نظرية رول والمتوسطة

نظرية :

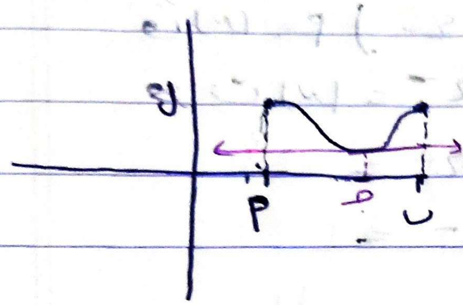
إذا كان ق(س) اقتران معرف على [أ، ب]

وكان ① ق(س) متصل ∀ س ∈ [أ، ب]

② ق(س) قابل للاشتقاق على]أ، ب[(لأن المشتقة غير موجودة عند أطراف الفترة)

③ ق(أ) = ق(ب)

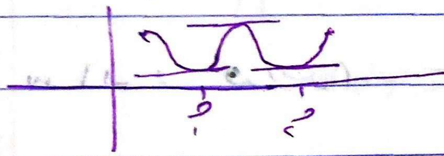
النتيجة : ∃ جـ ∈]أ، ب[بحيث قَ(جـ) = صفر



ق(س) متصل [أ، ب]

ق قابل للاشتقاق

ق(أ) = ق(ب)



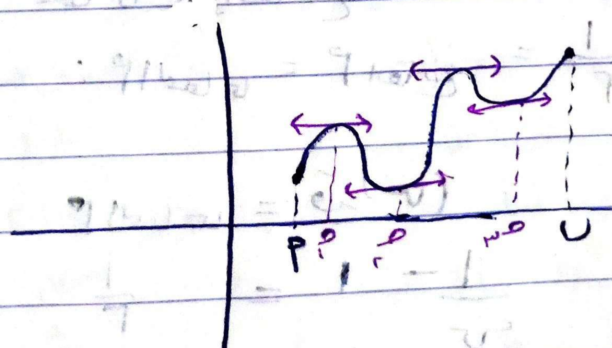
كلمات تدل على نظرية رول

① قَ(جـ) = صفر ② وجود مماس أفقي عند س = جـ

③ مماس يوازي محور السينات ④ وجود صفر لـ قَ(س)

ملاحظة : إذا لم تتحقق شروط رول فإنه قد توجد جـ ∈]أ، ب[

بحيث قَ(جـ) = صفر



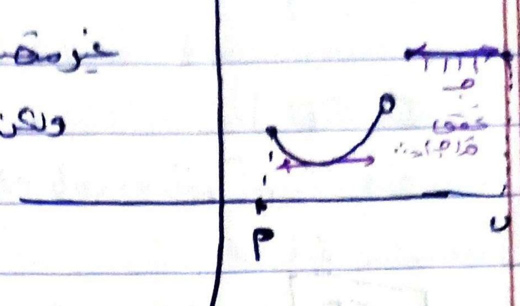
ق(أ) ≠ ق(ب)

لا تتحقق رول

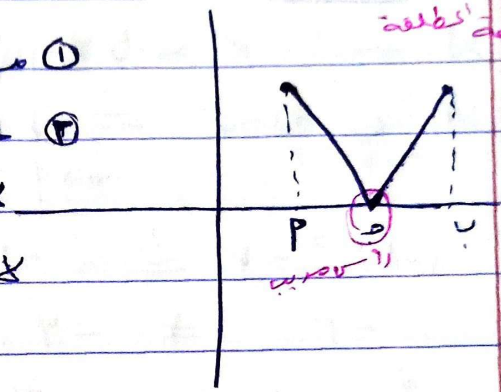
ولكن توجد جـ

∈]أ، ب[بحيث قَ(جـ) = صفر

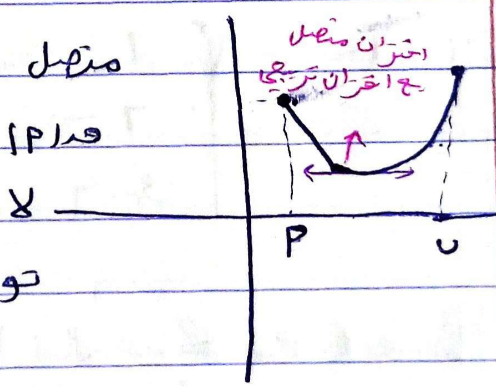
مثال: أي الرسومات التالية تحقق نظرية رول وهل توجد جـ ∈]أ، ب[بحيث قَ(جـ) = ٠

١)


غير متصل، لا يحقق رول
ولكن توجد جـ بحيث قَ(جـ) = ٠

٢)


١ متصل
٢ غير قابل للاشتقاق
لا يحقق رول
لا توجد جـ

٣)


متصل، قابل للاشتقاق
ق(أ) ≠ ق(ب)
لا يحقق رول
توجد جـ

مثال (١١) ص (٥٤):

ق(س) = س² − س − ٦ [٠، ١] جد جـ

نبحث في شروط نظرية رول

١) ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠، ١] لأنه كثير حدود
٢) قَ(س) = ٢س − ١ قابل للاشتقاق ∀ س ∈]٠، ١[
٣) ق(٠) = −٦ و ق(١) = −٦
ق(٠) = ق(١)

Note:
الاقتران كثير حدود دائماً متصل وقابل للاشتقاق

إذا طلعت جـ صفر أو واحد نرفضها

محقق رول ∃ جـ ∈]٠،١[ق'(جـ) = ٠ ∴

٢جـ - ١ = ٠

٢جـ = ١

$\boxed{\text{جـ} = \frac{1}{2}}$ ∈]٠،١[

م٢٠

مثال (٢) ص (٥٥) :

ق(أ) = ق(٢π)

جتا ٢أ + ٢جا أ = جتا ٢×٢π + ٢جا ٢π

جتا ٢أ + ٢جا أ = ١ + (٢× صفر)

جتا ٢أ + ٢جا أ = ١

١ - ٢جا² أ + ٢جا أ - ١ = صفر

- $\cancel{2}$جا² أ + $\cancel{2}$جا أ = صفر

- جا² أ + جا أ = ٠

جا أ (- جا أ + ١) = ٠ ∴

جا أ = ٠

أ = ٢π , π مرفوضة

أ = صفر مرفوضة

أو - جا أ + ١ = ٠

١ = جا أ

∴ $\boxed{\text{أ} = \frac{\pi}{2}}$

مثال (٣) ص (١٠٠) :

د(س) = { س − ٢ ، −٤ ≤ س < −١
 { س² − ٧ ، −١ ≤ س ≤ ١

[−٤ ، ١]

نبحث في شروط نظرية رول على الفترة [−٤ ، ١]

(١) نبحث في الاتصال

* س − ٢ متصل ∀ س ∈ [−٤ ، −١[لأنه كثير حدود .

* س² − ٧ متصل ∀ س ∈]−١ ، ١] لأنه كثير حدود

* نهـا د(س) (س ← −١⁺) ≟ نهـا د(س) (س ← −١⁻) ≟ د(−١)

(−١)² − ٧ ≟ −١ − ٢ = ≟ (−١)² − ٧

−٦ ≠ −٣ ≠ −٦

∴ غ. متصل عند س = −١ ، د̃(−١) = غ.م

(٢) د̃(س) = { ١ ، −٤ < س < −١
 { ٢س ، −١ < س < ١
 { غ.م ، س = −١ ، −٤ ، ١

غ متصل ، أطراف فترة

(٣) د(−٤) ≟ د(١)

−٤ − ٢ ≟ (١)² − ٧

−٦ = −٦

لم تتحقق نظرية رول لكنه قد توجد جـ ∈]−٤ ، ١[

بحيث د̃(جـ) = ٠

عندما −٤ < جـ < −١ :
د̃(جـ) = ١ ≠ صفر
لا توجد جـ

عندما −١ < جـ < ١ :
د̃(جـ) = ٠
٢جـ = ٠
$\boxed{\text{جـ = صفر}}$

تمارين صـ ١٥٩ :

سؤال : ⑨ $د(س) = \sqrt{٤س - س^٢}$ ، $س \in [٠ ، ٤]$

نحدد مجال د(س)

زوجي $\sqrt{}$ +

فردي $\sqrt{}$ + أو −

$٤س - س^٢ \geq ٠$

$٤س - س^٢ = $ صفر

$س(٤ - س) = ٠$

إما $س = ٠$ أو $س = ٤$

∴ مجال د(س) = $[٠ ، ٤]$

إذا كان $د(س) = \sqrt{٤س - س^٢}$

∴ $٤س - س^٢ \geq$ لا نضع مساواة

نبحث في شروط رول

① د(س) متصل $\forall س \in [٠ ، ٤]$ لأنه معرف على مجاله

② $د'(س) = \frac{٤ - ٢س}{٢\sqrt{٤س - س^٢}}$ موجودة $\forall س \in]٠ ، ٤[$

مجال د(س) = $[٠ ، ٤]$

مجال د'(س) = $]٠ ، ٤[$ ماعدا أصفار المقام والأطراف فترة مغلقة

③ $د(٠) \stackrel{?}{=} د(٤)$

$\sqrt{٤ \times ٠ - ٠^٢} \stackrel{?}{=} \sqrt{٤ \times ٤ - ٤^٢}$

صفر = صفر ∴ د(س) يحقق شروط رول ∴ $\exists$ جـ $\in]٠ ، ٤[$ بحيث د'(جـ) = صفر

قيمة جـ

$د'(جـ) = \frac{٤ - ٢جـ}{٢\sqrt{٤جـ - جـ^٢}} = \frac{صفر}{١}$

$٤ - ٢جـ = $ صفر (-٤)

$\frac{-٢جـ}{-٢} = \frac{-٤}{-٢}$ ⟸ $\boxed{جـ = ٢}$

⑤ د(س) = س² − ٢س − ٣ ، س ∈ [−١ ، ٣]

نتحقق من شروط نظرية رول

① د(س) متصلة ∀ س ∈ [−١ ، ٣] لأنه كثير حدود

② د'(س) = ٢س − ٢ موجودة ∀ س ∈]−١ ، ٣[

③ د(−١) ؟= د(٣)

١ + ٢ − ٣ ؟= ٩ − ٦ − ٣

∴ (−٦) ؟= (−٦)

∴ (−٦) = (−٦)

تحققت رول ∴ ∃ ج ∈]−١ ، ٣[بحيث د'(ج) = صفر

قيمة ج: ٢ج − ٢ = ∴

٢ج = ٢

$\boxed{\text{ج} = 1}$

⑥ $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)$ ، س ∈ $[\frac{1}{2} ، 2]$

$\text{س} + \frac{1}{\text{س}} > 0$ ∀ س ∈ $[\frac{1}{2} ، 2]$

① د(س) متصلة ∀ س ∈ $[\frac{1}{2} ، 2]$ لأنه معرف على مجاله

② $\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\frac{1}{1} \times \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{-1}{\text{س}^2}}{\frac{\text{س}}{1} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}}$

$= \dfrac{\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2}}{\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}}} = \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2} \times \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$

$= \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}(\text{س}^2 + 1)}$ موجودة ∀ س ∈ $]\frac{1}{2} ، 2[$

③ ق($\frac{1}{2}$) ≟ ق(٢)

لو $\frac{1}{2}$ + ٢ = لو٢ + $\frac{1}{2}$

تحقق رول ∴ ∃ ج ∈]$\frac{1}{2}$ ، ٢[بحيث قَ(ج) = صفر

$\frac{ج^٢ - ١}{ج(ج^٢+١)} = \frac{٠}{١}$

∴ ج² - ١ = ٠

ج² = ١ ← ج = -١ ✗

$\boxed{ج = ١}$ لأنه ∈]$\frac{1}{2}$ ، ٢[

④ ق(س) = جا٢س + ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]

نبحث في شروط رول

① ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين (دائريين)

② قَ(س) = ٢جتا٢س + ٢جتاس ، موجودة ∀ س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

جتا٢ج = جتا²ج - جا²ج
= ١ - ٢جا²ج
= ٢جتا²ج - ١

③ ق(٠) ≟ ق($\frac{\pi}{2}$)

٠ ≟ جاπ + ٢جا$\frac{\pi}{2}$

٠ ≟ ٠ + ٢ × ١

٠ ≠ ٢

لم تتحقق رول ولكن قد يوجد ج ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[بحيث قَ(ج) = ٠ ∴

