) = ٢س^٣ - ١٨س^٢ + ٢٤س + ٤

$ق(س) = ٣أ س^٣ + ٢ب س^٢ + جـ س + د$

$ق(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ + د$

$\therefore \quad ١٢أ + ٤ب + جـ + د = ٠$ ... ①

$ق'(س) = ٦أ س + ٢ب$

$ق'(٠) = ٢ب$

$\therefore \quad ٢ب = ٠$

$\boxed{ب = ٠}$

بالتعويض في ① و ②

$-٤ = ٧أ + ٤٠ + ٢جـ$

$\therefore \quad \frac{-٤}{٢} = \frac{٧أ}{٢} + \frac{٢جـ}{٢}$

$-٢ = \frac{٧}{٢}أ + جـ$ ... ③

$١٢أ + ٤ب + جـ = ٠$

$١٢أ + ٤٠ + جـ = ٠$

$١٢أ + جـ = ٠$ ... ④

③ − ④

$-٢ = -\frac{٣}{٢}أ$

$\therefore \quad أ = \frac{٤}{٣}$

$\therefore \quad ١٢ \times \frac{٤}{٣} + جـ = ٠$

$\therefore \quad جـ = -١٦$

$\therefore \quad د = ٢٤$

$\therefore \quad ق(س) = \frac{٤}{٣}س^٣ - ١٦س + ٢٤$

بحل ① + ②

$-٤ = ٧أ + ٤٠ + ٢جـ \Leftarrow ٢ = ٧أ + ٢جـ$

$٠ = ١٢أ + ٤ب + جـ$

$\therefore \quad ٢ = ٧أ + ٢جـ$ ... ③

بفرض $ب = ٠$ في ③

$\frac{٢}{٧} = \frac{٧أ}{٧}$

$\therefore \quad أ = \frac{١}{٣}$

$\therefore \quad ١٢ \times \frac{١}{٣} + ٤٠ + جـ = ٠$

$\therefore \quad جـ = -٤ \Leftarrow د = ٢$

$ق(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - ٤س + ٢$

تطبيقات على القيم القصوى

خطوات الحل :

١- قراءة جيدة

٢- تحديد العلاقات الرياضية في السؤال ← علاقة معلومة لكتابة احد المتغيرات بدلالة الآخر / علاقة المطلوب تشكيلها من السؤال نحدد لها القيم القصوى

٣- كلمات تدل على القيم القصوى

عظمى	صغرى
أكبر	أقل
أبعد	أقرب
أغلى	أرخص (أقل التكاليف)
(زيادة)	(نقصان)

مثال [١] صـ(٨٤) :

نفرض العدد الأول س

نفرض العدد الثاني ص

$س + ص = ٦٠$ ← $ص = ٦٠ - س$

ل = العدد الأول × العدد الثاني

ل = س × ص

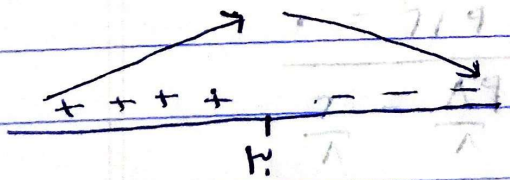
ل = س (٦٠ - س)

$ل = ٦٠س - س^{٢}$

$ل' (س) = ٦٠ - ٢س$

$٠ = ٦٠ - ٢س$

$س = ٣٠$



ل (٣٠) عظمى

$س = ٣٠$ ← $ص = ٦٠ - ٣٠$

$ص = ٣٠$

العددان ٣٠ ، ٣٠

مثال (١) ص (٨٤):

الحجم = ٨

التكلفة أقل ما يمكن

الحجم = $س^{٢} \times ص$

$٨ = س^{٢} ص$ ← العلاقة المعلومة

مساحة متوازي المستطيلات = مساحة قاعدتين + مساحة ٤ أوجه

(الصندوق) $= ٢ \times س^{٢} + ٤ \times س \times ص$

م $= ٢ س^{٢} + ٤ س ص$

$\frac{٨}{س^{٢}} = \frac{س^{٢} ص}{س^{٢}}$ ← $\boxed{ص = \frac{٨}{س^{٢}}}$

$م = ٢ س^{٢} + ٤ س \times \frac{٨}{س^{٢}}$

$م = ٢ س^{٢} + \frac{٣٢}{س}$

$م' = ٤ س - \frac{٣٢}{س^{٢}}$

$م' = ٠$

$٤ س - \frac{٣٢}{س^{٢}} = ٠$

$٤ س = \frac{٣٢}{س^{٢}}$

$٤ س^{٣} = ٣٢$

$س^{٣} = ٨$

$\boxed{س = ٢}$

$ص = \frac{٨}{٤} = ٢$ ← $\boxed{ص = ٢}$

القوانين:

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم = مساحة مربع × ع

متوازي المستطيلات $س^{٢} \times ع$

مساحة متوازي المستطيلات

= ٢ × مساحة القاعدة + ٤ مساحة الوجه الواحد (مستطيل)

نشاط (٢) ص (٨٣) :

الأسفة ← ص = ق(س) = ٢٠ س

الكراسة ← ق(س) = ٢ ع - س

مساحة المنزوه = الطول × العرض

م = س × ق(ع)

