التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى

تعريف:

أولاً: المشتقة الأولى تعني هندسياً ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند أي نقطة أي أن $م_{المماس} = ق'(س)$

ثانياً: ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند $س = س_1$ $= م_{المماس}\big|_{س=س_1} = ق'(س_1)$

ثالثاً: ميل المستقيم العمودي على المماس $= م_{العمودي} = \frac{-1}{م_{المماس}} = \frac{-1}{ق'(س_1)}$

رابعاً: معادلة المماس هي $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ق(س_1)$ ، $ق'(س_1)$ ، $\boxed{}$

خامساً: معادلة العمودي على المماس عند نقطة التماس هي

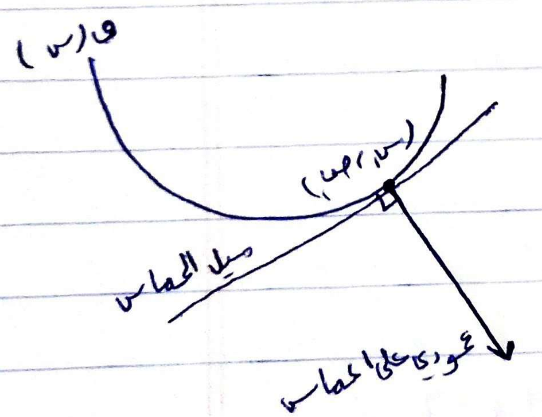
$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

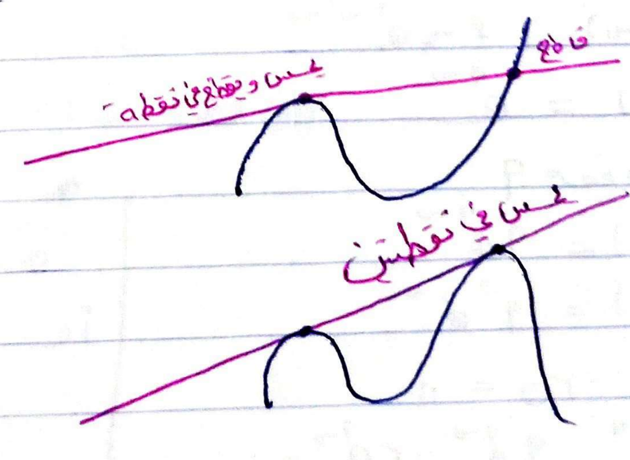
$ق(س_1)$ ، $\frac{-1}{ق'(س_1)}$ ، $\boxed{}$

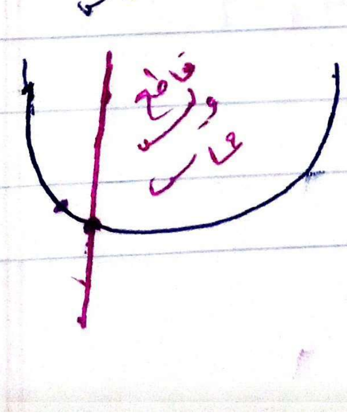
سادساً: يكون المستقيم ل مماس لمنحنى ق(س) إذا كان:

أ- ل يقطع ق(س) مرة على الأقل

ب- ميل ل يساوي ق'(س) عند نقطة التقاطع







الميل = ق'(س₁)

م المماس = ق'(س₁)

م₁ (س = س₁) = ق'(س₁)

م العمودي = $\frac{-1}{\text{م المماس}}$ = $\frac{-1}{\text{ق}'(\text{س}_1)}$

أوجدي معادلة المماس والعمودي على المماس والمرسوم لمنحنى الاقتران:

ق(س) = س٣ − ٢س٢ + ٥ ، س = −٢

س₁ = −٢

ص − ص₁ = م(س − س₁)

ص₁ = ق(−٢) = −٨ − ٨ + ٥ = $\boxed{-11}$

م = ق'(س) = ٣س٢ − ٤س

م₁ (س = −٢) = ق'(−٢) = ١٢ + ٨ = $\boxed{20}$

ص − −١١ = ٢٠(س − −٢)

ص = ٢٠س + ٢٩

معادلة العمودي هي: ص + ١١ = $\frac{-1}{20}$ (س + ٢)

إذا كان ق(س) = ٤جاس − ٣جتاس ، أوجدي معادلة المماس والعمودي على المماس عند نقطة التماس س = π

س₁ = π

ص₁ = ق(π) = ٤جاπ − ٣جتاπ

= ٤(٠) − ٣(−١) = $\boxed{3}$

ص − ص₁ = م(س − س₁)

م = ق'(س) = ٤جتاس + ٣جاس

م = ق'(π) = ٤جتاπ + ٣جاπ

= $\boxed{-4}$

ص − ٣ = −٤(س − π)

العمودي: ص − ٣ = $\frac{1}{4}$ (س − π)

* أوجدي معادلة المماس والعمودي على المماس والمرسوم لمنحنى الاقتران عندما $س = هـ^2$

$ق(س) = \frac{لو س}{هـ} \Big|_{س=هـ^2}$

$س_1 = هـ^2$

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ق(هـ^2)$ $قَ(هـ^2)$ $هـ^2$

$ص_1 = ق(هـ^2) = \frac{لو هـ^2}{هـ} = \frac{2}{هـ}$

$م = قَ(س) = \frac{1}{س}$

$م = قَ(هـ^2) = \frac{1}{هـ^2}$

$ص - 2 = \frac{1}{هـ^2}(س - هـ^2)$

العمودي: $ص - 2 = -هـ^2(س - هـ^2)$

* أوجدي معادلة المماس المرسوم عند نقاط تقاطع منحنى $ق(س) = س^2 - 7س + 12$ مع محور السينات

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ق(س_1)$ $قَ(س)$ ؟؟

نجد نقاط التماس التي تمثل أصفار الاقتران $ق(س)$

$س^2 - 7س + 12 = 0$

$(س-4)(س-3) = 0$

$س = 4, 3$

$س_1 = 4$ ، $ص_1 = 0$

$قَ(س) = 2س - 7$

$م = قَ(4) = 8 - 7 = 1$

$ص = 1(س - 4)$

$س_2 = 3$ ، $ص_1 = 0$

$م = قَ(3) = 6 - 7 = -1$

$ص = -1(س - 3)$

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ٣س − ٥ مع المستقيم ص = ٢س + ١

ص − ص١ = م (س − س١)

ق(س١) ، ق̀(س١) ، ؟؟

نجد نقاط التماس وهي نقاط تقاطع منحنى ق(س) مع المستقيم ص

لإيجاد نقاط التقاطع نحل المعادلة ق(س) = ص

لأي منحنيان يتقاطعان هذا يعني أن قيمهما متساوية

ق(س) = ص

س² + ٣س − ٥ = ٢س + ١

س² + س − ٦ = ٠

(س + ٣)(س − ٢) = ٠

س = −٣ ، س = ٢

س١ = −٣

ص١ = ق(−٣) = −٥

م = ق̀(س) = ٢س + ٣

ق̀(−٣) = −٦ + ٣ = −٣

ص + ٥ = −٣ (س + ٣)