٢جتا٢ج + ٢جتاج = ٠ ∴

٢(٢جتا²ج - ١) + ٢جتاج = ٠ ∴

٤جتا²ج - ٢ + ٢جتاج = ٠ ∴

٢جتا²ج + جتاج - ١ = ٠ ∴

(٢جتاج - ١)(جتاج + ١) = ٠ ∴

٢جتاج - ١ = ٠ ∴ جتاج = -١

٢جتاج = ١ ج = π ✗

جتاج = $\frac{1}{2}$ $\boxed{ج = \frac{\pi}{3}}$

سؤال إذا كان :

ق(س) = { أ س^٢ + ب س + ٢ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
٣ س + د ، ٢ < س ≤ ٤ }

اقتران يحقق رول في [٠ ، ٤] أوجدي
① قيم أ ، ب ، د
② قيمة جـ التي تحددها النظرية

بما أن ق(س) يحقق رول
① ∴ ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، ٤]
نها ق(س) (س ← ٢^-) = نها ق(س) (س ← ٢^+)
٤أ + ٢ب + ٢ = ٤ + د
$\boxed{٢ = ٤أ + ٢ب - د}$

② قَ(س) قابل للاشتقاق ∀ س ∈]٠ ، ٤[

قَ(س) = { ٢أ س + ب ، ٠ < س < ٢
٣ ، ٢ < س < ٤ }

قَ(٢^-) = قَ(٢^+)
$\boxed{٤أ + ب = ٣}$

③ ق(٠) = ق(٤)
٢ = ٨ + د
-٨ -٨

$\boxed{د = -٦}$

نعوض في ①

$٢ = ٤أ + ٢ب + ٦$

$-٤ = ٤أ + ٢ب$

$\boxed{-٢ = ٢أ + ب}$ ③

بحل ٢ ، ٣

$٢ = ٤أ + ب$

$-٢ = -٢أ - ب$ بالطرح

$٤ = ٢أ$

$\boxed{أ = ٢}$ نعوض في ②

$٢ = ٤ \times ٢ + ب$

$٢ = ٨ + ب$

$\boxed{ب = -٦}$

لإيجاد قيمة ج

$$دَ(س) = \begin{cases} ٤س - ٦ & : ١ < س < ٢ \\ ٢ & : ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

$دَ(ج) = صفر$

$٤ج - ٦ = ٠$

$\frac{٤ج}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$\boxed{ج = \frac{٣}{٢}} \in]١ ، ٢[$.

$دَ(ج) = صفر$

$٢ \neq صفر$ ×

لا توجد $ج \in]٢ ، ٤[$

مثال (٤) ص (٥٦):

$د(س) = \frac{(س^2 - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$ $س \in [-١ ، ب]$

$ه = صفر$

$س - ٣ = ٠$ ،

$س = ٣$

صفر المقام

متصل لأنه معرف

$-١ \quad ب \quad ٣$

$\frac{٠}{٣-٣} = $

هيكون غير متصل

$-١ \quad ٣ \quad ب$

$س \neq ٣$

لأن ٣ هي صفر المقام

$٣ \notin [-١ ، ب]$

(١) د(س) متصل $\forall س \in [-١ ، ب]$

$د(س) = \frac{(س^2 - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$

$= \frac{\cancel{(س - ٣)}(س - ٢)(س + أ)}{\cancel{(س - ٣)}}$

$= (س - ٢)(س + أ)$

$\boxed{د(س) = س^2 - ٢س + أس - ٢أ}$

(٢) د(س) قابل للاشتقاق

$د'(س) = ٢س - ٢ + أ$

$د'(صفر) = صفر$ لأن جـ = صفر

$٠ = ٠ - ٢ + أ$

$\boxed{أ = ٢}$

$د(-١) = د(ب)$

$د(س) = س^2 - ٢س + ٢س - ٤$

$د(س) = س^2 - ٤$

$١ - ٤ = ب^2 - ٤$

$-٣ = ب^2 - ٤$

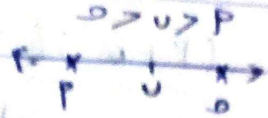
$ب^2 = ١$

$ب = \pm ١$

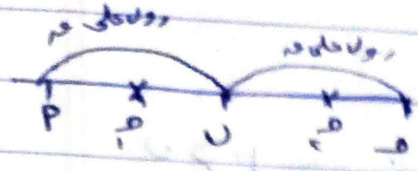
$ب = -١$ مرفوض لأنها نهاية الفترة

$\boxed{ب = ١}$

مثال (٥) ص (٥٦) :



ق متصل على [أ ، جـ]



ق'(س) موجودة

ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)

(استفيد منها في الشرط الثالث من رول)

ق''(د) = ٠ (رول) د ∈]أ ، جـ[

∃ جـ١ ∈]أ ، ب[

ق'(جـ١) ، ق'(جـ٢) = ٠

نطبق رول [جـ١ ، جـ٢] على ق'(س)

∃ د ∈ [جـ١ ، جـ٢] بحيث ق''(د) = ٠

[١] نطبق رول على [أ ، ب] على الاقتران ق(س)

① ق(س) متصل ∀ س ∈ [أ ، ب] (معطى)

② ق'(س) موجودة ∀ س ∈]أ ، ب[لأن ق''(س) موجودة

③ ق(أ) = ق(ب) (معطى)

انطبقت شروط رول على [أ ، ب] ⟸ ∃ جـ١ ∈]أ ، ب[بحيث ق'(جـ١) = صفر

[٢] نطبق رول على [ب ، جـ] على ق(س)

① ق(س) متصل ∀ س ∈ [ب ، جـ] معطى

② ق'(س) موجودة ∀ س ∈]ب ، جـ[لأن ق''(س) موجودة

③ ق(ب) = ق(جـ) معطى

انطبقت رول على [ب ، جـ] ، ∃ جـ٢ ∈]ب ، جـ[بحيث ق'(جـ٢) = صفر

[٣] نطبق رول على [جـ١ ، جـ٢] على ق'(س)

① ق'(س) متصل لأنه قابل للاشتقاق (ق''(س) موجودة)

② ق''(س) موجودة معطى

③ ق'(جـ١) = ق'(جـ٢) من [١] + [٢]

انطبقت شروط رول على [جـ١ ، جـ٢] على ق'(س)

∴ ∃ د ∈]جـ١ ، جـ٢[⊂]أ ، جـ[بحيث ق''(د) = صفر

و.هـ.م

المراجعة

س ٤ ص (٩٠):

د(س) = س² − ٣س − م

[−١، م] قيمة / قيم م ؟

اذا كان دائرة جبذا بالشرح السابقة

د(س) تحقق رول

① د(س) متصل ∀ س ∈ [−١، م]

② د'(س) = ٢س − ٣ موجودة ∀ س ∈]−١، م[

③ د(−١) = د(م)

١ + ٣ − م = م² − ٣م − م

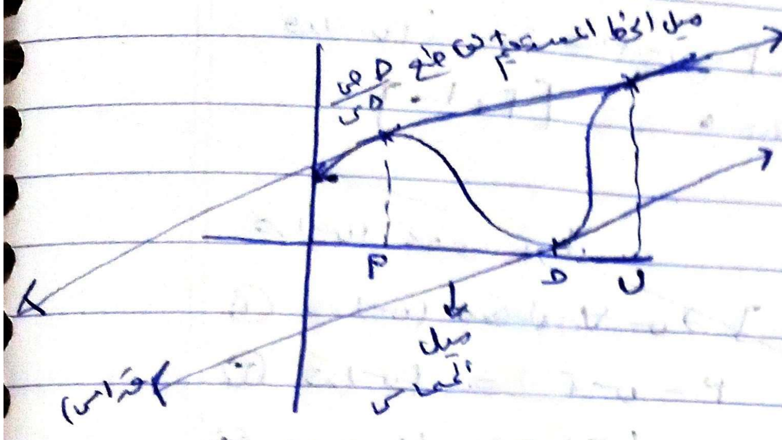
٤ − م = م² − ٤م

م² − ٣م − ٤ = ٠

∴ (م + ١)(م − ٤) = ٠

م = −١ ✗ مرفوضة $\boxed{م = ٤}$

نظرية القيمة المتوسطة :



ق(س) معرف على [أ ، ب]

شروط المتوسطة :

① ق(س) متصل ∀ س ∈ [أ ، ب]

② ق(س) قابل للاشتقاق ∀ س ∈]أ ، ب[

النتيجة :

∃ ج ∈]أ ، ب[بحيث

$$ق'(ج) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

ميل القاطع = ق'(ج)

ق'(ج) = متوسط التغير

إذا لم تتحقق النتيجة فـ ∄ ج ∈]أ ، ب[

ملاحظات على النظرية :

[1] إذا طلب إثبات ق'(ج) = ل نستخدم المتوسطة.

بالكلمات ← أثبت أن ق'(س) يأخذ ل في مداه

ل تنتمي إلى مدى ق'(س)

ل = ق'(ج)

[2] أثبت أنه ∃ ج ∈]أ ، ب[بحيث المماس عندها يساوي ل

[3] ق(أ) = ق(ب) تحولت النظرية إلى رول

رول هو حالة خاصة من المتوسطة.

[4] كل اقتران يحقق رول فإنه يحقق المتوسطة ولكن العكس غير صحيح

ـه وليس كل متوسطة يحقق رول.

مثال (٦) ص (٥٧):

د(س) = س^{٣} + ١   [-٢، ١]

نبحث في شروط المتوسطة

① د(س) متصل ∀ س ∈ [-٢، ١] لأنه كثير حدود

② دَ(س) = ٣س^{٢} ∀ س ∈]-٢، ١[

تحققت المتوسطة ∃ جـ ∈]-٢، ١[بحيث دَ(جـ) = $\frac{\text{د(١) - د(-٢)}}{\text{١ - -٢}}$

٣جـ^{٢} = $\frac{\text{٢ - -٧}}{\text{٣}}$

٣جـ^{٢} = $\frac{\text{٩}}{\text{٣}}$

٣جـ^{٢} = $\frac{\text{٣}}{\text{٣}}$

جـ^{٢} = ١

جـ = ±١ → -١ لأنها ∈]-٢، ١[؛ ١ ∉]-٢، ١[

س٢ ص (٥٩):

④ د(س) = س^{٣} - س - ١   س ∈ [-١، ٢]

① د(س) متصل ∀ س ∈ [-١، ٢] لأنه كثير حدود

② دَ(س) = ٣س^{٢} - ١   ∀ س ∈]-١، ٢[

تحققت المتوسطة ∃ جـ ∈]-٢، ١[

بحيث دَ(جـ) = $\frac{\text{د(٢) - د(-١)}}{\text{٢ - -١}}$

٣جـ^{٢} - ١ = $\frac{\text{(٨ - ٢ - ١) - (-١ + ١ - ١)}}{\text{٣}}$

٣جـ^{٢} - ١ = $\frac{\text{٥ - -١}}{\text{٣}}$

٣جـ^{٢} - ١ = $\frac{\text{٦}}{\text{٣}}$

٣جـ^{٢} - ١ = ٢

٣جـ^{٢} = ٣

جـ^{٢} = ١

جـ = -١ ×

$\boxed{\text{جـ = ١}}$

مثال (١٧) ص (٥٨) :

د(س) = { أ س + ب ، -٣ ≤ س ≤ -١
　　　　-س² ، -١ < س ≤ ٥

يحقق المتوسطة [-٣ ، ٥] :

بما أنه يحقق المتوسطة

① د(س) متصل ∀ س ∈ [-٣ ، ٥]

نهـا د(س) (س ← -١⁻) = نهـا د(س) (س ← -١⁺)

-أ + ب = -١ ---- ①

② دَ(س) موجودة ∀ س ∈]-٣ ، ٥[

دَ(س) = { أ ، -٣ < س ≤ -١
　　　　-٢س ، -١ < س < ٥

دَ(-١)⁻ = دَ(-١)⁺

أ = ٢ 　 نعوض في ①

-أ + ب = -١

-٢ + ب = -١

ب = ١

مثال (٨) :