م = س × ٢٠ ع

م = ٢٠ س ع

$م = ٢٠ س (٢ - \frac{١}{٢١} س)$

$م = ٤٠ س - \frac{٢٠}{٢١} س^{٢}$

$م' = ٤٠ - \frac{٤٠}{٢١} س$

$٠ = ٤٠ - \frac{٤٠}{٢١} س$

$\frac{٤٠}{٢١} س = ٤٠$

$س = ٢١$

الطول = س = ٢١

$ع = ٢ - \frac{١}{٢١} \times ٢١$

$= ٢ - ١ = ١$

العرض = ق(١) = ٢٠

مساحة أكبر منزوه

الطول × العرض

٢١ × ٢٠

٤٢٠ وحدة مربعة

ق(س + ع) = ق(ع)

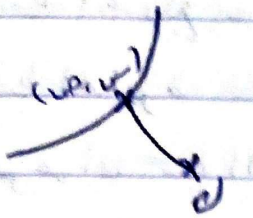
$٢ع - (س + ع) = ٢٠ ع$

$٢ع - س - ع = ٢٠ ع$

$٢ع - س = ٢١ ع$

$٢ - \frac{١}{٢١} س = ع$

مثال (١٣ صـ ٨٥) :



ل (٢ ، ١) ص$_{٢}$ − س$_{٢}$ = ٧

ص$_{٢}$ = ٧ + س$_{٢}$

ف = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

ف = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + (ص - ١٠)^{٢}}$

ف = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤ + ص^{٢}}$

ف = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤ + ٧ + س^{٢}}$

ف = $\sqrt{٢س^{٢} - ٤س + ١١}$

ف$'$ = $\frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ٤س + ١١}}$

$\frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ٤س + ١١}}$ = ٠

٤س − ٤ = ٠

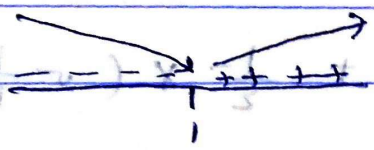
٤س = ٤

س = ١

نعوض س = ١

ف = $\sqrt{٢(١)^{٢} - ٤(١) + ١١}$

ف = $\sqrt{١٠}$



قانون المسافة بين نقطتين

ف = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

مثال (٤):

محيط المربع = ٤ ص

محيط الدائرة = ٢ π نق

نفرض أن محيط الدائرة = س

محيط المربع = ٥٠ - س

م = مساحة المربع + مساحة الدائرة

$= ص^2 + نق^2 \pi$

$= (\frac{س}{\pi 2})^2 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{4} س)^2 \pi$

$= س^2 \frac{3}{\pi 4} + (\frac{3}{4} - \frac{1}{4} س)^2$

$م' = 2 (\frac{3}{4} - \frac{1}{4} س) \times -\frac{1}{4} + س \times \frac{3}{\pi 4}$

$= (\frac{1}{4} س - \frac{3}{4}) \times -\frac{1}{4} + \frac{س}{\pi 2}$

$= (\frac{1}{4} س - \frac{1}{2}) \times -\frac{3}{4} + \frac{س}{\pi 2}$

$0 = -\frac{3}{16} س + \frac{1}{2} + \frac{س}{\pi 2}$

$س = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{16} + \frac{1}{\pi 2}} = \frac{8}{\frac{3\pi + 8}{16\pi}} = \frac{128\pi}{3\pi + 8}$

$ص = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{128\pi}{3\pi + 8}$

$= \frac{3}{4} - \frac{96\pi}{3\pi + 8}$

$= \frac{9\pi + 24 - 384\pi}{4(3\pi + 8)} = \frac{-375\pi + 24}{4(3\pi + 8)}$

$= \frac{-125\pi + 8}{4\pi + 8}$

$نق = \frac{\frac{-125\pi + 8}{4\pi + 8}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-125\pi + 8}{2\pi(4\pi + 8)}$

محيط المربع = ٤ ص

$\frac{50 - س}{4} = \frac{4ص}{4}$

$ص = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} س$

محيط الدائرة = س

$\frac{\pi 2}{س} = \frac{\pi 2}{نق}$

$نق = \frac{\pi 2}{س}$

$= (\frac{1}{2} س - \frac{3}{4}) \times -\frac{3}{4} + \frac{\pi 2}{س}$

$0 = -\frac{9}{16} س + \frac{3}{4} + \frac{\pi 2}{س}$

$س = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16} + \frac{\pi 2}{س}} = \frac{12}{\frac{9\pi + 32}{16\pi}} = \frac{192\pi}{9\pi + 32}$

$ص = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{192\pi}{9\pi + 32}$

$= \frac{1}{4} - \frac{48\pi}{9\pi + 32}$

$= \frac{9\pi + 32 - 192\pi}{4(9\pi + 32)} = \frac{-183\pi + 32}{4(9\pi + 32)}$

$نق = \frac{\frac{-183\pi + 32}{4(9\pi + 32)}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-183\pi + 32}{2\pi(9\pi + 32)}$