س٢ = ٢

ص٢ = ق(٢) = ٥

م = ق̀(٢) = ٧

ص − ٥ = ٧ (س − ٢)

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ٥س + ٧ والذي زاوية ميله هـ = $\frac{\pi}{4}$

ص − ص١ = م (س − س١)

ق(س١) ق̀(س١) ؟؟

م المماس = ظا هـ

ق̀(س١) = ظا $\frac{\pi}{4}$

٢س١ + ٥ = $\boxed{1}$ ⇐ س١ = $\boxed{-2}$

ص١ = ق(−٢) = ٤ − ١٠ + ٧ = ١

ص − ١ = ١ (س + ٢)

ص = س + ٣

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = س² + ٤س − ٥

والموازي للمستقيم ص = ٤ − ٢س

ص − ص١ = م(س − س١)

ق(س١) ق̄(س١) ؟؟

المماس // المستقيم

م المماس = م المستقيم

ق̄(س١) = −٢   لو عمودي لكان ½

٢س١ + ٤ = −٢ ⟸ س١ = −٣

ص١ = ق(−٣) = ٩ − ١٢ − ٥ = −٨

ص + ٨ = −٢(س + ٣)

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + س − ٥

والعمودي على المستقيم ص = ⅓ س + ٢

ص − ص١ = م(س − س١)

ق(س١) ق̄(س١) ؟؟

المماس ⊥ المستقيم

م المماس = −١ / م المستقيم

ق̄(س١) = −١ / ⅓

ق̄(س١) = −٣

٢س١ + ١ = −٣

٢س١ = −٤ ⟸ س١ = −٢

ص١ = ق(س١) = (−٢)² + −٢ − ٥

= ٤ − ٢ − ٥ = −٣

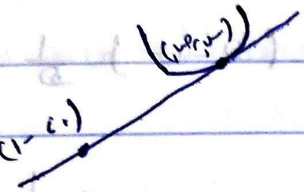
ص + ٣ = −٣(س + ٢)

م ٣ جبر ١

* أوجدي معادلة المستقيم المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ٣ والمار بالنقطة (٠، -١)

note

في صيغة السؤال من النقطة، والمار بالنقطة تعني أن هذه النقطة ليست نقطة التماس
عند النقطة ← نقطة التماس



ص - ص١ = م(س - س١)

ق(س١) ، ق'(س١) ؟؟

م = ق'(س١) = Δص / Δس

٢س١ = (ص١ + ١) / س١

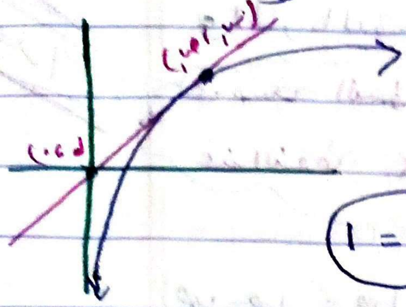
٢س١² = ص١ + ١ ، لكن ص١ = ق(س١) = س١² + ٣

٢س١² = س١² + ٣ + ١

س١² = ٤ ← س١ = ±٢

س١ = ٢ ، ص١ = ق(٢) = ٧	س١ = -٢ ، ص١ = ق(-٢) = ٧
م = ق'(٢) = ٤	م = ق'(-٢) = -٤
ص - ٧ = ٤(س - ٢)	ص - ٧ = -٤(س + ٢)

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $ق(س) = لو_{هـ} س$ والمار بنقطة الأصل



$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ق(س_1) \quad ق'(س_1) \quad ؟؟$

$ص - 1 = \frac{1}{هـ}(س - هـ)$

$ص = \frac{1}{هـ} س$

$م = ق'(س_1) = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\frac{1}{س_1} = \frac{ص_1}{س_1} \Leftarrow ص_1 = 1$

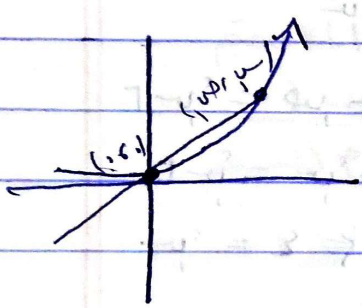
لكن $ص_1 = ق(س_1)$

$\Leftarrow لو_{هـ} س_1 = 1$

$\Leftarrow س_1 = هـ$

$م = ق'(هـ) = \frac{1}{هـ}$

أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $ق(س) = هـ^{س}$ والمار بنقطة الأصل.



$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ق(س_1) \quad ق'(س_1) \quad ؟؟$

$ص - هـ = هـ(س - 1)$

$م = ق'(س_1) = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$هـ^{س_1} = \frac{ص_1}{س_1}$

$ص_1 = هـ^{س_1} \times س_1 \quad , \quad ص_1 = ق(س_1)$

$ق(س_1) = هـ^{س_1} \times س_1$

$\frac{هـ^{س_1}}{هـ^{س_1}} = \frac{س_1 \times هـ^{س_1}}{هـ^{س_1}} \Leftarrow \boxed{س_1 = 1}$

$م = ق'(س_1) = ق'(1) = هـ^1 = هـ$

① إذا كان المستقيم ص = م س + ب مماس لمنحنى ق(س) عند س = س١

فإن :

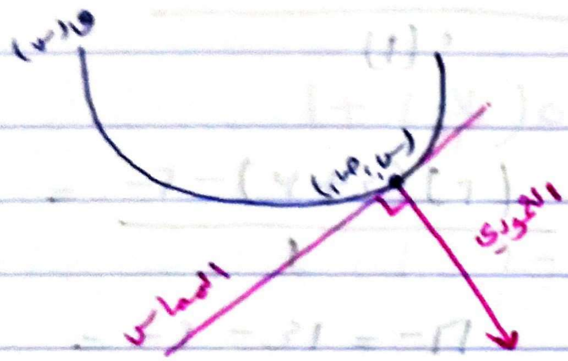
أولاً: ص١ = ق(س١) = م س١ + ب

ثانياً: ق̀(س١) = $م_{المماس}$ = م

② إذا كان المستقيم ص = م س + ب عمودي على المماس عند نقطة التماس س = س١ فإن :

أولاً: ق(س١) = ص١ = م س١ + ب

ثانياً: ق̀(س١) = $\frac{-1}{م_{العمودي}}$ = $\frac{-1}{م}$



س : إذا كان ق(س) = س٢ ك(س) + ٣ س − ٢

وكانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى ك(س) عند س = −٢ هي

ص = ٢ س + ٨ أوجد ق̀(−٢)

معادلة المماس | ص = ٢س + ٨ ، س = −٢ ق̀(−٢)

ق̀(س) = س٢ ك̀(س) + ك(س) × ٢ س + ٣

ق̀(−٢) = ٤ ك̀(−٢) + ك(−٢) × −٤ + ٣

= ٤(٢) + (٤ × −٤) + ٣

= −٥

ك(−٢) = ص١ = ٢(−٢) + ٨ = ٤

ك̀(−٢) = $م_{المماس}$ = ٢

س : إذا كان $ع(س) = \frac{٣ + ل(س)}{س^٢ - ٢س + ١}$ ، وكانت معادلة العمودي على المماس