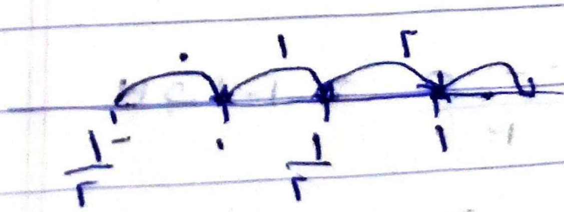
د(س) = [٢س + ١] ، [٠ ، ١]

ل = ١ / |٢| = ١ / ٢

٢س + ١ = صفر

٢س = -١

س = -١ / ٢



ق(س) = {
١ ، ٠ ≤ س < $\frac{١}{٢}$
٢ ، $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ١
٣ ، س = ١ زوج مرتب (١،٣)

نبحث في شروط المتوسطة :

① الاتصال

١ متصل ∀ س ∈ [٠، $\frac{١}{٢}$[لأنه كثير حدود

٢ متصل ∀ س ∈]$\frac{١}{٢}$، ١[لأنه كثير حدود

ق($\frac{١}{٢}$) =؟ نها ق(س) (س ← $\frac{١}{٢}^{+}$) =؟ نها ق(س) (س ← $\frac{١}{٢}^{-}$)

٢ = ٢ ≠ ١

ق(س) غير متصل عند س = $\frac{١}{٢}$

ق(١) =؟ نها ق(س) (س ← ١^{-})

٣ ≠ ٢ ق غ. متصل عند يسار ١

ق(س) غ. متصل ∀ س ∈ [٠، ١]

② ق'(س) = {
٠ ، ٠ < س < $\frac{١}{٢}$
٠ ، $\frac{١}{٢}$ < س < ١
غ.م ، س = ٠، $\frac{١}{٢}$، ١

ق(س) غير قابل للاشتقاق ∀ س ∈]٠، ١[

ق لم تحقق المتوسطة

قد توجد ج ∈]٠، ١[

ق'(ج) = $\frac{ق(١) - ق(٠)}{١ - ٠}$

= $\frac{٣ - ١}{١}$ = ٢

عندما ٠ < س < $\frac{١}{٢}$ ، ١

ق'(ج) = ٠

٠ ≠ ٢

لا توجد قيم ج ∈]٠، ١[

س٢: ⓐ $ق(س) = \frac{٤}{س+٢}$ ، س ∈ [-١، ٢]

نبحث في شروط المتوسطة [-١، ٢]

① ق(س) متصل ∀ س ∈ [-١، ٢] لأنه معرف على مجاله

$س + ٢ = ٠ ، س = -٢$

② $ق'(س) = \frac{-٤}{(س+٢)^٢}$ ∀ س ∈]-١، ٢[

∃ جـ ∈]-١، ٢[بحيث $ق'(جـ) = \frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - -١}$

$\frac{-٤}{(جـ+٢)^٢} = \frac{١ - ٤}{٣}$

$\frac{-٤}{(جـ+٢)^٢} = -١$

$(جـ+٢)^٢ = ٤$

$جـ^٢ + ٤جـ + ٤ = ٤$

$جـ^٢ + ٤جـ = ٠$

$جـ(جـ + ٤) = ٠$

إما جـ = ٠

أو جـ = -٤ مرفوضة ∉]-١، ٢[

ⓑ $ق(س) = \sqrt{س} + ٢س$ ، س ∈ [٤، ٩]

نبحث في شروط نظرية المتوسطة

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٤، ٩] لأنه معرف على مجاله / حاصل جمع اقترانين متصلين ($\sqrt{س}$ ، ٢س) . معرفة ∀ س ∈ [٤، ٩]

ق(س) قابل للاشتقاق ∀ س ∈]٤، ٩[من كثير حدود

$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$ تحققت شروط المتوسطة .

∵ د متصلة على [٤، ٩]

$$د'(جـ) = \frac{د(٩) - د(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{(٢\sqrt{٩} + ١٨) - (٢\sqrt{٤} + ٨)}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{٢١ - ١٠}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{١١}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{١١}{٥} - \frac{٢ \times ٥}{١ \times ٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{١}{٥}$$

$$٥ = ٢\sqrt{جـ}$$

$$(\sqrt{جـ})^٢ = \left(\frac{٥}{٢}\right)^٢$$

$$\boxed{جـ = \frac{٢٥}{٤}}$$

س٣ : د(س) = { أ س٢ + ٢ س ، ٠ ≤ س ≤ ٢
س٣ − ب س + ١٢ ، ٢ < س ≤ ٣

يحقق شروط القيمة المتوسطة في [٠ ، ٣]

المطلوب أ ، ب ، جـ التي حددتها النظرية .

(١) بما أن د(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، ٣]

∴ نهـا د(س) (س ← ٢+) = نهـا د(س) (س ← ٢−)

٨ − ٢ب + ١٢ = ٤أ + ٤

٨ + ١٢ − ٤ = ٤أ + ٢ب

١٦ = ٤أ + ٢ب ÷٢

٨ = ٢أ + ب ... (١)

(٢) دَ(س) موجودة ∀ س ∈]٠ ، ٣[

دَ(س) = { ٢أ س + ٢ ، ٠ < س < ٢
٣ س٢ − ب ، ٢ < س < ٣

دَ(٢)+ = دَ(٢)−

١٢ − ب = ٤أ + ٢

١٢ − ٢ = ٤أ + ب

١٠ = ٤أ + ب ... (٢)

(١) + (٢)

٤أ + ب = ١٠

−٢أ − ب = −٨

٢أ = ٢

$\boxed{\text{أ} = 1}$

بالتعويض في ①

٨ = ٢أ + ب

٨ = ٢ + ب

$\boxed{\text{ب} = ٦}$

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢\text{س} & ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^٣ - ٦\text{س} + ١٢ & ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

$$\text{د}'(\text{ج}) = \frac{\text{د}(٣) - \text{د}(٠)}{٣ - ٠}$$

$$= \frac{(٢٧ - ١٨ + ١٢) - ٠}{٣}$$

$$= \frac{٢١}{٣} = ٧$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٢ & ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س}^٢ - ٦ & ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

عندما $٠ < \text{ج} < ٢$

$\text{د}'(\text{ج}) = ٢\text{ج} + ٢$

$٧ = ٢\text{ج} + ٢$

$٥ = ٢\text{ج}$

$\text{ج} = \frac{٥}{٢} \notin]٠، ٢[$ مرفوضة

عندما $٢ < \text{ج} < ٣$

$\text{د}'(\text{ج}) = ٣\text{ج}^٢ - ٦$

$٧ = ٣\text{ج}^٢ - ٦$

$١٣ = ٣\text{ج}^٢$

$\text{ج}^٢ = \frac{١٣}{٣}$

$\boxed{\text{ج} = \sqrt{\frac{١٣}{٣}}}$ ✓

$\text{ج} = -\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ × مرفوضة

مثال: د(س) = $\frac{1}{س}$ ، س ∈ [أ، ب] ، س > ٠

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة

① د(س) متصل ∀ س ∈ [أ، ب] لأنه معرف على مجاله (س > ٠)

② دَ(س) = $\frac{-1}{س^2}$ موجودة ∀ س ∈]أ، ب[

∴ محققة المتوسطة ∴ ∃ جـ ∈]أ، ب[بحيث

$$دَ(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$$

$$\frac{-1}{جـ^2} = \frac{\frac{1}{ب} - \frac{1}{أ}}{ب - أ}$$

$$\frac{-1}{جـ^2} = \frac{\overset{-1}{\cancel{أ - ب}}}{أب\,(\cancel{ب - أ})}$$

$$\cancel{-}أب = \cancel{-}جـ^2$$

$$\boxed{أب = جـ^2}$$

مثال: ع(س) = (د ∘ هـ)(س) ⇐ ع(س) = د(هـ(س))

س ∈ [أ، ب]   د(س) ، هـ(س) متصلين ∀ س ∈ [أ، ب]

وقابلين للاشتقاق في]أ، ب[،

هـ(أ) = ب   هـ(ب) = أ

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على د(س)

① د(س) متصل ∀ س ∈ [أ، ب] معطى

② دَ(س) موجودة ∀ س ∈]أ، ب[معطى

∴ ∃ جـ ∈]أ، ب[بحيث دَ(جـ) = $\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

$$\overset{معطى}{}\qquad\qquad \overset{معطى}{}$$

$$قَ(جـ) = \frac{ق(هـ(ب)) - ق(هـ(أ))}{ب - أ}$$

$$قَ(جـ) = \frac{ع(ب) - ع(أ)}{ب - أ}$$

$$قَ(جـ)(ب - أ) = ع(ب) - ع(أ) \quad و.هـ.م$$

مثال: $ق(س) = س\ جتاس \quad س \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

نبحث في شروط رول

① $ق(س)$ متصل $\forall\ س \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$ لأنه حاصل ضرب متصلين (كثيرحدود ودائري)

② $قَ(س) = جتاس - س\ جاس \quad \forall\ س \in\ ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

③ $ق(٠) \overset{?}{=} ق(\frac{\pi}{٢})$

$٠ = ٠$

تحقق رول $\therefore \exists$ $جـ \in\ ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$ بحيث $قَ(جـ) = ٠ \therefore$

$قَ(جـ) = جتاجـ - جـ\ جاجـ$

$٠ = جتاجـ - جـ\ جاجـ$

$$\frac{جـ\ جاجـ}{جاجـ} = \frac{جتاجـ}{جاجـ}$$

$جـ = ظتاجـ$ و.هـ.م

القيمة التي تعينها النظرية هي عندما $ظتاس = س$

سؤال: إذا كانت قيمة جـ التي نحصل عليها من تطبيق المتوسطة على الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ في الفترة $[1 ، \text{أ}]$ هي $\sqrt{2}$ جد قيمة أ.

بما أن ق(س) يحقق المتوسطة متصل وقابل للاشتقاق

$\text{ق}'(\text{س}) = 1 - \frac{1}{\text{س}^2}$ موجودة $\forall$ س $\in [1 ، \text{أ}]$

م

$$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(1)}{\text{أ} - 1}$$

$$1 - \frac{1}{\text{جـ}^2} = \frac{\left(\text{أ} + \frac{1}{\text{أ}}\right) - 2}{\text{أ} - 1}$$

$$1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{\text{أ}^2 + 1}{\text{أ}} - \frac{2 \times \text{أ}}{1 \times \text{أ}}}{\text{أ} - 1}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{\frac{\text{أ}^2 + 1 - 2\text{أ}}{\text{أ}}}{\text{أ} - 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{أ}^2 - 2\text{أ} + 1}{\text{أ}(\text{أ} - 1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(\text{أ} - 1)\cancel{(\text{أ} - 1)}}{\cancel{(\text{أ} - 1)}\,\text{أ}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{أ} - 1}{\text{أ}}$$

$$\underset{-\text{أ}}{2\text{أ}} - 2 = \underset{-\text{أ}}{\text{أ}}$$

$$\text{أ} - 2 = 0$$

$$\boxed{\text{أ} = 2}$$

إذا كانت قيمة ج التي نحصل عليها من تطبيق المتوسطة على الاقتران $ق(س) = \sqrt{س - ١}$ في الفترة $[١ ، أ]$ تساوي $\frac{٣}{٢}$ جد قيمة أ

بما أن ق(س) يحقق المتوسطة فهو متصل وقابل للاشتقاق

$\therefore \exists$ ج $\in]١ ، أ[$ بحيث $ق'(ج) = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١}$

$$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$$

$$ق'(\tfrac{٣}{٢}) = \frac{١}{٢\sqrt{\frac{٣}{٢} - ١}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\frac{١}{٢}}}$$

$$ق'(\tfrac{٣}{٢}) = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{\frac{١}{٢}}} = \frac{\cancel{\sqrt{أ - ١}} - ٠}{\cancel{\sqrt{أ - ١}} \times \sqrt{أ - ١}}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{أ - ١}}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{أ - ١}}$$

$$(\sqrt{أ - ١})^٢ = (\sqrt{٢})^٢$$

$$أ - ١ = ٢$$

$$\boxed{أ = ٣}$$

ت) إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود معرفان على [٢، ٣]
وكان ق(٢) = ٣ هـ(٢) = ٦
ق(٣) = ٤ هـ(٣) = ٨
أثبت أنه يوجد جـ ∈]٢، ٣[
بحيث قَ(جـ) + هـَ(جـ) = ٢