$\frac{-183\pi + 32}{2\pi(9\pi + 32)} = \frac{4ص}{4ص}$

$\frac{-183\pi + 32}{2\pi(9\pi + 32)} = \frac{4}{\pi 2}$

$\frac{-183\pi + 32}{9\pi + 32} = 4$

$-183\pi + 32 = 36\pi + 128$

$-219\pi = 96$

$\pi = -\frac{96}{219} = -\frac{32}{73}$

$\frac{-183\pi + 32}{2\pi(9\pi + 32)} = \frac{س}{\pi 2}$

$\frac{-183\pi + 32}{9\pi + 32} = س$

$\frac{-183(-\frac{32}{73}) + 32}{9(-\frac{32}{73}) + 32} = س$

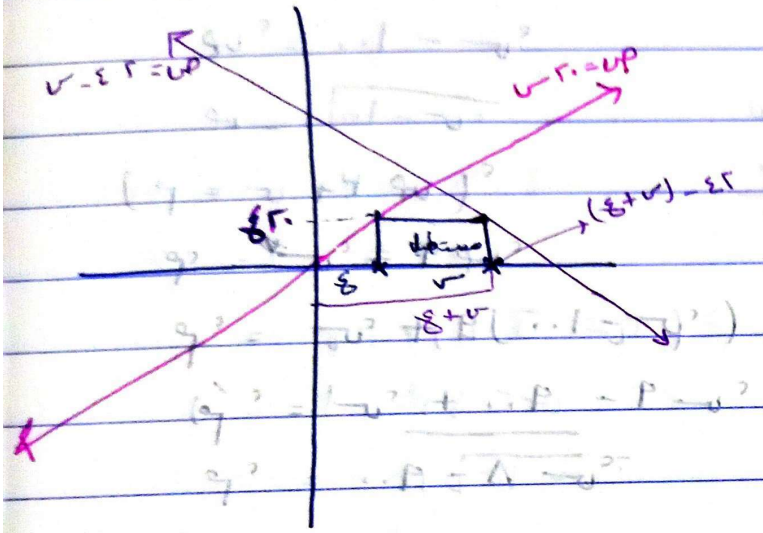
$\frac{\frac{5856}{73} + 32}{-\frac{288}{73} + 32} = س$

$\frac{\frac{8192}{73}}{\frac{2048}{73}} = س$

$س = 4$

نفس نقاط (2) ولكن المسقط

ص 2020 : أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات أما الرأسان الآخران فأحدهما يقع على المستقيم ص = ٢٠ س والآخر على المستقيم ص = ٤٢ - س



نرسم ص = ٢٠ س

(٠،٠)

(١،٢٠)

نرسم ص = ٤٢ - س

س = ٠ ← ص = ٤٢ ← (٠،٤٢)

ص = ٠ ← ٠ = ٤٢ - س ← (٤٢،٠)

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= س × ٢٠ ع

= ٢٠ س ع

لإيجاد علاقة بين ع و س

٤٢ - (س + ع) = ٢٠ ع

٤٢ - س - ع = ٢٠ ع

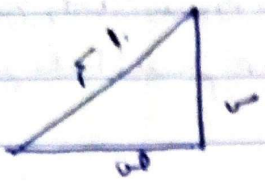
+ ع

$\frac{٤٢ - س}{٢١} = \frac{٢١ ع}{٢١}$

مساحة المستطيل = $٢٠ س \left(\frac{٤٢ - س}{٢١} \right)$

$م = ٢٠ س \left(٢ - \frac{١}{٢١} س \right)$

سؤال: مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم وطول كل من ضلعي القائمة س، ص. جد أكبر قيمة ممكنة للمقدار س + ٢ص



$س^2 + ص^2 = (١٠)^2$

$س^2 + ص^2 = ١٠٠$

$ص^2 = ١٠٠ - س^2$

$ص = \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$ل = س + ٢ص$

$= س + ٢(\sqrt{١٠٠ - س^2})$

$ل' = ١ + \frac{٢ \times -٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^2}}$

$ل' = ٠$

$= ١ - \frac{٢س}{\sqrt{١٠٠ - س^2}}$

$\frac{١}{١} = \frac{٢س}{\sqrt{١٠٠ - س^2}}$

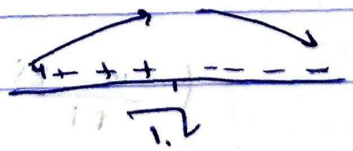
$٢س = \sqrt{١٠٠ - س^2}$ ترسيع الطرفين

$٩س^2 = ١٠٠ - س^2$

$١٠س^2 = ١٠٠$

$س^2 = ١٠$

$س = \sqrt{١٠}$



$ل = س + ٢\sqrt{١٠٠ - س^2}$

$= \sqrt{١٠} + ٢(\sqrt{١٠٠ - ١٠})$

$= \sqrt{١٠} + ٢\sqrt{٩٠}$

$= \sqrt{١٠} + ٢ \times \sqrt{٩} \times \sqrt{١٠}$

$\sqrt{١٠} + ٩\sqrt{١٠} = \sqrt{١٠} + ٦\sqrt{١٠}$

$= ١٠\sqrt{١٠}$

مثال (٥) ص(٨٦) :

المساحة = الطول × العرض

$$\frac{16}{س} = \frac{س ص}{س}$$

$$ص = \frac{16}{س}$$

محيط المستطيل = ٢ س + ٢ ص

$$ل = ٢س + ٢ \times \frac{32}{س}$$

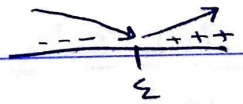
$$ل' = ٢ - \frac{٣٢}{س^٢}$$

$$٠ = ٢ - \frac{٣٢}{س^٢}$$

$$س^٢ = \frac{٣٢}{٢} \leftarrow ٢ = \frac{٣٢}{س^٢}$$

$$س^٢ = 16$$

$$س = \pm 4$$



أقل محيط هو

$$ل = ٢س + \frac{٣٢}{س}$$

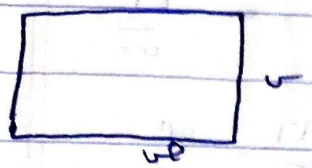
$$= ٢ \times ٤ + \frac{٣٢}{٤}$$

$$= ٨ + ٨ =$$

$$ل = 16 \text{ م}$$

تمارين ص (٨٧) :