والمرسوم لمنحنى ل(س) عند نقطة التماس س = ٢ هي $ص = \frac{١}{٢}س + ٣$

: وجدي $عَ(٢)$

$$عَ(س) = \frac{(س^٢ - ٢س + ١)(لَ(س)) - (٣ + ل(س))(٢س - ٢)}{(س^٢ - ٢س + ١)^٢}$$

$$عَ(٢) = \frac{لَ(٢) - (٣ + ل(٢))(٢)}{(١)^٢}$$

$ل(٢) = ص_١ = \frac{١}{٢}(٢) + ٣ = ٤$

$لَ(٢) = \frac{-١}{م_{العمودي}} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}} = -٢$

$$= \frac{-٢ - (٣ + ٤)(٢)}{١}$$

$$= -٢ - ١٤ = -١٦$$

س : إذا كان $ع(س) = س^٢ + ٣س + أ$ أوجدي قيمة أ التي تجعل المستقيم $ص = ٥س + ٢$ مماس لمنحنى ع(س)

$ع(س_١) = ص_١$

$س_١^٢ + ٣س_١ + أ = ٥س_١ + ٢$ ...... ①

$عَ(س) = م_{المماس}$

$٢س_١ + ٣ = ٥ \Leftarrow ٢س_١ = ٢$

$س_١ = ١$

بتعويض قيمة $س_١ = ١$ في معادلة ①

$١ + ٣ + أ = ٥ + ٢$

$أ = \boxed{٣}$

س: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{م}\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٥$

أوجدي قيمة م التي تجعل المستقيم $\text{ص} = ٥\,\text{س} + ١$ مماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}_{١}) = \text{ص}_{١}$

$\text{م}\,\text{س}_{١}^{٢} - ٢\,\text{س}_{١} + ٥ = ٥\,\text{س}_{١} + ١ \quad \text{--} ①$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{م}$ المماس

$٢\,\text{م}\,\text{س} - ٢ = ٥$

$٢\,\text{م}\,\text{س} = ٧ \Leftarrow \text{س} = \dfrac{٧}{٢\text{م}}$

بتعويض قيمة س في معادلة ①

$$\text{م}\left(\frac{٧}{٢\text{م}}\right)^{٢} - \cancel{٢}\left(\frac{٧}{\cancel{٢}\text{م}}\right) + ٥ = ٥\left(\frac{٧}{٢\text{م}}\right) + ١$$

$$\frac{٤٩}{٤\text{م}} - \frac{٧\times ٤}{٤\times\text{م}} - \frac{٣٥\times ٢}{٢\text{م}\times ٢} = -٤$$

$$\frac{٤٩ - ٢٨ - ٧٠}{٤\text{م}} = -٤$$

$$-١٦\,\text{م} = -٤٩$$

$$\text{م} = \frac{٤٩}{١٦}$$

س: إذا كان د(س) = أ س² + ٧ س − ٣ ، أوجدي قيمة أ التي تجعل المستقيم ص = س + ٥ عمودي على المماس عند نقطة التماس.

د(س١) = ص١

أ س١² + ٧ س١ − ٣ = س١ + ٥ ـــ ①

د̄(س١) = $\frac{-١}{م \text{ العمودي}}$ = $\frac{-١}{١}$

٢أ س١ + ٧ = −١

س١ = $\frac{-٨}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{أ}$

أ × $\left(\frac{-٤}{أ}\right)^٢$ + ٧ $\left(\frac{-٤}{أ}\right)$ − ٣ = $\frac{-٤}{أ}$ + ٥

$\frac{١٦}{أ}$ − $\frac{٢٨}{أ}$ + $\frac{٤}{أ}$ = ٨

$\frac{-٨}{أ}$ = ٨ ⟸ $\frac{٨أ}{٨}$ = $\frac{-٨}{٨}$

$\boxed{أ = -١}$

م٣

س٣: إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٥)، (٤، ١١) يمس منحنى الاقتران ق(س) = أ س^{٢} + ٥س − ٧ أوجدي قيمة أ

نجد أولاً معادلة المماس من خلال النقطتين (٢، ٥)، (٤، ١١)

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٢} = \frac{١١ - ٥}{٤ - ٢}$$

$$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٢} = \frac{٣}{١}$$

$$\text{ص} - ٥ = ٣\text{س} - ٦$$

$$\text{ص} = ٣\text{س} - ١$$

$$\text{ق}(\text{س}_١) = \text{ص}_١$$

$$\text{أ}\,\text{س}_١^{٢} + ٥\text{س}_١ - ٧ = ٣\text{س}_١ - ١ \quad \cdots (1)$$

$$\text{ق}'(\text{س}_١) = \text{م}_{\text{المماس}}$$

$$٢\text{أ}\,\text{س}_١ + ٥ = ٣ \Leftarrow ٢\text{أ}\,\text{س}_١ = -٢$$

$$\boxed{\text{س}_١ = \frac{-١}{\text{أ}}}$$

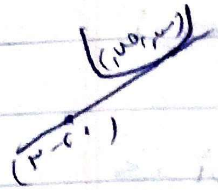
$$\text{أ}\left(\frac{-١}{\text{أ}}\right)^{٢} + ٥\left(\frac{-١}{\text{أ}}\right) - ٧ = ٣\left(\frac{-١}{\text{أ}}\right) - ١$$

$$\frac{١}{\text{أ}} - \frac{٥}{\text{أ}} + \frac{٣}{\text{أ}} = ٦$$

$$\frac{-١}{\text{أ}} = \frac{٦}{١}$$

$$\boxed{\text{أ} = \frac{-١}{٦}}$$

٣: أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ١
من النقطة (٠، -٣)



$$م_{المماس} = ق'(س_1) = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$٢س_1 = \frac{ص_1 + ٣}{س_1}$$

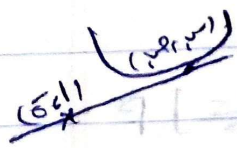
$٢س_1^2 = ص_1 + ٣$ لكن $ص_1 = ق(س_1) = س_1^2 + ١$

$$٢س_1^2 = س_1^2 + ١ + ٣$$

$$س_1^2 = ٤ \Leftarrow س_1 = \pm ٢$$

$س_1 = ٢$	$س_1 = -٢$
$ص_1 = ق(٢) = ٥$	$ص_1 = ق(-٢) = ٥$
$م = ق'(س) = ٢س$	$م = ق'(-٢) = -٤$
$ق'(٢) = ٤$	$ص + ٥ = -٤(س_1 + ٢)$
$ص - ٥ = ٤(س - ٢)$	

٤: بيّني أنه يمكن رسم مماسان ~~للاقتران~~ لمنحنى الاقتران ق(س) = س² - ٢س + ٣
من النقطة (١، ٥)



$$م_{المماس} = ق'(س_1) = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$٢س_1 - ٢ = \frac{ص_1 - ٥}{س_1 - ١}$$