نطبق المتوسطة على ق(س)
① ق(س) متصل ∀ س ∈ [٢، ٣] لأنه كثير حدود .
② قَ(س) موجودة ∀ س ∈]٢، ٣[لأنه كثير حدود .
∴ ∃ جـ ∈]٢، ٣[بحيث قَ(جـ) = (ق(٣) - ق(٢)) / (٣ - ٢)
= (٨ - ٦) / ١ = ٢

نطبق المتوسطة على هـ(س)
① هـ(س) متصل ∀ س ∈ [٢، ٣] لأنه كثير حدود .
② هـَ(س) موجودة ∀ س ∈]٢، ٣[لأنه كثير حدود .
∴ ∃ جـ ∈]٢، ٣[بحيث هـَ(جـ) = (هـ(٣) - هـ(٢)) / (٣ - ٢)
= (٢ - ٢) / ١
= ٠
قَ(جـ) + هـَ(جـ) = ٢ + ٠ = ٢
و.هـ.م

٣هـ(٢) = ٦
هـ(٢) = ٢
٤هـ(٣) = ٨
هـ(٣) = ٢

ت إذا كان ق(س) = (س - ١) جا س معرف على [٠ ، ١] . أثبت أنه يوجد جـ ∈]٠ ، ١[
بحيث ظا جـ = ١ - جـ

نبحث في شروط رول
① ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، ١] لأنه حاصل ضرب متصلين (كثير حدود ودائري)
② ق′(س) = جا س + (س - ١) جتا س موجودة ∀ س ∈]٠ ، ١[
③ ق(١) = ق(٠)
= ٠

انطبقت رول : ∃ جـ ∈]٠ ، ١[بحيث ق′(جـ) = ٠

جا جـ + (جـ - ١) جتا جـ = ٠

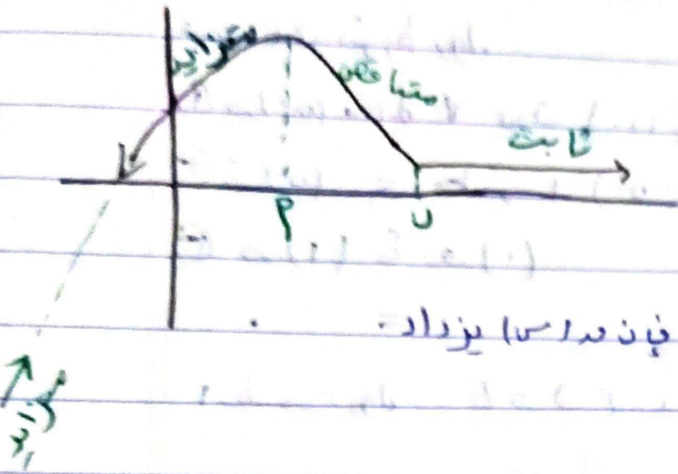
$$\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}} = \frac{-(\text{جـ} - 1)\ \text{جتا جـ}}{\text{جتا جـ}}$$

ظا جـ = ١ - جـ

الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

أولاً: من خلال الرسم البياني

ثانياً: باستخدام اختبار المشتقة الأولى



أولاً

تعريف: يلزم فقط

1) يكون ق(س) متزايد $س_2 > س_1$
فإن ق($س_2$) > ق($س_1$) كلما ازدادت س فإن ق(س) يزداد.

2) يكون ق(س) متناقص $س_2 > س_1$
فإن ق($س_2$) < ق($س_1$)
كلما ازدادت قيم س فإن ق(س) يقل

3) يكون ق(س) ثابت $س_2 > س_1$ فإن ق($س_2$) = ق($س_1$)
كلما ازدادت قيم س فإن ق(س) تبقى ثابتة.

خطوات تحديد فترات التزايد والتناقص:

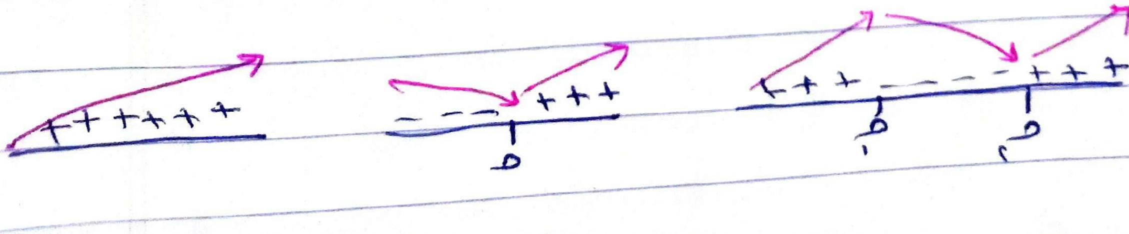
1- البحث في الاتصال

2- إيجاد المشتقة الأولى

3- البحث في إشارة قَ(س) ⟸ قَ(س) = ٠

خطي
تربيعي
نسبي
أي اقتران آخر

4- إذا كانت قَ(س) > ٠ فإنّ ق(س) متزايد
قَ(س) < ٠ فإنّ ق(س) متناقص
قَ(س) = صفر فإنّ ق(س) ثابت



مثال (١١) : حددي فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = \frac{1}{3}س^{3} - س^{2} - 3س + 1$

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود .

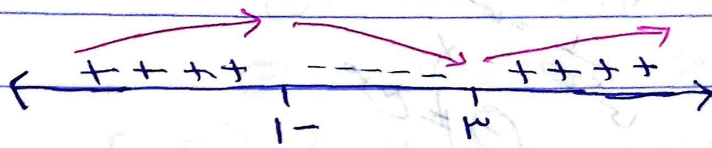
$ق'(س) = س^{2} - 2س - 3$

$ق'(س) =$ صفر   البحث في الإشارة .

$س^{2} - 2س - 3 = 0$

$(س - 3)(س + 1) = 0$

إما $س = 3$ أو $س = -1$



فترات التزايد $]-\infty , -1] \cup [3 , \infty[$

فترة التناقص $[-1 , 3]$

مثال (١٤) ص (٦٤)

$ق(س) = \frac{س - 1}{س + 1}$ $س \neq 1$

تحديد المجال ح / {أصفار المقام}

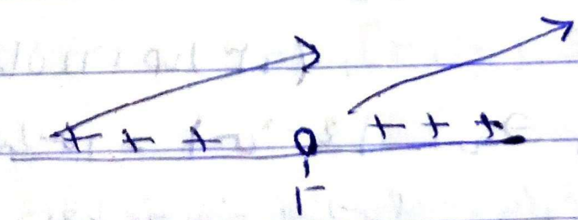
$س + 1 = 0$

$\boxed{س = -1}$

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح / {−١}

$ق'(س) = \frac{(س+1) - (س-1)}{(س+1)^{2}}$

$= \frac{س+1-س+1}{(س+1)^{2}} = \frac{2}{(س+1)^{2}} \Leftarrow \frac{+}{+}$



ق(س) متزايد ∀ س ∈ ح

$]-\infty , -1[$ ، $]-1 , \infty[$

مثال (١٥) ص (٦٤):

ق(س) = ٢س + ظاس

إثبات أن ق(س) متزايد في]$-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$[

ق(س) متصل لأنه مجموع اقترانين متصلين كثير حدود ودائري معرف على مجاله

ظاس = جاس / جتاس ← معرف

٩٠ ، ٢٧٠

$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = ٢ + \text{قا}^2\text{س}}$ (+) + (+)

ق'(س) = صفر

٢ + قا²س = صفر

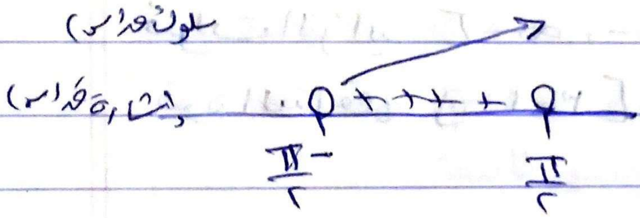
قا²س ≠ -٢ مرفوضة

لا يوجد أصفار للمشتقة

ملاحظة: قا²س (+) ٢

قا²س = $\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$

مربع ≠ (-)



ق(س) متزايد ∀ س ∈]$-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$[وهو المطلوب

مثال (١٦) ص (٦٣):

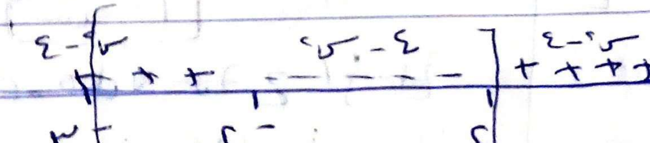
ق(س) = |س² - ٤| ، س ∈ [-٣ ، ٢]

نعيد تعريف ق(س)

س² - ٤ = ٠

س² = ٤

س = ±٢



ق(س) = { س² - ٤ ، -٣ ≤ س ≤ -٢
 ٤ - س² ، -٢ < س ≤ ٢ }

ق(س) متصل ∀ س ∈ [-٣ ، ٢]

$ق'(٢)^+ \neq ق'(٢)^-$

$٤ \neq -٤$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، -٢ < س < ٠ \\ -٢س & ، ٠ < س < ٢ \end{cases}$$

$٢س = ٠$ ، $-٢س = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ ∉ للفترة $\boxed{س = ٠}$

-٣ ، $(-\frac{٣}{٢})$ ، -٢ ، (-١) ، صفر ، (١) ، ٢

$- - -$ ، $+ + + +$ ، $- - -$

$ق'(-\frac{٣}{٢}) = ٢ \times -\frac{٣}{٢} = (-)$

$ق'(-١) = -٢ \times -١ = (+)$

$ق'(١) = -٢ \times ١ = (-)$

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [-٢، ٠]

ق(س) متناقص ∀ س ∈ [-٣، -٢] ، [صفر، ٢]

سؤال: أوجدي فترات التزايد والتناقص لكل من

١) $ق(س) = س هـ^س$

٢) $ق(س) = لو_{هـ} (س^٢+١)$ حيث س ∈ [-٢، ٣]

① ق(س) متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين (كثير حدود واقتران أسي طبيعي)

$ق'(س) = هـ^س + س هـ^س$

$هـ^س + س هـ^س = ٠$

$\frac{هـ^س}{هـ^س} = \frac{-س هـ^س}{هـ^س}$

$١ = -س$

$\boxed{س = -١}$

$هـ^س \neq$ صفر

$- - - -$ ، $+ + + +$

(-٢) ، -١ ، (٠)

$ق'(٠) = هـ^٠ + ٠ = ١ (+)$

$ق'(-٢) = هـ^{-٢} + -٢ هـ^{-٢} = -هـ^{-٢} (-)$

$\frac{١}{هـ^٢} - \frac{٢}{هـ^٢} = \frac{-١}{هـ^٢} (-)$

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [-١، ∞[

متناقص ∀ س ∈]-∞، -١]

(2) د(س) = $\log_{e}$ (س² + 1) س ∈ [-2 ، 3]

د(س) متصل لأنه معرف على مجاله

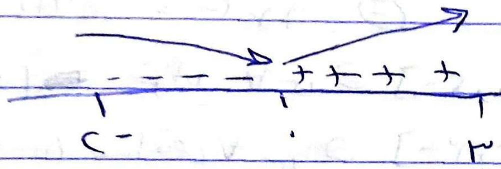
س² + 1 > 0 ، (مربع موجب)

$$د'(س) = \frac{2س}{س^2+1}$$

$$0 = \frac{2س}{س^2+1} = \frac{إشارة\ فطي}{مربع\ موجب\ (+)} = إشارة\ فطي$$

2س = 0

$\boxed{س = 0}$



د(س) متزايد لكل س ∈ [0 ، 3]

د(س) متناقص لكل س ∈ [-2 ، 0]

تمارين ص(64) :

مثال : (أ) د(س) = 3س² − س³ س ∈ [-2 ، 5]

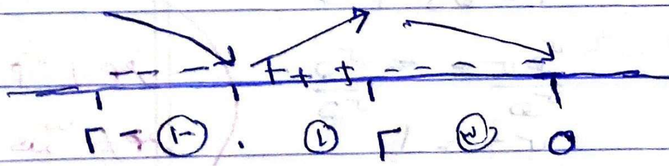
د(س) متصل لأنه كثير حدود

د'(س) = 6س − 3س²

6س − 3س² = 0

3س (2 − س) = 0

س = 0 س = 2



د(س) متزايد في [0 ، 2]