س ٤ : $\frac{٢س}{٢} + \frac{٢ص}{٢} = \frac{٨٠}{٢}$ محيط المستطيل = ٨٠



$س + ص = ٤٠$

$ص = ٤٠ - س$

$م = س ص$

$م = س (٤٠ - س)$

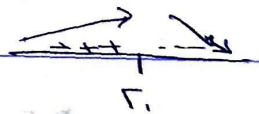
$م = ٤٠ س - س^{٢}$

$م' = ٤٠ - ٢س$

$٠ = ٤٠ - ٢س$

$٢س = ٤٠$

$س = ٢٠$



$م = س (٤٠ - س)$

$= ٢٠ (٤٠ - ٢٠)$

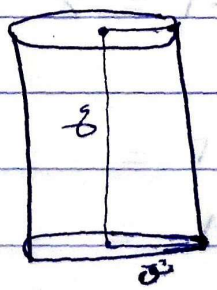
$= ٢٠ \times ٢٠$

$= ٤٠٠ م^{٢}$

س ٤ : حجم الأسطوانة = ١٩٢π سم^{٣}

تكلفة صنع الجوانب ك

تكلفة صنع القاعدة ٣ ك



المساحة الكلية للأسطوانة = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

$= \pi$ نق^{٢} + الطول × العرض

$م = \pi$ نق$^{٢} + ٢ \times ٢ \pi$ نق

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$ح = \pi نق^2 \times ع$$

$$\pi 192 = \pi نق^2 ع$$

$$\frac{192}{نق^2} = \frac{نق^2 ع}{نق^2}$$

$$ع = \frac{192}{نق^2}$$

$$م = 2\pi نق^2 + 2\pi نق \times \frac{192}{نق^2} \quad (2 + ن - 2)(ن^2 + 2ن + 1)$$

$$م = 2\pi نق^2 + \frac{384\pi}{نق} + 2(1 - ن)(ن^2 + 2ن + 4)$$

$$ت = 4\pi نق \cdot ت نق + \frac{384\pi ت نق}{نق^2}$$

$$ت = 8\pi نق ت نق - \frac{384\pi ت نق}{نق^2}$$

$$0 = 8\pi نق ت نق - \frac{384\pi ت نق}{نق^2}$$

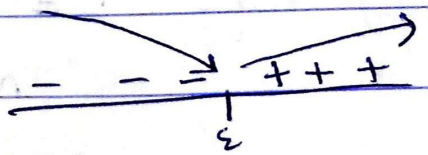
$$8\pi نق = \frac{384\pi}{نق^2}$$

$$\frac{1}{نق} = \frac{48}{نق^3}$$

$$نق^3 = 48$$

$$نق = \sqrt[3]{48}$$

$$\boxed{نق = 4}$$



أبعاد العلبة $نق = 4$ سم

$$ع = \frac{192}{16} = 12 \text{ سم}$$

س٣ : ص = ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ م (٢، ١)

ص = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}}$

ف = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + ص^{٢}}$

ف = $\sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}}$

ف = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + (٢س - ١)^{٢}}$

ف = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤ + ٤س^{٢} - ٤س + ١}$

ف = $\sqrt{٥س^{٢} - ٨س + ٥}$

ف = $\frac{١}{٢}(٥س^{٢} - ٨س + ٥)^{-\frac{١}{٢}} (١٠س - ٨)$

ف = $\frac{٥س - ٤}{\sqrt{٥س^{٢} - ٨س + ٥}}$

ف = ٠

٥س - ٤ = ٠

٥س = ٤

س = $\frac{٤}{٥}$

س	$\frac{٤}{٥}$
ف	− ٠ +

ص = $\sqrt{٢س - ١}$

ص = $\sqrt{٢ \times \frac{٤}{٥} - ١}$

ص = $\sqrt{\frac{٣}{٥}}$

ق $(\frac{٤}{٥}, \sqrt{\frac{٣}{٥}})$

س٤: ف = أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

سرعة الجسم أقل ما يمكن
قيمة صغرى لاقتران السرعة
ع̀ (١) = ٠

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

$١٠ = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$

$١٠ = \frac{(أ جتا \frac{\pi}{2} + ب جا \frac{\pi}{2}) - (أ جتا ٠ + ب جا ٠)}{٢}$

$١٠ = \frac{ب - أ}{٢}$

ب − أ = ٢٠ ... ①

ع = ف̀

ع = أ × − جا $\frac{\pi}{4}$ ن × $\frac{\pi}{4}$ + ب جتا $\frac{\pi}{4}$ ن × $\frac{\pi}{4}$

= − $\frac{أ\pi}{4}$ جا $\frac{\pi}{4}$ ن + $\frac{ب\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن

سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ∴ ع̀ (١) = ٠

ع̀ (ن) = − $\frac{أ\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن × $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{ب\pi}{4}$ × − جا $\frac{\pi}{4}$ ن × $\frac{\pi}{4}$