$٢س_1^2 - ٢س_1 - ٢س_1 + ٢ = ص_1 + ٥$ لكن $ص_1 = ق(س_1) = س_1^2 - ٢س_1 + ٣$

$$٢س_1^2 - ٤س_1 + ٢ = س_1^2 - ٢س_1 + ٣ + ٥$$

$$س_1^2 - ٢س_1 - ٦ = ٠ \therefore$$

أ = ١ ب = -٢ جـ = -٦

$ب^2 - 4أجـ = 4 - 4(1)(-6) = 28$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{2أ} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$\therefore س_1 = \frac{2 + \sqrt{28}}{2} \quad أو \quad س_2 = \frac{2 - \sqrt{28}}{2}$$

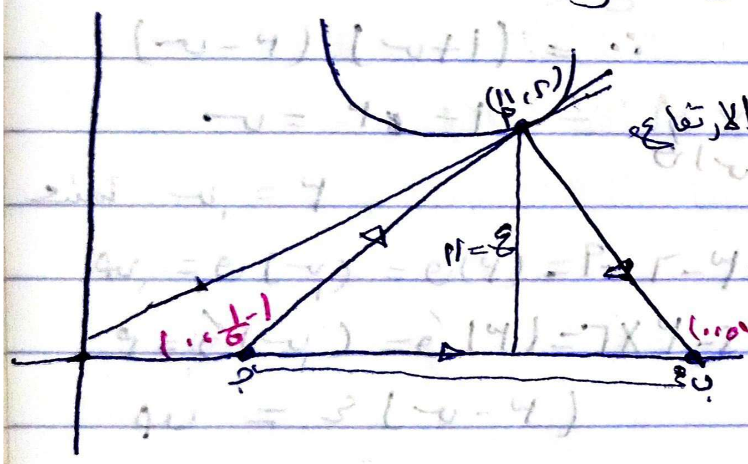
$\sqrt{4 \times 7}$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2} \quad أو \quad \frac{2 - 2\sqrt{7}}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{7} \quad أو \quad 1 - \sqrt{7}$$

∴ يوجد مماسان.

س: أوجدي مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي على المماس والمرسوم لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + س + 5$ عندما $س = 2$.



مساحة Δ أبجـ $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2}$ (بجـ) (١١)

لإيجاد جـ نجد معادلة المماس:

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص_1 = 11$ ، $م = ق'(2)$ ، $س_1 = 2$

$م = ق'(س) = 2س + 1 \Leftarrow ق'(2) = 5$

$ص - 11 = 5(س - 2)$

$ص = 5س + 1 = ... \therefore$

$س = -\frac{1}{5}$

∴ الإجابة (ب) نجد معادلة العمودي

$ص - ١١ = \frac{١}{٥}(س - ٢)$

$ص = \frac{١}{٥}س + \frac{٢}{٥} + ١١ = -\frac{١}{٥}س + \frac{٥٧}{٥} = ٠$

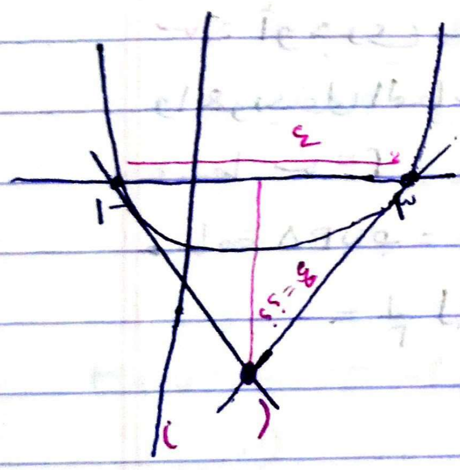
$+\frac{١}{٥}س = \frac{٥٧}{٥}$

∴ $ب ج = \Delta س = ٥٧ - -\frac{١}{٥} = ٥٧,٢$

∴ مساحة Δ أ ب ج $= \frac{١}{٢} \times ٥٧,٢ \times ١١ = ٣١٤,٦$

مهم جداً

س٦: أوجدي مساحة المثلث المكون من محور السينات ونقطة تقاطع المماسان المرسومان لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ عند نقاط تقاطعه مع محور السينات:



$ق(س) = س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ ، -١$

$ق'(س) = ٢س - ٢$

عندما $س_١ = ٣$

$ص_١ = ق(س_١) = ق(٣) = ٩ - ٦ - ٣ = ٠$

$م = ق'(س_١) = ق'(٣) = ٢ \times ٣ - ٢ = ٤$

$ص = ٤(س - ٣)$

~~عندما ص =~~

عندما $س_١ = -١$

$ص_١ = ق(-١) = ١ + ٢ - ٣ = ٠$

$م = ق'(-١) = ٢ \times -١ - ٢ = -٢ - ٢ = -٤$

$ص = -٤(س + ١)$

٤(س − ٣) = −٤(س + ١)

٤س − ١٢ = −٤س − ٤

+٤س   +٤س

٨س = ١٢ − ٤

٨س = ٨ ⇐ س = ١

م ب = ٤(س − ٣)

= ٤ (١ − ٣)

= ٤ × −٢ = −٨

ع = ± ٨

مساحة Δ م ب ب = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × م ب × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٨ = ١٦

ملاحظة:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين فإن ق(س) يمس منحنى هـ(س) عندما س = س$_{1}$ إذا كان

أولاً: ق(س$_{1}$) = هـ(س$_{1}$)

ثانياً: قَ(س$_{1}$) = هَ(س$_{1}$)

هندسياً: يكون منحنى ق(س) يمس منحنى هـ(س) إذا كان هنالك مماس مشترك بين المنحنيين عند نقطة التقاطع

سؤال: إذا كان ق(س) = [هـ(س) + ٢س] [ل(س) + س^{2}].
وكان لمنحنى كل من الاقترانين هـ(س)، ل(س) مماس أفقي مشترك عند النقطة (-٢، ٣) أوجد قَ(-٢)

قَ(س) = [هـ(س) + ٢س] [لَ(س) + ٢س] + [ل(س) + س^{2}] [هَ(س) + ٢]

قَ(-٢) = [هـ(-٢) + -٤] [لَ(-٢) + -٤] + [ل(-٢) + ٤] [هَ(-٢) + ٢]

= [٣ - ٤] [٠ + -٤] + [٣ + ٤] [٠ + ٢]

= ٤ + ١٤ = ١٨

عند (-٢، ٣)

مماس أفقي مشترك لـ هـ(س)، ل(س)

هـ(-٢) = ل(-٢) = ٣

لَ(-٢) = هَ(-٢) = $\boxed{٠}$

لأن المماس أفقي ميله صفر والميل هو المشتقة

سؤال: إذا كان $$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + \text{ل}(\text{س})}{٣ + \text{هـ}(\text{س})}$$