د(س) متناقص في [-2 ، 0] ، [2 ، 5]

د'(-1) = -6 - 3 = (-)

د'(1) = 6 - 3 = (+)

د'(3) = 18 - 27 = (-)

الاختبار تربيعي بدون تحليل اشارة

٢) $ق(س) = س + جا^2 س$ ، $س \in [٠، \pi]$

ق(س) متصل $\forall$ س $\in [٠، \pi]$ لأنه حاصل جمع اقتران دائري وكثير حدود

$ق'(س) = ١ + ٢ جاس جتاس$

$= ١ + جا٢س$

$ق'(س) = ٠$

$١ + جا٢س = ٠$

$جا٢س = -١$

$\frac{٢س}{٢} = \frac{\frac{٣\pi}{٢}}{٢} \Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤}$

$+ + + + + \quad + + + + +$

$٠ \quad \frac{\pi}{٢} \quad \frac{٣\pi}{٤} \quad \frac{٥\pi}{٦} \quad \pi$

٩٠   ١٥٠

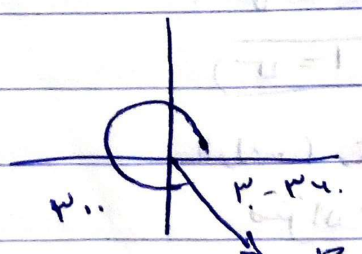
$ق'(\frac{\pi}{٢}) = ١ + جا ٢ \times \frac{\pi}{٢}$

$= ١ + ٠ = +$

$ق'(١٥٠) = ١ + جا ٢ \times ١٥٠$

$= ١ + جا ٣٠٠ = ١ + -جا ٦٠ = ١ + -(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = +$

ق(س) متزايد $\forall$ س $\in [٠، \pi]$



$٣٠٠ = -٦٠$

$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ $\sqrt{٣} = \frac{١,٧}{٢}$

(هـ) $د(س) = \sqrt{س^2 - 2س + 1}$ ، س ∈ ح

نحدد المجال: $س^2 - 2س + 1 \geq 0$

$(س - 1)(س - 1) \geq 0$

$س - 1 = 0$

$\boxed{س = 1}$

+ + + + + + + + + + + + +
1

د(س) متصل لأنه معرّف على مجاله

$د'(س) = \dfrac{2س - 2}{2\sqrt{س^2 - 2س + 1}}$

$د'(س) = \dfrac{2س - 2}{2\sqrt{س^2 - 2س + 1}}$

$د'(س) = 0$

$\dfrac{2س - 2}{2\sqrt{س^2 - 2س + 1}} = 0$ إشارة خطي / جذر (موجب)

أعمار لكل التربيعية م = 0

جذر وحيد

نفس إشارة معامل س

جذر وحيد

نستثني الواحد طالما مطلق؟

$2س - 2 = 0$

$2س = 2$

$\boxed{س = 1}$

− − − − − − | + + + +
1

د(س) متناقصة ∀ س ∈]−∞، 1]

متزايدة ∀ س ∈ [1، ∞[

س٤ : $ق(س) = ٢س - لو_ه (س+١)$ ، $س+١ > ٠$

ق(س) متصل لأنه معرف على مجاله { س+١ > ٠ } ، $س > -١$ وهو المجال

$$ق'(س) = ٢ - \frac{١}{س+١}$$

$ق'(س) = ٠$

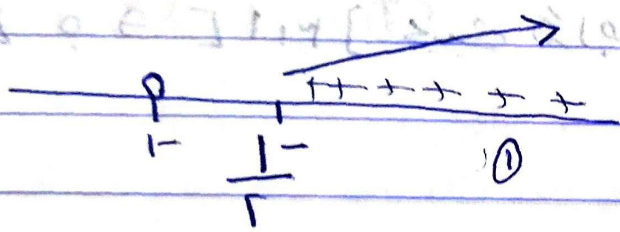
$$٢ - \frac{١}{س+١} = ٠$$

$$٢ = \frac{١}{س+١}$$

$٢س + ٢ = ١$

$٢س = -١$

$$\boxed{س = \frac{-١}{٢}}$$



$$ق'(١) = ٢ - \frac{١}{١+١}$$

$$٢ - \frac{١}{٢} = +$$

متزايد على $]\frac{-١}{٢} ، \infty[$

س: إذا كان ق(س) كثير حدود، وكان المستقيم ص = ٤س - ٣ يمس منحنى ق(س) عند (١، ق(١)) والمستقيم ٣ص - ١٢س = ١٨ يمس منحنى ق(س) عند (٣، ق(٣)) اثبت أنه يوجد جـ ∈]١، ٣[بحيث ق'(جـ) = صفر

باستخدام رول نبحث في شروط النظرية على الاقتران ق'(س)

ق'(س) متصل لأنه كثير حدود

ق'(س) قابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

ق'(١) $\overset{?}{=}$ ق'(٣)

٤ = ٤

تحققت شروط رول على ق'(س)

∴ ∃ جـ ∈]١، ٣[بحيث قً(جـ) = ٠

ص = ٤س - ٣ معادلة المماس

ق'(١) = ٤

٣ص - ١٢س = ١٨

٣ص = ١٢س + ١٨

ص = ٤س + ٦

ق'(٣) = ٤

س٣ - ص (64):

ق(س) = { س^٣ ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢س^٢ - ١ ، ١ < س ≤ ٢ }   [٠، ٢]

البحث في الفترات المفتوحة

س^٣ متصل ∀ س ∈]٠، ١[لأنه كثير حدود

٢س^٢ - ١ متصل ∀ س ∈]١، ٢] لأنه كثير حدود.

عند س = ١

ق(١) $\overset{?}{=}$ نها ق(س) $\overset{?}{=}$ نها ق(س)
(س ← ١+) (س ← ١-)

١ = ١ = ١

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠، ٢]

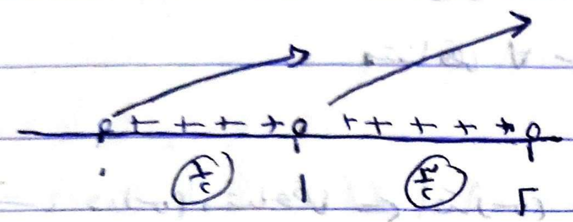
$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ٠ < س < ١ \\ ٢س & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٠ ، ١ ، ٢ \end{cases}$$

$ق(١)^+ \neq ق(١)^-$

$٤ \neq ٣$

$ق'(س) = ٠$ | $٢س = ٠$
$٣س^٢ = ٠$ | $س = ٠$
$س = ٠$ مرفوض | مرفوض

نقطة حرجة أصلا المشتقة عنده غير موجودة



$ق'(\frac{١}{٢}) = ٣ \times (\frac{١}{٢})^٢ = \frac{٣}{٤}$

$ق'(\frac{٣}{٢}) = ٤ \times \frac{٣}{٢} = ٦$

ق(س) متزايد $\forall$ س $\in$ [٠، ٢] ما جزأنا الفترة لأنه الاقتران الأصلي متصل عندها
عادي لو كتبناها [٠، ١] $\cup$ [١، ٢]

س٤ : $ق'(س) = هـ(س)$ $هـ'(س) = -ق(س)$

$ل(س) = ق^٢(س) + هـ^٢(س) + س^٢$

$ل'(س) = ٢ق(س)ق'(س) + ٢هـ(س)هـ'(س) + ٢س$

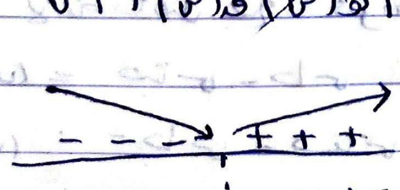
$= ٢ق(س)هـ(س) - ٢هـ(س)ق(س) + ٢س$

$= ٢س$

$ل'(س) = ٠$

$٢س = ٠$

$س = ٠$



فترة التزايد [٠، ∞[

فترة التناقص]-∞، ٠]

س١ : ق(س) متزايد ← ق'(س) > ٠

ل(س) = ق(س² - ٤س)

ل(س) متصل على مجاله لأن ق(س) قابل للاشتقاق

ل'(س) = ق'(س² - ٤س) × ٢س - ٤

= (+) × ٢س - ٤

٢س - ٤ = ٠

٢س = ٤

س = ٢

- - - | + + +
٢

ل(س) متزايد ∀ س ∈ [٢، ∞[

متناقص ∀ س ∈]-∞، ٢]

س٢ : ق(س) متناقص ← ق'(س) < ٠ ∀ س ∈]٠، ٤[

يقع في الربع الرابع ← ق(س) < ٠ ∀ س ∈ [٠، ٤]

ه(س) متزايد ← ه'(س) > ٠ ∀ س ∈]٠، ٤[

يقع في الربع الأول ← ه(س) > ٠ ∀ س ∈ [٠، ٤]

(ق(س) × ه(س))' = ق'(س) ه(س) + ه'(س) ق(س)

= (-) × (+) + (+) × (-)

= (-) + (-)

= (-) متناقص ∀ س ∈ [٠، ٤]

س٣ : التزايد والتناقص لـ ق(س)

ق(س) = جاس + جتاس [٠، $\frac{\pi}{2}$]

متصل لأنه حاصل جمع اقترانين دائريين متصلين

ق'(س) = جتاس - جاس

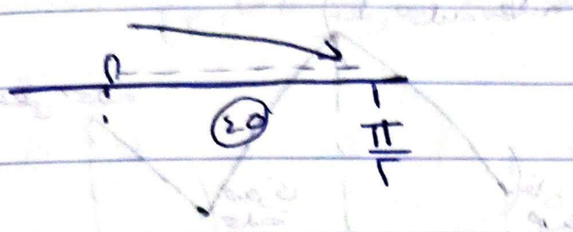
ق''(س) = - جاس - جتاس = ٠

$\frac{\text{-جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$

- ظا س = ١

ظا س = -١

س = ١٣٥ = $\frac{٣\pi}{٤}$ $\notin$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]



متناقصة $\forall$ س $\in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

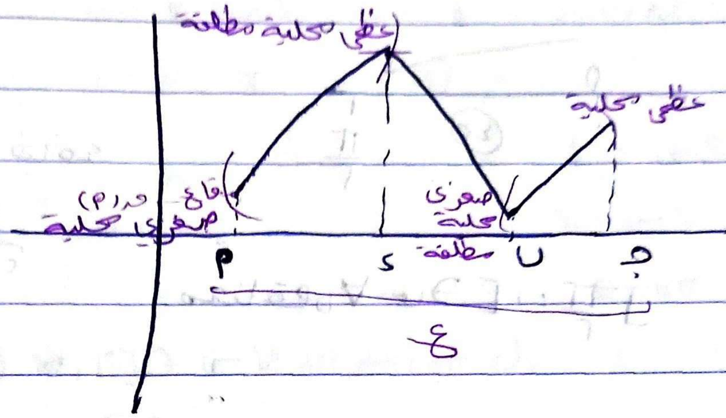
قَ(٤٥) = - جا٤٥ - جتا٤٥

= $-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

= $\ominus$

القيم القصوى

التعريف | المشتقة الأولى



النقط الحرجة :

هي النقط (م ، ق(م)) التي يكون عندها

1. م ∈ مجال الاقتران (معرف عندها)
2. ق'(س) = صفر
   = غ.م

مثال (٣) ص (٦٧) : $[-1 ، 3]$

ق(س) = { $س^2 - 3$ ، $-1 \leq س \leq 2$
$3 - س$ ، $2 < س \leq 3$

نبحث في الاتصال

ق(س) في الفترات المفتوحة

ق(٢) $\overset{?}{=}$ $\lim_{س \to 2^+}$ ق(س) $\overset{?}{=}$ $\lim_{س \to 2^-}$ ق(س)

٤ - ٣ $\overset{?}{=}$ ٣ - ٢ $\overset{?}{=}$ ٤ - ٣

١ = ١ = ١ ق(س) متصل عند س = ٢

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س & -١ < س < ٢ \\ -١ & ٢ < س < ٣ \\ \text{غ.م} & س = ١ ، ٣ ، ٢ \end{cases}$$