= − أ $(\frac{\pi}{4})^2$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + −ب $(\frac{\pi}{4})^2$ جا $\frac{\pi}{4}$ ن

$\frac{\pi^2}{16}$

ع̀ (١) = − أ $(\frac{\pi}{4})^2$ جتا $\frac{\pi}{4}$ + − ب $(\frac{\pi}{4})^2$ جا $\frac{\pi}{4}$

٠ = − أ $(\frac{\pi}{4})^2$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + − ب $(\frac{\pi}{4})^2$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب $(\frac{\pi}{4})^2$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = − أ $(\frac{\pi}{4})^2$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

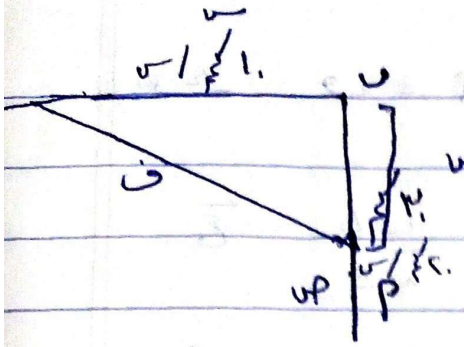
ب = − أ ... ②

ب − أ = ٢٠
− أ − أ = ٢٠
$\frac{-٢أ}{-٢} = \frac{٢٠}{-٢}$
أ = −١٠

ب − أ = ٢٠
ب − −١٠ = ٢٠
ب + ١٠ = ٢٠
ب = ١٠

− أ $\frac{\pi^2}{16}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + − ب $\frac{\pi^2}{16}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٠

٠ = − ب + − أ (× −١)
٠ = ب + أ
ب + أ = ٢٠
ب + أ = ٠
٢ب = ٢٠
ب = ١٠
أ + ب = ٠
أ + ١٠ = ٠
أ = −١٠



س٥ :

$ف^2 = (٣٠ - ص)^2 + س^2$

$\frac{دس}{دن} = ١٠$

$س = ١٠ن$

$\frac{دص}{دن} = ٢٠$

$ص = ٢٠ن$

$ف^2 = (٣٠ - ٢٠ن)^2 + (١٠ن)^2$ ①

$٢ف ف' = ٢(٣٠ - ٢٠ن)(-٢٠) + ٢(١٠ن)(١٠)$

$٢ف ف' = (٦٠ - ٤٠ن)(-٢٠) + ٢٠ن(١٠)$

$٢ف ف' = -١٢٠٠ + ٨٠٠ن + ٢٠٠ن$

$\frac{٢ف ف'}{٢} = \frac{-١٢٠٠ + ١٠٠٠ن}{٢}$

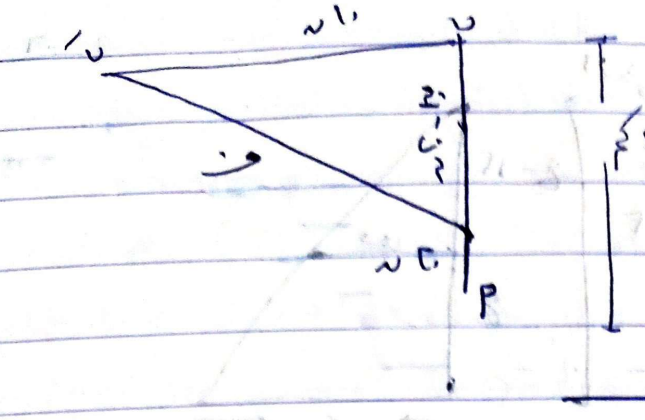
$ف' = -٦٠٠ + ٥٠٠ن$

$-٦٠٠ + ٥٠٠ن = ٠$

$٥٠٠ن = ٦٠٠$

$ن = \frac{٦}{٥} = ١,٢$ ساعة = ساعة و١٢ دقيقة.

المسافة بين الباخرتين أقلها يمكن الساعة الواحدة و١٢ دقيقة.



ع = المسافة / الزمن

١٠ ÷ س/ن

١٠ ن = س

ف ع = √ (٣٠ - ٢٠ ن)^٢ + (١٠ ن)^٢

ف = √ ٩٠٠ - ١٢٠٠ ن + ٤٠٠ ن^٢ + ١٠٠ ن^٢

ف = √ ٥٠٠ ن^٢ - ١٢٠٠ ن + ٩٠٠

ف' = (١٠٠ ن - ١٢٠٠) / (٢ √ ٥٠٠ ن^٢ - ١٢٠٠ ن + ٩٠٠)

ف' = ٠

١٠٠ ن - ١٢٠٠ = ٠

ن = ١٢٠٠ / ١٠٠ = ١٢ دقيقة

ن = ١٢ دقيقة = ١/٥ ساعة = ٠,٢ ساعة

سرعته ل

المسافة = ل ن

ن = ٠,٢ ساعة و ٢ دقيقة

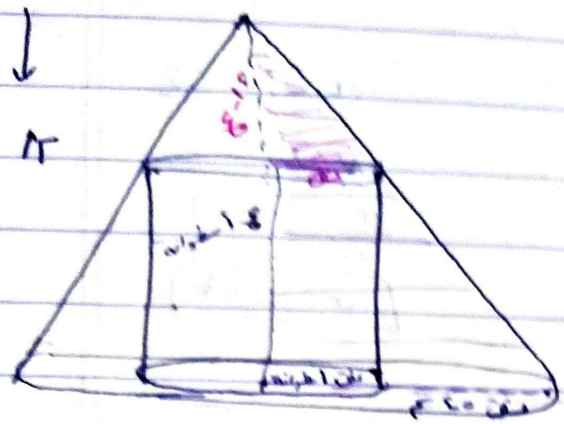
المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن

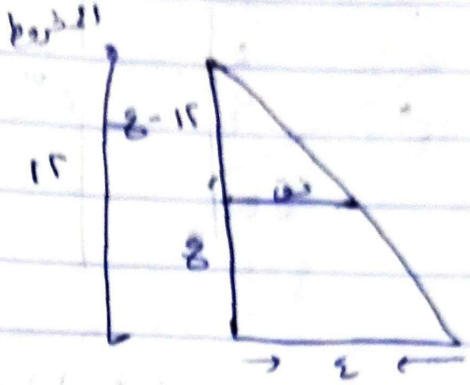
عند الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة

ال معناها ضرب ×

٠,٢ × ٦٠ = ١٢ دقيقة

س ٦ ١





$$\frac{١٢}{١٢ - ع} = \frac{ع}{نق}$$

$$٣ نق = ١٢ - ع$$

$$ع = ١٢ - ٣ نق$$

نشاهد أي مثلثات

المكون فيها بعد مناظر

$$\frac{ب}{ب_١} = \frac{ص}{ع} = \frac{أ}{أ_١}$$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × ع

$$ح = \pi نق^٢ \times ع$$

$$= \pi نق^٢ \times (١٢ - ٣ نق)$$

$$= ١٢ \pi نق^٢ - ٣ \pi نق^٣$$

$$ح' = ٢٤ \pi نق - ٩ \pi نق^٢$$

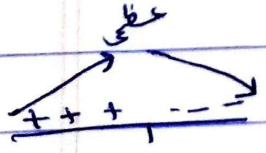
$$\therefore = ٢٤ \pi نق - ٩ \pi نق^٢$$

$$\therefore = ٣ نق (٨ - ٣ نق)$$

إما $٣ نق = ٠$ | $٨ - ٣ نق = ٠$

$نق = ٠$ مرفوض | $٣ نق = ٨$

$$نق = \frac{٨}{٣} \text{ سم}$$



$$ح = ١٢ \pi نق^٢ - ٣ \pi نق^٣$$

$$= ١٢ \pi (\frac{٨}{٣})^٢ - ٣ \pi (\frac{٨}{٣})^٣$$

$$= \frac{٢٥٦ \pi}{٩} \text{ سم}^٣$$

س٧ :

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ × مجموع القاعدتين × ع

$= \frac{1}{2}(6 + (6 + 2س + س^2)) ع$

$= \frac{1}{2}(12 + 2س) ع$

$= (6 + س) ع$ ← $36 = س^2 + ع^2$

$ع^2 = 36 - س^2$

$ع = \sqrt{36 - س^2}$

$م = \sqrt{36 - س^2} + (6 + س) \frac{-2س}{2\sqrt{36 - س^2}}$

$= \frac{\sqrt{36 - س^2}(2\sqrt{36 - س^2}) - 2س(6 + س)}{2\sqrt{36 - س^2}}$

$= \frac{72 - 2س^2 - 12س - 2س^2}{2\sqrt{36 - س^2}}$

$= \frac{-4س^2 - 12س + 72}{2\sqrt{36 - س^2}}$

$= \frac{-2(2س^2 + 6س - 36)}{2\sqrt{36 - س^2}}$

$\therefore 2س^2 + 6س - 36 = 0$

$\therefore س^2 + 3س - 18 = 0$

$\therefore (س + 6)(س - 3) = 0$

$س = -6$ مرفوض ، $س = 3$

	−	0	+
م	↘	0	↗

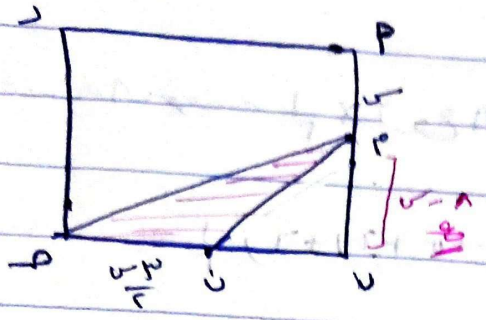
$م = (6 + 3)\sqrt{36 - 9}$

$= 9\sqrt{27}$

$= 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع

س ٨ :



٢٠ سم

مساحة المثلث = ١/٢ × القاعدة × الارتفاع

م = ١/٢ × ٣/٢ س × (٨ - س)

= ٣/٤ س × (٨ - س)