وكان المستقيم ص = ٢س − ٥ مماس مشترك لمنحنى ل(س)، هـ(س) عندما س = ٣ ، أوجدي ق̄(٣)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(٣ + \text{هـ}(\text{س}))(١ + \text{ل}'(\text{س})) + (\text{س} + \text{ل}(\text{س}))(\text{هـ}'(\text{س}))}{(٣ + \text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٣) = \frac{(٣ + \text{هـ}(٣))(١ + \text{ل}'(٣)) + (٣ + \text{ل}(٣))\ \text{هـ}'(٣)}{(٣ + \text{هـ}(٣))^{٢}}$$

ص = ٢س − ٥

مماس مشترك لـ ل(س)، هـ(س)

ل(س) = هـ(س)

ل(٣) = هـ(٣) = ١

ل'(س) = هـ'(س) = م = ٢

ل'(٣) = هـ'(٣) = ٢

$$\text{ق}'(٣) = \frac{(٣+١)(١+٢) + (٣+١)(٢)}{(٣+١)^{٢}}$$

$$= \frac{٤\times٣ + ٤\times٢}{(٤)^{٢}} = \frac{١٢ + ٨}{١٦} = \frac{٢٠}{١٦} = \frac{٥}{٤}$$

التطبيقات الفيزيائية للمشتقات

تعريف : إذا تحرك جسم من نقطة وحسب العلاقة ف(ن) حيث ف الإزاحة (بعد الجسم عن نقطة الانطلاق) ن الزمن فإن :

① السرعة المتوسطة $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

② السرعة اللحظية $= ع(ن) = فَ(ن)$

③ التسارع المتوسط $= \bar{ت} = \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(ن_٢) - ع(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

④ التسارع اللحظي $= ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن)$

ملاحظات :

- السرعة الابتدائية ، التسارع الابتدائي ، الإزاحة الابتدائية عند ن = صفر
- يعكس الجسم اتجاه حركته (عندما يتوقف لحظياً عن الحركة ع(ن) = ٠) وتتغير إشارة السرعة من سالب قبل التوقف إلى موجب بعد التوقف أو العكس
- تكون السرعة موجبة عندما يتحرك الجسم مبتعداً عن نقطة الانطلاق وسالبة عندما يتحرك الجسم عندما يتحرك الجسم مقترباً من نقطة الانطلاق
- المسافة = الإزاحة إذا تحرك الجسم باتجاه واحد دون أن يعكس اتجاه حركته

سؤال : يتحرك جسم في خط المستقيم حسب العلاقة

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^3 - \text{ن}^2 + 5\text{ن} + 2$

أوجدي: ① السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط في الثواني الثلاث الأولى

② سرعة وتسارع وإزاحة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة

① $\text{ن}_1 = 0 \quad \text{ن}_2 = 3$

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$$

$$= \frac{\text{ف}(3) - \text{ف}(0)}{3 - 0}$$

$$= \frac{35 - 2}{3} = \frac{33}{3} = \boxed{11} \text{ وحدة سرعة}$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = \text{ف}'(\text{ن}) = 3\text{ن}^2 - 2\text{ن} + 5$$

$$\bar{\text{ت}} = \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ع}(\text{ن}_2) - \text{ع}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$$

$$= \frac{\text{ع}(3) - \text{ع}(0)}{3 - 0} = \frac{26 - 5}{3} = \frac{21}{3} = 7 \text{ وحدة تسارع}$$

② $\text{ع}(2) = 12 - 4 + 5 = 13$

$\text{ت}(\text{ن}) = \text{ع}'(\text{ن}) = 6\text{ن} - 2$

$\text{ت}(2) = 12 - 2 = 10$

$\text{ف}(2) = 8 - 4 + 10 + 2 = 16$

يتحرك جسم في خط مستقيم وحسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \text{جا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن} + \text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن}$

أوجدي : ① السرعة الابتدائية والتسارع الابتدائي .

② سرعة وتسارع هذا الجسم عندما ن = ٢

① ن = ٠

$$\text{ع}(\text{ن}) = \text{فَ}(\text{ن}) = \frac{\pi}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن} - \frac{\pi}{2}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن}$$

$$\text{ع}(0) = \frac{\pi}{2}\,\text{جتا}\,0 - \frac{\pi}{2}\,\text{جا}\,0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ت}(\text{ن}) = \text{عَ}(\text{ن}) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن}\right)$$

$$= \frac{-\pi^2}{4}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن} - \frac{\pi^2}{4}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{ن}$$

$$\text{ت}(0) = \frac{-\pi^2}{4}\,\text{جا}\,0 - \frac{\pi^2}{4}\,\text{جتا}\,0 = \frac{-\pi^2}{4}$$

② ن = ٢

$$\text{ع}(2) = \frac{\pi}{2}\,\text{جتا}\,\pi - \frac{\pi}{2}\,\text{جا}\,\pi$$

$$= \frac{-\pi}{2}$$

$$\text{ت}(2) = \frac{-\pi^2}{4}\,\text{جا}\,\pi - \frac{\pi^2}{4}\,\text{جتا}\,\pi$$

$$= 0 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

عند قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة تقع على سطح الأرض وسقوطه على سطح الأرض فإن

أولاً : ف (ن) = ارتفاع الجسم عن سطح الأرض

ثانياً : لحظة الانطلاق عندما ن = ٠

ثالثاً : يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما ع(ن) = ٠

رابعاً : يرتطم الجسم في الأرض عندما ف(ن) = ٠

خامساً : المسافة التي يقطعها الجسم وهو صاعد = ف (ن)

والمسافة التي يقطعها الجسم وهو هابط = ٢ × أقصى ارتفاع − ف (ن)

سادساً : لإيجاد سرعة الجسم وهو على ارتفاع م وحدة عن سطح الأرض

نجعل ف (ن) = م ، ويكون هنالك زمانان مختلفان

سابعاً : لإيجاد سرعة الجسم عندما يقطع مسافة مقدارها ل

أ- إذا كانت ل أقل أو تساوي أقصى ارتفاع نجعل ف(ن) = ل

ونختار الزمن الأصغر

ب- إذا كانت ل أكبر من أقصى ارتفاع نجعل

ف (ن) = ٢ × أقصى ارتفاع − ل ونختار الزمن الأكبر

ثامناً : تكون السرعة موجبة والجسم صاعد

وسالبة عندما يكون الجسم هابط

سؤال : قذف جسم رأسيا للأعلى من نقطة من سطح الأرض وسقط على سطح الأرض فإذا كان ارتفاعه في أي لحظة ف = ٥٠ ن - ٥ ن² أوجد :

١- السرعة الابتدائية
٢- أقصى ارتفاع يصل إليه هذا الجسم
٣- سرعة الجسم لحظة الارتطام بالأرض
٤- المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٤ ث ، ٧ ث
٥- سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٨٠ وحدة من سطح الأرض
٦- سرعة الجسم عندما يقطع مسافة مقدارها ٢١٥ وحدة
٧- الفترات الزمنية التي تكون فيها السرعة موجبة والفترات الزمنية التي تكون فيها السرعة سالبة .