لا تنتمي للمجال]-١، ٣[

ق(٢)$^+$ ≟ ق(٢)$^-$

-١ ≠ ٤ ق(٢) غ.م

ق(س) = ٠

٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈]-١، ٢[

النقاط الحرجة

(٣، ق(٣)) = (٣، ٠)

(٢، ق(٢)) = (٢، ١)

(٠، ق(٠)) = (٠، -٣)

مثال (٤) ص (٦٧):

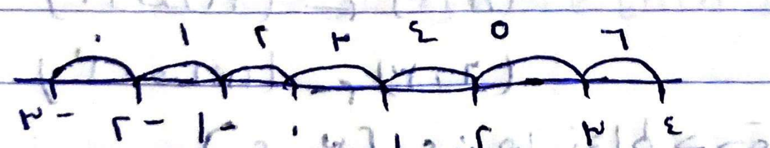
$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ & ١ \leq س \leq ٢ \\ [س+٣] & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$ في [١، ٣]

نعيد تعريف [٣+س]

٣+س = ٠

$\boxed{س = -٣}$

ل = $\frac{١}{|أ|}$ = ١



$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ & ١ \leq س \leq ٢ \\ ٥ & ٢ < س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$$

نقطة ⇐ (٣، ٦)

نبحث في الاتصال

ق(س) متصل في الفترات المفتوحة

نبحث في الاتصال عند نقطة تحول س=٢

ق(٢) ≟ نها ق(س) (س←٢+) ≟ نها ق(س) (س←٢-)

٨ ≠ ٥ ≠ ٨ ، ∴ غ. متصل

ق(٣) ≟ نها ق(س) (س←٣-)

٦ ≠ ٥ ∴ غ. متصل من يسار ٣

ق'(س) = { ٣س² ، ١ > س > ٢
٠ ، ٢ > س > ٣ ، ٦
غ.م ، ١، ٢، ٣ }

ق'(س) = ٠
٣س² = ٠
س = ٠ لا مرفوضة ∉]١، ٢[

ق'(س) = ٠
٠ = ٠
[٢، ٣] نقاط حرجة

النقاط الحرجة

(١، ق(١)) ← (١، ١)

(٢، ق(٢)) ← (٢، ٨)

(٣، ق(٣)) ← (٣، ٦)

[٢، ٣] عندها نقاط حرجة

تمارين ص(١٧٤) :

س : ١) ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

ق(س) متصل ∀ س ∈ [−٢ ، ٣] لأنه كثير حدود

ق'(س) = س^{٢} − ٢س

ق'(س) = ٠

س^{٢} − ٢س = ٠

س (س − ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

ق'(س) غ.م عند أطراف الفترة −٢ ، ٣

النقاط الحرجة :

(٠ ، ق(٠)) ← (٠ ، $\frac{١}{٣}$) ٠ − ٠ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

(٢ ، ق(٢)) ← (٢ ، −١) $\frac{٨}{٣}$ − ٤ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$ − $\frac{١٢}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{-٤+١}{٣}$

(−٢ ، ق(−٢)) ← (−٢ ، $-\frac{١٩}{٣}$) $-\frac{٨}{٣}$ − $\frac{١٢}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{-٢٠+١}{٣}$ = $\frac{-١٩}{٣}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = −١

(٣ ، ق(٣)) ← (٣ ، $\frac{١}{٣}$) $\frac{٢٧}{٣}$ − ٩ + $\frac{١}{٣}$ = ٩ − ٩ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

٢) ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [−٨ ، ٨]

ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

ق(س) متصل ∀ س ∈ [−٨ ، ٨] لأنه معرف على مجاله

ق'(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$

= $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

ق'(س) = ٠

$\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$ = $\frac{٠}{١}$ ، ٢ ≠ ٠

لا يوجد أصفار للمشتقة

قَ(س) غ.م عند أطراف الفترة -٨ ، ٨

قَ(س) غ.م عند صفر المقام $3\sqrt[3]{س} = ٠$

س = ٠

النقاط الحرجة

(-٨ ، ق(-٨)) ← (-٨ ، ٤) ، ق(-٨) = $\sqrt[3]{٦٤}$ = ٤

(٠ ، ق(٠)) ← (٠ ، ٠) ، ق(٠) = $\sqrt[3]{٠}$ = ٠

(٨ ، ق(٨)) ← (٨ ، ٤) ، ق(٨) = $\sqrt[3]{٦٤}$ = ٤

إذا كان ق(س) = $س^{\frac{2}{3}}$

ق(س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$

نحدد المجال س ∈ ح

خطوات إيجاد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة.

① البحث في الاتصال

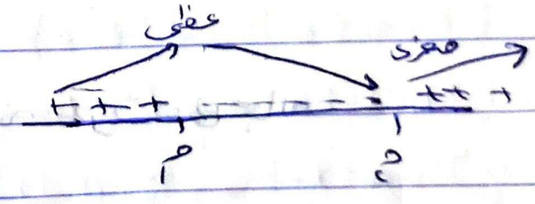
② إيجاد المشتقة الأولى

③ البحث في إشارة قَ(س)

قَ(س) = ٠ ومنها نعين النقاط الحرجة

= غ.م

④



مثال ١ : ق(س) = $س^{3} + س^{2} - ٥س - ٥$

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = $٣س^{2} + ٢س - ٥$

قَ(س) = ٠

$٣س^{2} + ٢س - ٥ = ٠$ ، ×

(٣س + ٥)(س − ١) = ٠

إما ٣س + ٥ = ٠ ← س = $\frac{-٥}{٣}$

أو س − ١ = ٠

س = ١

ق'(س) ∈ ح لا توجد نقاط حرجة

عظمى محلية سلوك ق(س)　　　　صغرى محلية

إشارة ق'(س)　+ + + + + +　− − − − − − −　+ + + +

$\frac{-٥}{٣}$　　　　　　　١

ق($\frac{-٥}{٣}$) عظمى محلية ، ق(١) صغرى محلية

مثال (٦) ص (٦٩):

ق(س) = (٨ − س) $\sqrt[٣]{س}$

ق(س) متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين (كثير حدود ومعرف على مجاله جذر تكعيبي)

ق'(س) = −١ × $\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ × (٨ − س)

صفر = − س$^{\frac{١}{٣}}$ + $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ (٨ − س)

س$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٨ - س}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$

س$^{\frac{١}{٣}}$ × ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٨ − س

٣ س$^{\frac{٣}{٣}}$ = ٨ − س

٣س = ٨ − س

+س　　　+س

٤س = ٨

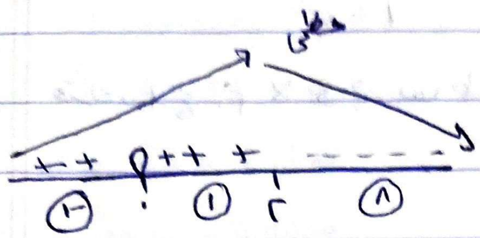
$\boxed{س = ٢}$

قَ(س) = ٠ = $-$ س$^{\frac{1}{3}}$ + $\dfrac{\text{٨} - \text{س}}{\text{٣س}^{\frac{2}{3}}}$

عند س = ٠

قَ(٠) = غ.م

صفر المقام للمشتقة



قَ(٠) = غ.م لأنه صفر المقام

قَ(١) = $-$١ + $\dfrac{\text{٨} - \text{١}}{\text{٣} \times \text{١}}$

$-$١ + $\dfrac{\text{٧}}{\text{٣}}$ ، ٢ +

قَ(٨) = سالب

ق(٢) عظمى محلية

∴ نقطة حرجة ولكنه ليس قيمة قصوى

مثال (٧) ص (٦٩):

ق(س) = $\dfrac{\text{س}^2 + \text{٣}}{\text{س} - \text{١}}$ ، س ≠ ١

نحدد مجال ق(س) ← اقتران نسبي ← ح / {أصفار المقام}

س − ١ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = \text{١}}$

∴ مجال ق(س) = ح / {١}

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح / {١} لأنه معرف على مجاله

قَ(س) = $\dfrac{\text{٢س(س} - \text{١)} - \text{١(س}^2 + \text{٣)}}{\text{(س} - \text{١)}^2}$ = $\dfrac{\text{٢س}^2 - \text{٢س} - \text{س}^2 - \text{٣}}{\text{(س} - \text{١)}^2}$

$= \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{(س - ١)^{٢}} = \frac{\text{إشارة ترميمي}}{\text{مربع كامل} ⊕}$

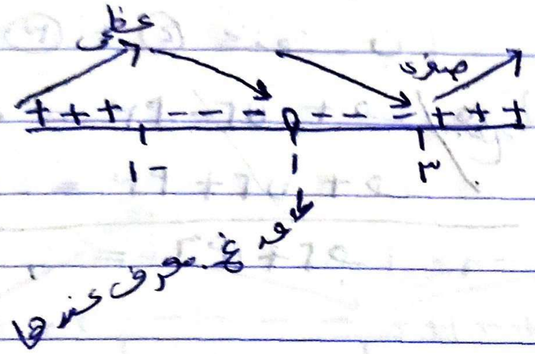
دَ(س) = ٠

س٢ - ٢س - ٣ = ٠

(س - ٣) (س + ١) = ٠

س = -١ س = ٣

د(س) غ.م عند س = ١



د(-١) عظمى محلية

$د(-١) = \frac{٤}{-٢} = -٢$

د(٣) صغرى محلية

$= \frac{١٢}{٢} = ٦$

مثال ١٨ ص ٧٠ (٧٠):

د(س) = أس³ + ب س² + جـ س + د

د(-١) = ٢ عظمى ، د(١) = -١ صغرى د كثير حدود

دَ(-١) = ٠ ، دَ(١) = ٠ متصل وقابل للاشتقاق

قيمة قصوى ← نقطة حرجة
∈ مجال د

د(-١) = ٢ د(م) = ٠

٢ = -أ + ب - جـ + د ---- ①

د(١) = -١

-١ = أ + ب + جـ + د ---- ②

د(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + جـ

د(-١) = ٣أ - ٢ب + جـ

٠ = ٣أ - ٢ب + جـ ... (٣)

د(١) = ٠

٠ = ٣أ + ٢ب + جـ ... (٤)

بحل (٣) + (٤) بحذف ب

٠ = ٣أ - $\cancel{٢ب}$ + جـ

٠ = ٣أ + $\cancel{٢ب}$ + جـ بالجمع

٠ = ٦أ + ٢جـ ... (٥)

بحل (١) + (٢)

-٢ = +أ - ب + جـ - د

-١ = أ + ب + جـ + د بالجمع

-٣ = ٢أ + ٢جـ ... (٦)

بحل (٥) + (٦)

٠ = -٦أ - $\cancel{٢جـ}$

-٣ = ٢أ + $\cancel{٢جـ}$ بالجمع

-٣ = -٤أ

أ = ٣/٤

(٥) ٠ = ٦أ + ٢جـ

٠ = ٦ × ٣/٤ + ٢جـ

٠ = ٩/٢ + ٢جـ

-٩/٢ = ٢جـ

-٩/٢ × ١/٢ = جـ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = -٩/٤}$

(٤) ٠ = ٣أ + ٢ب + جـ

٠ = ٣ × ٣/٤ + ٢ب - ٩/٤

٠ = ٩/٤ + ٢ب - ٩/٤

٠ = ٢ب ⟸ $\boxed{\text{ب} = ٠}$

(١) -٢ = -أ + ب - جـ + د

٢ = -٣/٤ + ٠ + ٩/٤ + د

٢ = ٦/٤ + د

د = ٢ - ٣/٢ ⟸ $\boxed{\text{د} = ١/٢}$

س٢ : ص(٧٤) :

(٢) د(س) = $س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، س ∈ ح

د(س) متصلة ∀ س ∈ ح لأنها كثيرة حدود

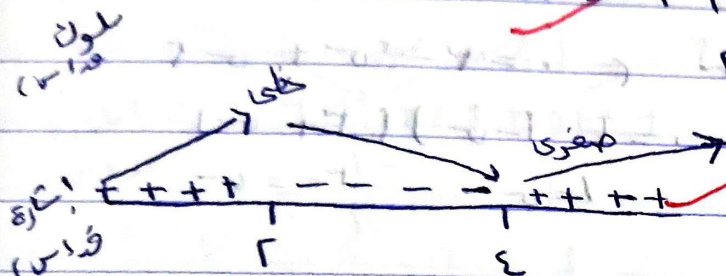
$د'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

$٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤ = ٠$

$س^{٢} - ٦س + ٨ = ٠$

(س - ٤)(س - ٢) = ٠

س = ٤   س = ٢



د(٢) عظمى محلية = ٨ - ٣٦ + ٤٨ = ٢٠

د(٤) صغرى محلية = ٦٤ - ٩×١٦ + ٢٤×٤ = ١٦

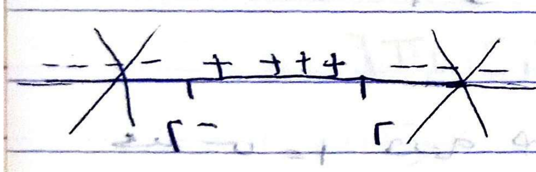
(٧) $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

$٤ - س^{٢} \geq ٠$

$٤ - س^{٢} = ٠$

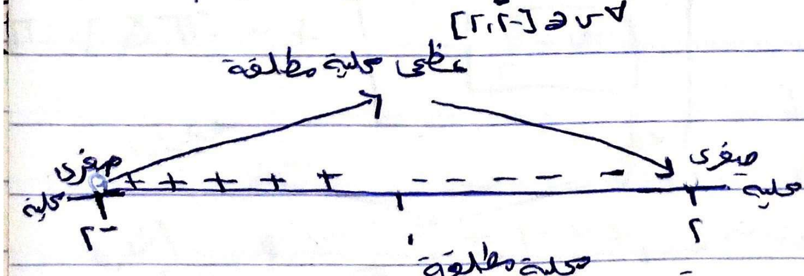
(٢ - س)(٢ + س) = ٠

س = ٢   س = -٢   مجال د(س) [-٢ ، ٢]



د(س) متصلة لأنه معرف على مجاله ∀ س ∈ [-٢ ، ٢]

$د'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}}$



د'(س) = ٠

$\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} = ٠$

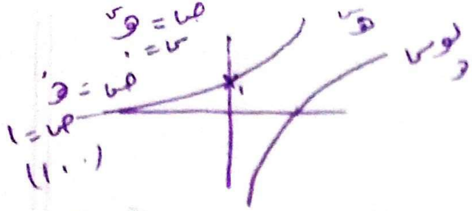
-٢س = ٠

س = ٠

د(٠) قيمة عظمى = $\sqrt{٤ - ٠} = \sqrt{٤} = ٢$

د(٢) = $\sqrt{٤-٤}$ = ٠ صغرى محلية مطلقة

د(-٢) = $\sqrt{٤-٤}$ = ٠ صغرى محلية مطلقة



④ $ق(س) = (س^2 - ٣)\, هـ^س$ ، س ∈ ح

ق(س) متصل لأن ح لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين (كثير حدود واقتران أسي طبيعي)

$ق'(س) = ٢س\, هـ^س + هـ^س (س^2 - ٣)$

$٢س\, هـ^س + هـ^س (س^2 - ٣) = ٠$

$هـ^س (٢س + س^2 - ٣) = ٠$

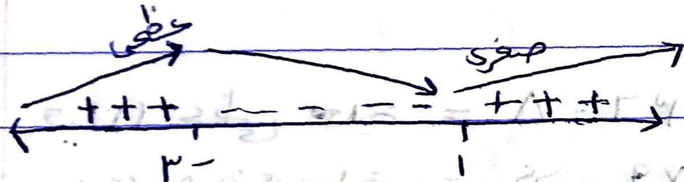
$هـ^س \neq ٠$

$٢س + س^2 - ٣ = ٠ \Leftarrow س^2 + ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = -٣$ ، $س = ١$

هـ^س دائماً (+)



عند $س = -٣$ قيمة عظمى

$ق(-٣) = (٩ - ٣)\, هـ^{-٣}$

$= ٦\, هـ^{-٣} = \frac{٦}{هـ^٣}$

عند $س = ١$ قيمة صغرى

$ق(١) = -٢\, هـ^١$

$= -٢هـ$

① ق(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح \ {١} لأنه معرف على مجاله

ق(س) = $\frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س - ١)}$

ق(س) = $س^٢$ + س + ١

قَ(س) = ٢س + ١

٢س + ١ = ٠

٢س = −١

$\boxed{س = \frac{-١}{٢}}$

سلوك ق(س): صغرى

إشارة قَ(س): − − − − (عند $\frac{-١}{٢}$) + + + + + + + +

ق($\frac{-١}{٢}$) = $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + ١$
= $\frac{١}{٤} - \frac{٢}{٤} + \frac{٤}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

⑤ ق(س) = $جتا^٢$س − $جا^٢$س ، س ∈ [٠ ، π]

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، π] لأنه دائري

$\boxed{ق(س) = جتا ٢س}$

قَ(س) = −٢ جا ٢س ∀ س ∈]٠ ، π[

قَ(س) = ٠

−٢ جا ٢س = ٠

جا ٢س = ٠

٢س = ٠

∴ س = ٠ ∉]٠ ، π[

٢س = π	٢س = ٢π
$\boxed{س = \frac{π}{٢}}$	∴ س = π ∉]٠ ، π[

سلوك ق(س): عظمى ، صغرى ، عظمى

إشارة قَ(س): ٠ − − − − ($\frac{π}{٤}$) $\frac{π}{٢}$ + + + + ($\frac{٣π}{٤}$) ($\frac{٢π}{٣}$) π

ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية مطلقة

ق($\frac{π}{٢}$) = −١ قيمة صغرى محلية مطلقة

ق(π) = ١ قيمة عظمى محلية مطلقة

قَ($\frac{π}{٤}$) = −٢ جا ٢ × $\frac{π}{٤}$ = −٢ جا $\frac{π}{٢}$ = −٢ × ١ = −٢

قَ($\frac{٢π}{٣}$) = −٢ × جا ٢ × $\frac{٢π}{٣}$ = −٢ جا $\frac{٤π}{٣}$ = ⊖ × ⊖ = ⊕

قَ($\frac{٣π}{٤}$) = −٢ جا ٢ × $\frac{٣π}{٤}$
= −٢ جا $\frac{٣π}{٢}$ = −٢ × −١ = ٢

⑨ ق(س) = $هـ^{-(س-٢)^٢}$ ، س ∈ ح

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران أسي طبيعي

ق̀(س) = $-٢(س-٢)\ هـ^{-(س-٢)^٢}$

ق̀(س) = ٠

$-٢(س-٢)\ هـ^{-(س-٢)^٢} = ٠$

$هـ^{-(س-٢)^٢} \neq ٠$

$-٢(س-٢) = ٠$

س - ٢ = ٠

$\boxed{س = ٢}$

سلوك ق(س) ↗ عظمى ↘

إشارة ق̀(س): + + + + | - - - -

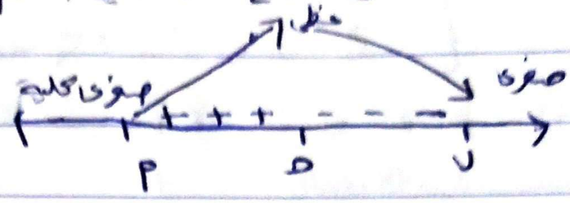
٢

ق(٢) = $هـ^٠$ = ١ قيمة عظمى محلية

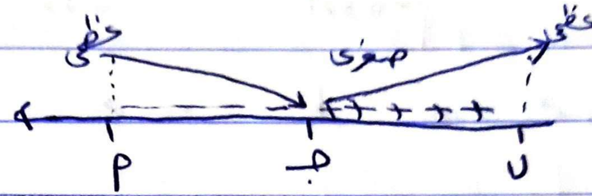
ملاحظة:
إذا كان ق(س) متصل على [أ،ب]
فإنه يوجد قيم قصوى مطلقة
وما عدا ذلك لا يوجد مطلقة

تحديد القيم القصوى المطلقة :

* د متصل على [أ، ب] فإنه توجد قيم مطلقة



* بداية تزايد د(أ) صغرى محلية
* نهاية تناقص د(ب) صغرى محلية



** بداية تناقص ← عظمى

** نهاية تزايد ← عظمى

* أصغر قيمة د(س) ← صغرى مطلقة
* أكبر قيمة د(س) ← عظمى مطلقة

مثال : د(س) = س³ − ٣س + ٩ ، [−٢، ٣]

حدد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت)

د(س) متصل ∀ س ∈ [−٢، ٣] لأنه كثير حدود

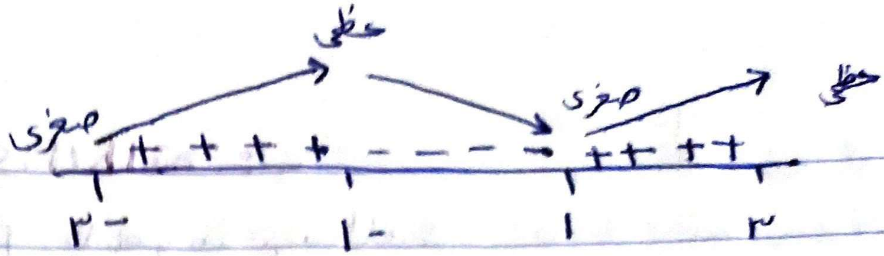
د'(س) = ٣س² − ٣

د'(س) = ٠

٣س² − ٣ = ٠

س² = ١

س = ∓ ١



$د(-٣) = (-٣)^{٣} - ٣ \times -٣ + ٩$

$= -٢٧ + ٩ + ٩$

$= -٢٧ + ١٨$

$= -٩$ صغرى محلية مطلقة

$د(-١) = (-١)^{٣} - ٣ \times -١ + ٩$

$= -١ + ٣ + ٩$

$= -١ + ١٢$

$= ١١$ عظمى محلية

$د(١) = (١)^{٣} - ٣ \times ١ + ٩$

$= ١ - ٣ + ٩$

$= ٧$ صغرى محلية

$د(٣) = (٣)^{٣} - ٣(٣) + ٩$

$= ٢٧ - ٩ + ٩$

$= ٢٧$ عظمى محلية مطلقة

مثال (٩) ص (٧٠) :

د(س) = { س^٢ ، -١ ≤ س ≤ ٢
٤ ، ٢ < س < ٣

[-١ ، ٣]

نبحث في الاتصال

د(س) متصل في الفترات المفتوحة لأنه كثير حدود

د(٢) ؟ نها د(س) ؟ نها د(س)
س←٢+ ، س←٢-

٤ = ٤ = ٤ ∴ د(س) متصل عند س = ٢

د'(س) = { ٢س ، -١ < س < ٢
٠ ، ٢ < س < ٣
غ.م ، س = -١ ، ٣ ، ٢

لا تنتمي الى المجال

د'(٢)^+ ؟ د'(٢)^-

٠ ≠ ٤

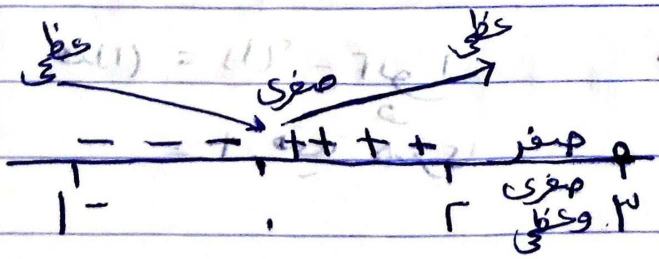
د'(س) = ٠

٢س = ٠

س = ٠ ∈]-١ ، ٢[

د'(س) = ٠ = ٠]٢ ، ٣[فنقاط حرجة

النقاط الحرجة (-١ ، د(-١)) ، (٢ ، د(٢)) ، ∀ س ∈]٢ ، ٣[



د(-١) عظمى محلية

د(٠) صغرى كلية

د(٢) عظمى محلية

]٢ ، ٣[صغرى وعظمى

مثال (١٠) ص (٧١):

ق(س) = س² - ٢ لوهـ س ، س ∈ [١، ٥]