= ٢٤ س / ٤ - ٣ س^٢ / ٤

= ٦ س - ٣/٤ س^٢

م' = ٦ - ٣/٤ × ٢ × س

= ٦ - ٣/٢ س

م' = ٠

٦ - ٣/٢ س = ٠

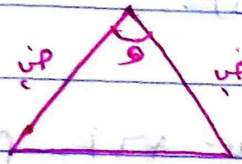
(٦ = ٣/٢ س) × ٢/٣

س = ٦ × ٤ / ٣

س = ٤

أكبر مساحة للمثلث عندما س = ٤

مساحة المثلث = ١/٢ × القاعدة × الارتفاع

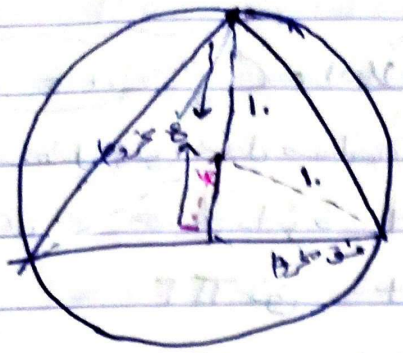


مساحة المثلث = ١/٢ حاصل ضرب × جا ه

طولي الضلعين

= ١/٢ × ضلع × ضلع × جا ه

س ٨ صـ(٩٠) :



$(١٠)^{٢} = نق^{٢} + (ع - ١٠)^{٢}$

$١٠٠ = نق^{٢} + ع^{٢} - ٢٠ع + ١٠٠$

$٠ = ع^{٢} - ع = نق^{٢}$

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} نق^{٢} \pi ع$

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi ع$

$ح = \frac{١}{٣}(٢٠ع - ع^{٢}) \pi ع$

$= \frac{\pi}{٣}(٢٠ع^{٢} - ع^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٣}(٤٠ع - ٣ع^{٢})$

$صفر = \frac{\pi}{٣}(٤٠ع - ٣ع^{٢})$

$صفر = ٤٠ع - ٣ع^{٢}$

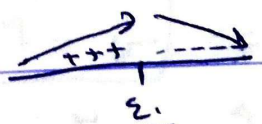
$ع(٤٠ - ٣ع) = ٠$

$ع \neq ٠$

$٤٠ - ٣ع = ٠$

$٣ع = ٤٠$

$ع = \frac{٤٠}{٣}$



س ٢٤ :

محيط الشكل = ٤٠٠ م ، العلاقة المطلوبة

ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن ؟

محيط الشكل = محيط دائرة + ٢ هـ

$$= 2\pi نق + 2هـ$$

$$\frac{400}{2} = \frac{2\pi س}{2} + \frac{2هـ}{2}$$

$$200 = \pi س + هـ$$

$$هـ = 200 - \pi س$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$م = هـ \times 2س$$

$$م = (200 - \pi س) \times 2س$$

$$م = 400س - 2\pi س^2$$ ، العلاقة المطلوبة

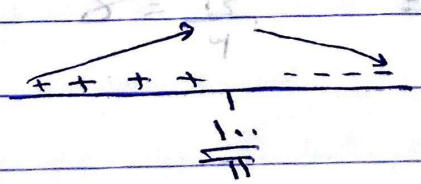
$$م' = 400 - 4\pi س$$

$$\frac{0}{4} = \frac{400}{4} - \frac{4\pi س}{4}$$

صفر $= 100 - \pi س$

$$\frac{\pi س}{\pi} = \frac{100}{\pi}$$

$$س = \frac{100}{\pi}$$



أبعاد الشكل المستطيل :

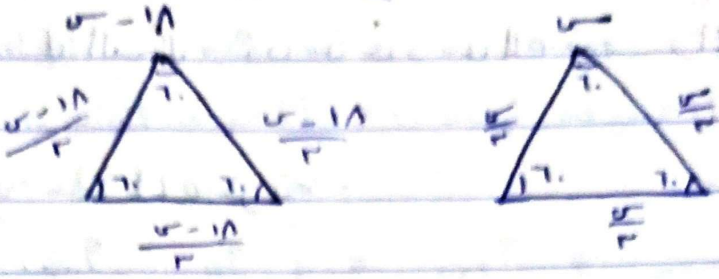
العرض $2س = \frac{200}{\pi}$

$هـ = 200 - \pi س$

$= 200 - \pi \times \frac{100}{\pi}$

$هـ = 100$

س٣٤ : محيط المثلث = ١٨



محيط المثلث الأول = س

محيط المثلث الثاني = ١٨ - س

مجموع مساحتيهما = مساحة الأول + مساحة الثاني

$= \frac{1}{2} \times \frac{س}{3} \times \frac{س}{3} \times جا ٦٠ + \frac{1}{2} \times \frac{(١٨-س)}{3} \times \frac{(١٨-س)}{3} \times جا ٦٠$

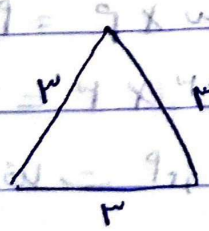
$م = \frac{1}{18} س^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{18} (١٨-س)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$م' = \frac{1}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times ٢س + \frac{1}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times ٢(١٨-س) \times -١$

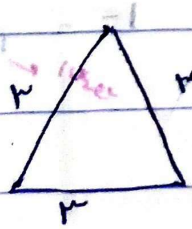
$\frac{\sqrt{3}}{18} س - \frac{\sqrt{3}}{18} (١٨-س) = ٠$

$س + ١٨ - س = ٠$

$٢س - ١٨ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٩}$



طول ضلع المثلث (١) $= \frac{س}{3} = \frac{٩}{3} = ٣$



طول ضلع المثلث (٢) $= \frac{١٨-س}{3} = \frac{٩}{3} = ٣$

تمارين عامة ص(٨٨) :

① $ق(س) = \begin{cases} س^2 - س & ، س < 0 \\ 1 - س & ، 0 \le س \le 1 \\ س - 1 & ، 1 < س \le 3 \end{cases}$ [٣،٠]