ف = ٥٠ ن - ٥ ن²

① ن = ٠

ع(ن) = ف' = ٥٠ - ١٠ ن

ع(٠) = ٥٠ - ٠ = $\boxed{٥٠}$

② عند أقصى ارتفاع ⟸ ع(ن) = ٠

٥٠ - ١٠ ن = ٠ ⟸ ن = ٥

أقصى ارتفاع = ف(٥) = ٢٥٠ - ١٢٥ = ١٢٥

③ يرتطم الجسم بالأرض عندما ف(ن) = ٠

٥٠ ن - ٥ ن² = ٠ ⟸ ٥ ن (١٠ - ن) = ٠

ن = ~~٠~~ ، ١٠

ع(١٠) = ٥٠ - ١٠٠ = -٥٠

السرعات على الخط الأفقي متساوية في المقدار ومتعاكسة في الاتجاه

(٤) ن = ٤ ، ٤ < ٥ ⇐ الجسم صاعد
المسافة = ف(٤) = ٢٠٠ − ٨٠ = ١٢٠

ن = ٧ > ٥ ⇐ الجسم هابط
∴ المسافة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٧)
= ٢(١٢٥) − [٣٥٠ − ٢٤٥]
= ٢٥٠ − ١٠٥ = $\boxed{١٤٥}$

(٥) ف(ن) = ٨٠
٥٠ن − ٥ن² = ٨٠
٥ن² − ٥٠ن + ٨٠ = ٠ ÷ ٥
ن² − ١٠ن + ١٦ = ٠
(ن − ٨)(ن − ٢) = ٠
ن = ٨ ، ن = ٢
ع(٢) = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠
ع(٨) = ٥٠ − ٨٠ = −٣٠

(٦) المسافة = ٢٠٥ > ١٢٥ ⇐ الجسم هابط
ف(ن) = ٢ × أقصى ارتفاع − المسافة
٥٠ن − ٥ن² = ٢٥٠ − ٢٠٥ = ٤٥
٥ن² − ٥٠ن + ٤٥ = ٠ ⇐ ن² − ١٠ن + ٩ = ٠
(ن − ١)(ن − ٩) = ٠ ⇐ ن = ~~١~~ ، ٩
ع(٩) = ٥٠ − (٩٠) = −٤٠

(٧) السرعة موجبة عند ن ∈ [٠ ، ٥[
السرعة سالبة عندما ن ∈]٥ ، ١٠]

قُذف جسم رأسياً للأعلى وحسب العلاقة $ف(ن) = ٣٠ن - م ن^{٢}$

فإذا كان أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يساوي ٤٥ وحدة

أوجدي: ١- قيمة م

٢- سرعة الجسم بعد ٢ث

٣- المسافة المقطوعة بعد ٤ث

(١) عند أقصى ارتفاع $\Leftarrow$ $ع(ن) = ٠$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٣٠ - ٢م ن = ٠$

$٣٠ = ٢م ن \Leftarrow ن = \frac{٣٠}{٢م} = \frac{١٥}{م}$

أقصى ارتفاع $= ف\left(\frac{١٥}{م}\right) = ٤٥$

$٣٠\left(\frac{١٥}{م}\right) - م\left(\frac{١٥}{م}\right)^{٢} = ٤٥$

$\frac{٤٥٠}{م} - \frac{٢٢٥}{م} = ٤٥$

$\frac{٢٢٥}{م} = ٤٥ \Leftarrow م = \frac{٢٢٥}{٤٥} = ٥$

$\therefore ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$

(٢) $ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن$

$ع(٢) = ٣٠ - ٢٠ = ١٠$

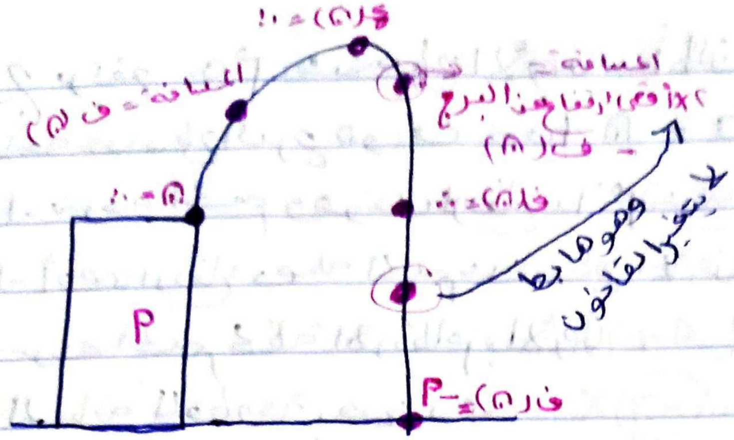
(٣) أقصى ارتفاع عندما $ن = \frac{١٥}{م} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

$ن = ٤ > ٣ \Leftarrow$ الجسم هابط

المسافة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤)

$= ٢(٤٥) - [١٢٠ - ٨٠]$

$= ٩٠ - ٤٠ = ٥٠$



عند قذف جسم عن سطح برج ارتفاعه م وحدة عن سطح الأرض فإن:

١- ف(ن) تمثل ارتفاع الجسم عن سطح البرج

٢- لحظة الانطلاق عندما ن = ٠

٣- يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عن سطح البرج عندما ع(ن) = ٠

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = أقصى ارتفاع عن سطح البرج + م

٤- ف(ن) = ٠ ، عندما يكون الجسم على مستوى سطح البرج

٥- يرتطم الجسم بالأرض عندما ف(ن) = -م

٦- المسافة التي يقطعها الجسم وهو صاعد = ف(ن)

المسافة التي يقطعها الجسم وهو هابط = ٢ × أقصى ارتفاع عن سطح البرج - ف(ن)

٧- لإيجاد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ل وحدة عن سطح البرج

نجعل ف(ن) = ل

لإيجاد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ل وحدة عن سطح الأرض

نجعل ف(ن) = ل - م

من قمة برج يرتفع ٥٠م عن سطح الأرض ، أطلق جسم رأسياً للأعلى
فكان ارتفاعه عن سطح البرج هو ف = ١٥ ن − ٥ ن٢

أوجد : ١- سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠م عن سطح الأرض

٢- أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض

٣- سرعة الجسم لحظة الارتطام بالأرض .