ق(س) متصل ∀ س ∈ [١، ٥] لأنه حاصل طرح متصلين (كثير حدود ولوغاريتم)

قَ(س) = ٢س - $\frac{٢}{س}$

قَ(س) = ٠

٢س - $\frac{٢}{س}$ = ٠

+$\frac{٢}{س}$ +$\frac{٢}{س}$

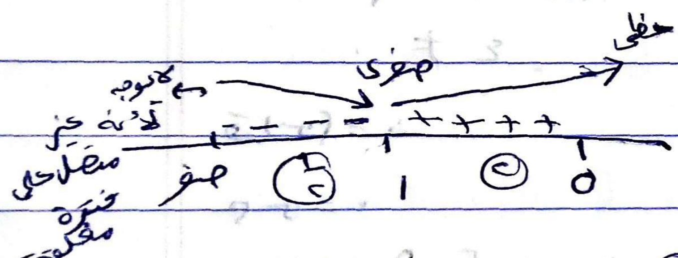
٢س = $\frac{٢}{س}$

٢ = ٢س²

س² = ١

$\boxed{س = \pm ١}$ ، -١ ×

قَ(س) غ.م عند صفر، ٥



قَ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٢}{\frac{١}{٢}}$ = ١ - ٤ = -

قَ(٢) = ٢×٢ - $\frac{٢}{٢}$ = ٤ - ١ = +

ق(١) = (١)² - ٢ لوهـ ١

= ١ قيمة صغرى

ق(٥) = (٥)² - ٢ لوهـ ٥

= ٢٥ - ٢ لوهـ ٥ قيمة عظمى

مثال (11) ص (٤٥) :

$$د(س) = \begin{cases} س^3 & ، -1 \le س < 1 \\ \frac{1}{2} & ، س = 1 \end{cases}$$

$(1 ، \frac{1}{2})$ $س \in [-1 ، 1]$

د(س) متصلة على $[-1 ، 1[$ لأنه كثير حدود

$د(1) \overset{?}{=} \lim_{س \to 1^-} د(س)$

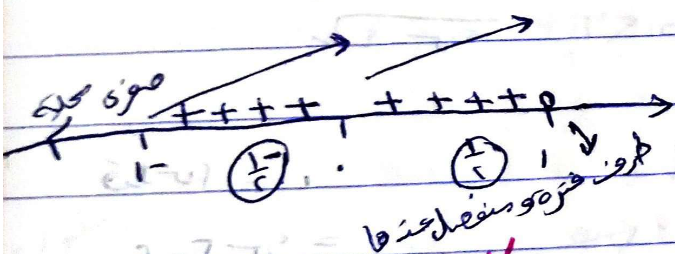
$\frac{1}{2} \neq 1$ د(س) غير متصلة من اليسار 1

$$د'(س) = \begin{cases} 3س^2 & ، -1 < س < 1 \\ غ.م & ، -1 ، 1 \end{cases}$$

$د'(س) = 0$

$3س^2 = 0 \Leftarrow \boxed{س = 0} \in]-1 ، 1[$

النقاط الحرجة عند $س = -1 ، 0 ، 1$



د(-1) صغرى محلية

د(0) ليست قيمة قصوى

لأن د'(س) لم تغير من إشارتها حولها

$د(1) \boxed{<} \lim_{س \to 1^-} د(س)$

$\frac{1}{2} \boxed{<} 1$ ، صغرى محلية

د $\boxed{>}$ نها = عظمى

د $\boxed{<}$ نها = صغرى

مثال (١٢) ص(٧٣):

$د(س) = س . \sqrt{٤ - س^٢}$

نحدد المجال

$٤ - س^٢ \geq ٠$

$٤ - س^٢ = ٠$

$س^٢ = ٤$

$س = \pm ٢$

$د(س)$ متصلة $\forall$ $س \in [-٢ ، ٢]$

$د'(س) = \sqrt{٤ - س^٢} + \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}} \times س$

$= \sqrt{٤ - س^٢} + \frac{-س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

$د'(س) = \frac{٤ - س^٢ - س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

$= \frac{٤ - ٢س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}} = \frac{\text{إشارة تربيعي}}{(+)}$

$د'(س) = ٠$

$٤ - ٢س^٢ = ٠$

$٢س^٢ = ٤$

$س^٢ = ٢$

$س = \pm \sqrt{٢} \in]-٢ ، ٢[$

عظمى   صغرى   عظمى   صغرى

$- - - \quad + + + \quad - - -$

$-٢ \qquad -\sqrt{٢} \qquad \sqrt{٢} \qquad ٢$

$د(-٢) = -٢ \sqrt{٠} = ٠$ عظمى محلية

$د(-\sqrt{٢}) = -\sqrt{٢} \sqrt{٤ - ٢} = -٢$ صغرى محلية مطلقة

$د(\sqrt{٢}) = ٢$ عظمى محلية مطلقة

$د(٢) = ٠$ صغرى محلية

أكبر قيمة ٢

أصغر قيمة -٢

س٣ : (أ) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س + ٤ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

س^٢ متصلة ∀ س ∈ [٠ ، ٢[لأنه كثير حدود

س + ٤ متصلة ∀ س ∈]٢ ، ٣] لأنه كثير حدود

ق(٢) $\overset{?}{=}$ $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) $\overset{?}{=}$ $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

٨ = ٨ = ٨

ق(س) متصلة عند س = ٢ ∴ ق(س) متصلة ∀ س ∈ [٠ ، ٣]

ق'(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٣ \\ غ.م & ، س = ٠ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$

ق'(٢)^- $\overset{?}{=}$ ق'(٢)^+

١٢ ≠ ٤ ق'(٢) غ.م

ق'(س) = ٠

حينما ٠ < س < ٢	حينما ٢ < س < ٣
٣س^٢ = ٠	٢س = ٠
س = ٠ ✗	س = ٠ ✗

ق(٠) = ٠ صغرى محلية مطلقة - أو طرفية

ق(٣) = ١٣ عظمى محلية مطلقة و طرفية

سلوك ق(س)

صغرى عظمى

+ + + + + + + + + + +

٠ ٢ ٣

إشارة ق'(س)

مشتقة ضرب

$ص = هـ^{س}$	$ص = هـ \, س$	$ص = هـ^{س} \, س$
$ص' = هـ^{س}$	$ص' = هـ$	$ص' = س \, هـ^{س} + ١ \times هـ^{س}$

⑦ $ق(س) = هـ^{س} - هـ \, س \quad ، س \in [٠ ، ٣]$

ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، ٣] لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين لأنه أسي (طبيعي وكثير حدود)

$ق'(س) = هـ^{س} - هـ \quad \forall \, س \in]٠ ، ٣[$

$ق'(س) = ٠$

$هـ^{س} - هـ = ٠$

$هـ^{س} = هـ$

$\boxed{س = ١}$

عظمى ← مطلقة صغرى → عظمى

– – – – + + + +

٠ ، ١ ، ٣

$ق(٠) = ١ = هـ^{٠} = ١$ عظمى محلية $\quad ق'(٢) = هـ^{٢} - هـ = (+)$

$ق(١) = هـ - هـ = ٠$ صغرى محلية مطلقة (أصغر قيمة) $\quad ق'(\frac{١}{٢}) = هـ^{\frac{١}{٢}} - هـ = (-)$

$ق(٣) = هـ^{٣} - ٣هـ$ عظمى محلية مطلقة (أكبر قيمة)

⑧ $ق(س) = جتا س - \frac{١}{٣} جتا^{٣} س \quad ، س \in [\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$

ق(س) متصل ∀ س ∈ $[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$ لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين (دائري)

$ق'(س) = -جا س + جتا^{٢} س \, جا س \Leftarrow جا س(-١ + جتا^{٢} س) = ٠$

$= -جا س + (١ - جا^{٢} س) جا س$

$= -\cancel{جا س} + \cancel{جا س} - جا^{٣} س = -جا^{٣} س$

$جا س = ٠ ، س = \pi \quad | \quad -١ + جتا^{٢} س = ٠ ، جتا^{٢} س = ١$

$جتا س = ١ \Leftarrow س = ٠ \times$

$جتا س = -١ \Leftarrow س = \pi \checkmark$

$ق'(س) = ٠$

$-جا^{٣} س = ٠$

$جا س = ٠$

$س = \pi$

عظمى ← صغرى → عظمى

– – – – + + + +

$\frac{\pi}{٢} ، \frac{٥\pi}{٦} ، \pi ، \frac{٧\pi}{٦} ، \frac{٣\pi}{٢}$

$ق'(\frac{٥\pi}{٦}) = -جا \frac{٥\pi}{٦} + جا \frac{٥\pi}{٦} \, جتا^{٢} \frac{٥\pi}{٦} = -\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times (\frac{-\sqrt{٣}}{٢})^{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٨} = -\frac{٤}{٨} + \frac{٣}{٨} = -\frac{١}{٨}$ (–)

$ق'(\frac{٧\pi}{٦}) = -جا \frac{٧\pi}{٦} + جا \frac{٧\pi}{٦} \, جتا^{٢} \frac{٧\pi}{٦} = -\times -\frac{١}{٢} + -\frac{١}{٢} \times (\frac{-\sqrt{٣}}{٢})^{٢} = \frac{٤}{٨} - \frac{٣}{٨} = \frac{١}{٨}$ (+)

$ق(\frac{\pi}{٢}) = جتا \frac{\pi}{٢} - \frac{١}{٣} جتا^{٣} \frac{\pi}{٢} = ٠$ عظمى مطلقة (الرقمية)

$ق(\pi) = جتا \pi - \frac{١}{٣} جتا^{٣} \pi = -\frac{٢}{٣}$ صغرى مطلقة (صغرى)

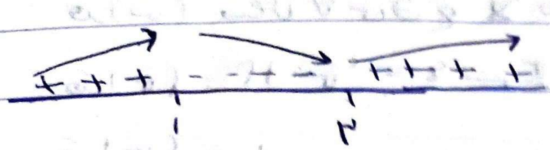
$ق(\frac{٣\pi}{٢}) = جتا \frac{٣\pi}{٢} - \frac{١}{٣} جتا^{٣} \frac{٣\pi}{٢} = ٠$ عظمى مطلقة

$-١ - \frac{١}{٣}(-١)^{٣} = -١ + \frac{١}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

مثال: ق(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + ٩ س + ١

قيمة عظمى محلية عند س = ١

قيمة صغرى محلية عند س = ٣



١ ، ٣ نقاط حرجة

ق'(١) = ٠ ، ق'(٣) = ٠

ق'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + ٩

٣أ + ٢ب + ٩

٠ = ٣أ + ٢ب + ٩ ---(١)

ق'(٣) = ٢٧أ + ٦ب + ٩

٠/٣ = ٢٧أ/٣ + ٦ب/٣ + ٩/٣

٠ = ٩أ + ٢ب + ٣ ---(٢)

-٣أ + -٢ب = ٩

٩أ + ٢ب = -٣

٦أ = ٦

$\boxed{أ = ١}$

٣ + ٢ب + ٩ = ٠

٢ب = -١٢

$\boxed{ب = -٦}$

مثـ : ق(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩

ق(س) متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٢} - ٤س^{٣}

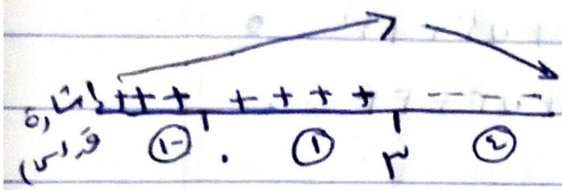
قَ(س) = ٠

١٢س^{٢} - ٤س^{٣} = ٠

٤س^{٢}(٣ - س) = ٠

٤س^{٢} = ٠ | ٣ - س = ٠

س = ٠ | $\boxed{\text{س = ٣}}$



قَ(١) = ١٢ - ٤ = ٨ +

قَ(-١) = ١٢ + ٤ = ١٦ +

قَ(٤) = ١٢(١٦) - ٤(٦٤)

= ١٩٢ - ٢٥٦ -

ق(٣) عظمى محلية

ق(٣) = ٤×٢٧ - ٨١ - ٢٩

= ١٠٨ - ٨١ - ٢٩

= -٢

-٢ ≥ ق(س) ∀ ح

بالتالي ق(س) سالب