نشكل عند $س = 1$

$ق(س) = \begin{cases} 2س - 1 & ، 0 < س \le 1 \\ 1 & ، س = 1 \\ ع^{٠,٣} & ، 1 < س \le 3 \end{cases}$

$ق(س) = 0$

$2س - 1 = 0$

$س = \frac{1}{2}$

$ق(س) = ع^{٠,٣}$ ، $٠,٣$

ⓑ $\{0 ، ٣١ ، \frac{1}{2}\}$

ⓒ $ق(س) = \frac{-2س}{2(4 - س^2)}$

$= \frac{-س}{4 - س^2}$

	-2	$-$	$+$
$4 - س^2$	$-$	$+$	$-$
$ق(س)$	$+$	$-$	$+$

$[-2، 2]$

ⓐ

ⓓ $ق(س) = (س^2 - 1)^3 (س - 2)^4$ وضعنا قوس

إشارة الاقتران التربيعي

$ق(س) = 0$

$(س^2 - 1)^3 (س - 2)^4 = 0$

إما $س^2 - 1 = 0 \leftarrow س = \pm 1$

أو $س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

$(س^2 - 1)^3$	$+$	$-$	$+$	$+$
$(س - 2)^4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$ق(س)$	$+$	$-$	$+$	$+$

-1 ، 1 ، 2

ⓑ

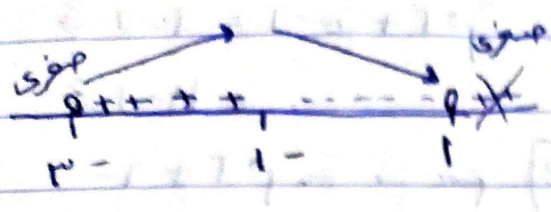
④ $ق(س) = س^3 - 3س$ $[-2, 2]$

$ق'(س) = 3س^2 - 3$

$ق'(س) = 0$

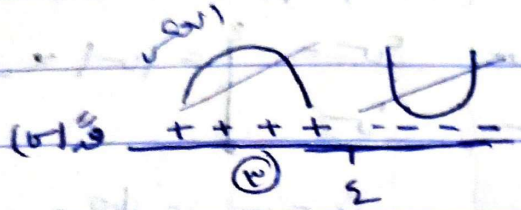
$3س^2 - 3 = 0$

$س = \pm 1$



⑤ $ق(-2) = -18$ مطلقة

$ق(1) = -2$



⑤

$ق'(3) = 0$

3 نقطة حرجة

حسب اختبار المشتقة الثانية $ق'(3) < 0$ ← $ق(3)$ قيمة عظمى محلية ⑤

⑥ $ق(س) = 8$ اقتران ثابت يحقق رول $[0, 1]$

$ق(ج) = 0$

$0 = 0$

$\forall س \in]0, 1[$ يحقق رول ⑥

⑦ $ق(س)$ موجبة ← $ق$ متزايد

$ق(س)$ موجبة ← $ق$ مقعر للأعلى

⑧

⑧ $[1, 3]$

$ق'(2) = 0$

القيم الحرجة 1، 2، 3

اختبار المشتقة الثانية

$ق'(2) > 0$

عظمى مطلقة $ق(3)$ ⑧

⑨ $ق(س) = س^3 + م س^2 - 9س$

$ق'(س) = 3س^2 + 2م س - 9$

$ق'(س) = أ س + ب م$

$ق'(-1) = 0$

$-6 + 2م = 0 \leftarrow$ ⑩ $\boxed{م = 3}$

⑪ $ق(س) = س|س|$

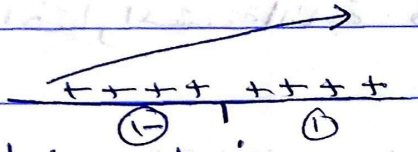
$س|س| = \begin{cases} -س^2 & س < 0 \\ س^2 & س \geq 0 \end{cases}$

متصل عند $س = 0$

$ق'(س) = \begin{cases} -2س & س < 0 \\ 2س & س > 0 \end{cases}$

$ق'(0^+) = ق'(0^-)$

$0 = 0$



ليست نقطة حرجة

$ق'(س) = \begin{cases} -2 & س < 0 \\ 2 & س > 0 \end{cases}$

⑫ $ق'(س)$

$ق'(س)$

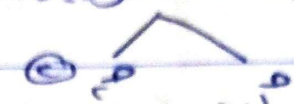
⑬ $]-\infty, 2[$

ق متزايد $ق' > 0$

ق متناقص $ق' < 0$

⑬ $[\pi^{\circ}, 2\pi]$

هـ كبر من ٢ | هـ من ٢ | حالة تربيعية



أكبر عدد من النقاط الحرجة هي ٢ ⑤

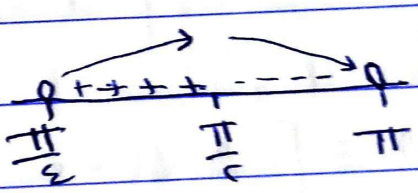
⑭ $\text{ق}(س) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظا} س$ $\quad س \in]\pi, \frac{\pi}{4}]$

$\text{ق}(س) = \frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س} = 0$ ظتا س

إشارة ظا س
نفس إشارة ظتا س

$= \text{جتا} س = 0$

$س = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \times$



فترات التزايد $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ⑮