٤- المسافة المقطوعة بعد ٤ ث

٥- المسافة الكلية لحركة هذا الجسم

(١) لإيجاد قيمة ن نجعل ف = ل − م

ف = ٦٠ − ٥٠

١٥ ن − ٥ ن٢ = ١٠

٥ ن٢ − ١٥ ن + ١٠ = ٠

ن٢ − ٣ ن + ٢ = ٠

(ن − ٢) (ن − ١) = ٠

ن = ٢ ، ن = ١

ع(ن) = فَ = ١٥ − ١٠ ن

ع(١) = ١٥ − ١٠ = ٥

ع(٢) = ١٥ − ٢٠ = −٥

(٢) أقصى ارتفاع عندما ع = ٠

١٥ − ١٠ ن = ٠ ⇐ ن = ١,٥

أقصى ارتفاع عن البرج = ف(١,٥) = ٢٢,٥ − ١١,٢٥ = ١١,٢٥

" " للأرض = ٥٠ + ١١,٢٥ = ٦١,٢٥

③ يرتطم الجسم بالأرض عندما ف = −٥٠

١٥ ن − ٥ ن² = −٥٠

٥ ن² − ١٥ ن − ٥٠ = ٠ ÷ ٥

ن² − ٣ ن − ١٠ = صفر

(ن − ٥)(ن + ٢) = ٠

ن = ٥ ، −٢ ×

ع(٥) = ١٥ − ٥٠ = $\boxed{-٣٥}$

④ المسافة عندما ن = ٤ > ١,٥

∴ الجسم هابط

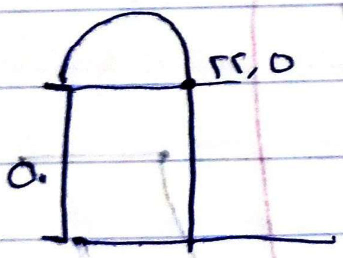
المسافة = ٢ × أقصى ارتفاع عن البرج − ف(٤)

= ٢(١١,٢٥) − (٦٠ − ٨٠)

= ٢٢,٥ − −٢٠ = ٤٢,٥

⑤ المسافة الكلية = ٢ × أقصى ارتفاع عن البرج + ارتفاع البرج

= ٢(١١,٢٥) + ٥٠ = ٧٢,٥



مسافة تمثل

معادلة الحركة فيها عدد ثابت يعني هناك مسافة ابتدائية وهذا العدد هو ارتفاع البرج

من قمة برج أطلق جسم رأسياً للأعلى فكان ارتفاعه عن سطح الأرض في أي لحظة هو ف = ٢٤ + ٦٤ ن − ١٦ ن²
أوجدي أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح البرج

عند أقصى ارتفاع

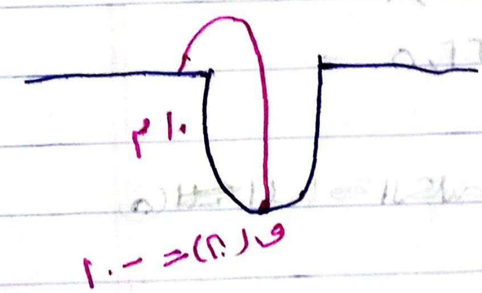
ع(ن) = ٠ ∴   ع(ن) = ف'(ن)

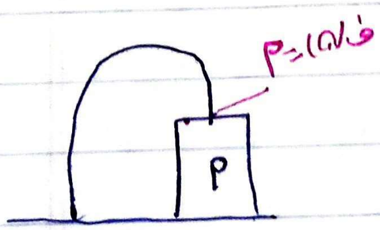
٦٤ − ٣٢ ن = ٠ ∴

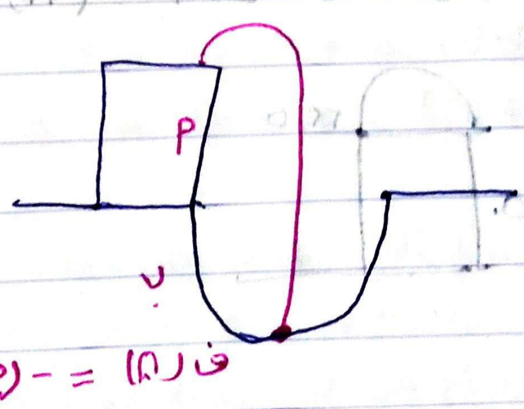
ن = ٢

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ٢٤ + ١٢٨ − ٦٤ = $\boxed{88}$

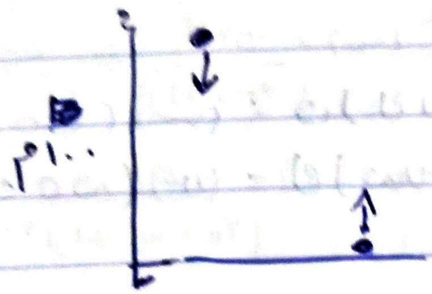
أقصى ارتفاعه عن البرج = ٨٨ − ٢٤ = $\boxed{64}$







من نقطة ترتفع ١٠٠م عن سطح الأرض أسقط جسم للأسفل فكان ف = ٥ ن^٢ وفي نفس اللحظة أطلق جسم من نقطة على سطح الأرض رأسياً للأعلى فكان ف = ٥٠ ن − ٥ ن^٢
أوجد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض (عندما يلتقيان)



يلتقي الجسمان عندما :

ف١ + ف٢ = ١٠٠

٥ن^٢ + ٥٠ن − ٥ن^٢ = ١٠٠

٥٠ن = ١٠٠

ن = ٢

ع١(ن) = ف١َ(ن) = ١٠ ن

ع١(٢) = ١٠ × ٢ = ٢٠

ع٢(ن) = ف٢َ(ن) = ٥٠ − ١٠ن

ع٢(٢) = ٥٠ − ١٠ × ٢ = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠

الاشتقاق السلسلي

أولاً: مشتقة تركيب اقترانين

تركيب اقترانين:

$$\text{أ} \xrightarrow{\text{ل}(\text{س})} \text{ب} \xrightarrow{\text{ق}(\text{س})} \text{جـ}$$

$$\text{أ} \xrightarrow{(\text{ق}\circ\text{ل})(\text{س})} \text{جـ}$$

$(\text{ق}\circ\text{ل})(\text{س}) = \text{ق}(\text{ل}(\text{س}))$

$(\text{ل}\circ\text{ق})(\text{س}) = \text{ل}(\text{ق}(\text{س}))$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 5$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \sqrt{5\text{س}+3}$

$(\text{ق}\circ\text{ل})(\text{س}) = \text{ق}(\text{ل}(\text{س})) = (\text{ل}(\text{س}))^2 + 5 = \left(\sqrt{5\text{س}+3}\right)^2 + 5 = 5\text{س} + 3 + 5 = 5\text{س} + 8$

$(\text{ل}\circ\text{ق})(\text{س}) = \text{ل}(\text{ق}(\text{س})) = \sqrt{5\text{ق}(\text{س}) + 3} = \sqrt{5\text{س}^2 + 28}$

قاعدة: إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للاشتقاق

فإن: $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = (\text{ق}(\text{هـ}(\text{س})))'$

$= \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$

س: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 3\text{س} - 2$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{5}{3\text{س}+1}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س})$ ، $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\text{س})$

$(ق \circ هـ)'(س) = قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)$

$قَ(س) = ٢س + ١$

$قَ(هـ(س)) = ٢هـ(س) + ٣$

$= \frac{١٠}{٢س+١} + ٣$

$= \left(\frac{١٠}{٢س+١} + ٣\right)\left(\frac{-١٠}{(٢س+١)^٢}\right)$

$(هـ \circ ق)'(س) = هـَ(ق(س)) \times قَ(س)$

$هـَ(س) = \frac{-٥ \times ٢}{(٢س+١)^٢} = \frac{-١٠}{(٢س+١)^٢}$

$هـَ(ق(س)) = \frac{-١٥}{(٢ق(س)+١)^٢}$

$= \left(\frac{-١٥}{(٢س^٢+٩س-٥)^٢}\right)(٢س+٣)$

$= \frac{-١٥}{(٢س^٢+٩س-٥)^٢}$

س: إذا كان $ق(س) = هـ^{س^٢+٣}$ ، $هـ(س) = ظا ٣س$

أوجد $(ق \circ هـ)'(س)$

$(ق \circ هـ)'(س) = قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)$

$قَ(س) = ٢س هـ^{س^٢+٣}$

$قَ(هـ(س)) = ٢هـ(س) هـ^{(هـ(س))^٢+٣}$

$= ٢ظا٣س هـ^{(ظا٣س)^٢+٣}$

$هـَ(س) = ٣قا^٢ ٣س$

$= (٢ظا٣س) هـ^{(ظا٣س)^٢+٣} \times ٣قا^٢٣س$

س: $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٣$

$هـ(س) = \sqrt{س^٢ + ٢س + ٤}$

أوجد $(ق \circ هـ)'(-٢)$

$(ق \circ هـ)'(-٢) = قَ(هـ(-٢)) \times هـَ(-٢)$

$= قَ(٢) هـَ(-٢)$

$= ٩ \times \frac{-١}{٢} = \frac{-٩}{٢}$

$قَ(س) = ٣س^٢ - ٣$

$قَ(٢) = ١٢ - ٣ = ٩$

$هـَ(س) = \frac{٢س + ٢}{٢\sqrt{س^٢+٢س+٤}}$

$هـَ(-٢) = \frac{-٢}{٢ \times ٢} = \frac{-١}{٢}$

مشتقة الأول عند الثاني في مشتقة الثاني

س١: ق(س) = لوهـ س^٢ + ١ ، هـ(س) = جتا س

أوجد (ق∘هـ)′(π/٢)

(ق∘هـ)′(π/٢) = ق′(هـ(π/٢)) × هـ′(π/٢)

= ق′(٠) × هـ′(π/٢)

ق′(س) = ٢س / (س^٢ + ١)

ق′(٠) = صفر

= صفر × -١ = صفر

هـ′(س) = -جا س

هـ′(π/٢) = -جا π/٢ = -١

مهم جداً

س٢: ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٥

هـ(س) = س^٢ - ٢س + ١

أوجد (ق∘هـ)″(٢)

(ق∘هـ)′(س) = ق′(هـ(س)) × هـ′(س)

مشتقة تركيبي

(ق∘هـ)″(س) = ق′(هـ(س)) × هـ″(س) + هـ′(س) × ق″(هـ(س)) × هـ′(س)

(ق∘هـ)″(٢) = ق′(هـ(٢)) × هـ″(٢) + (هـ′(٢))^٢ ق″(هـ(٢))

= ق′(١) هـ″(٢) + (هـ′(٢))^٢ × ق″(١)

= (-١ × ٢) + (٤ × ٢) = -٢ + ٨ = ٦

ق′(س) = ٣س^٢ - ٤س

ق′(١) = ٣ - ٤ = -١

ق″(س) = ٦س - ٤

ق″(١) = ٢

هـ′(س) = ٢س - ٢

هـ′(٢) = ٤ - ٢ = ٢

هـ″(س) = ٢

هـ″(٢) = ٢

س٣: ق(س) = س٣ − ٣س٢ + ١   قَ(س) = ٣س٢ − ٦س

أوجدي ما يلي: قً(س) = ٦س − ٦

① (ق ∘ ق)َ(−١) = قَ(ق(−١)) × قَ(−١)

= قَ(٩) × −١٢ = ((٣)(٢٤٣) − ٥٤)(−١٢)

= −٢٢٦٨

② (ق ∘ ق)َ(١) = قَ(ق(١)) × قَ(١)

= قَ(−١) × −٣ = −١٢ × −٣ = $\boxed{٣٦}$

③ (قَ ∘ قَ)َ(٢) = قً($\overset{= \text{صفر}}{\text{قَ(٢)}}$) × قً(٢)

= قً(صفر) × قً(٢)

= −٦ × ٦ = −٣٦

س: ق(س) = س٤ (ل ∘ هـ)(س)

ل(٥) = ٢   لَ(٥) = −١   هـ(٢) = ٥   هـَ(٢) = ٣

أوجدي قَ(٢)

قَ(س) = س٤ (لَ(هـ(س)) × هـَ(س)) + ل(هـ(س)) × ٣س

قَ(٢) = ٤ (لَ(هـ(٢)) هـَ(٢) + ل(هـ(٢))) × ٤

= ٤ لَ(٥) × ٣ + ل(٥) × ٤

= (١٢ × −١) + (٢ × ٤) = −١٢ + ٨ = $\boxed{−٤}$

قانون السلسلة:

إذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

فإن: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

ملاحظات:

١- قانون السلسلة هو مشتقة لتركيب اقترانين من خلال الفرض

٢- يمكن تطبيق قاعدة السلسلة لأكثر من ثلاثة متغيرات

مثال: ص = $ع^{٣} + ٣ع + ٢$ ، ع = $\frac{٥}{٢س + ١}$

أوجدي $\frac{دص}{دس}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= (٣ع^{٢} + ٣)\left(\frac{-٥ \times ٢}{(٢س+١)^{٢}}\right)$$

$$= \left(٣\left(\frac{٥}{٢س+١}\right)^{٢} + ٣\right)\left(\frac{-١٠}{(٢س+١)^{٢}}\right)$$

س: ل = جتا ٢م ، م = $هـ^{ن^{٢}+١}$ أوجدي $\frac{دل}{دن}$

$$\frac{دل}{دن} = \frac{دل}{دم} \times \frac{دم}{دن}$$

$$= -٢جا٢م \times (٢ن\,هـ^{ن^{٢}+١})$$

$$= -٢جا(٢هـ^{ن^{٢}+١})\,(٢ن\,هـ^{ن^{٢}+١})$$

س: $\text{ع} = \sqrt{٥\text{م} + ١}$ ، $\text{م} = \text{ن}^٢ - ٢\text{ن} + ٣$

أوجد $\left.\frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٢}$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{دع}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دن}}$$

$$= \frac{٥}{٢\sqrt{٥\text{م}+١}} \times (٢\text{ن} - ٢) \Bigg|_{\substack{\text{ن}=٢ \\ \text{م}=٣}}$$

$\text{ن} = ٢$

$\text{م} = ٤ - ٤ + ٣$

$= ٣$

$$= \frac{٥}{٢ \times ٤} \times (٤ - ٢)$$

$$= \frac{٥}{٤}$$

ص

س: $\text{ل} = \frac{٥}{٢\text{ن} + ١}$ ، $\text{ن} = \text{م}^٣ - ٤\text{م} + ٢$ ، $\text{م} = \sqrt{\text{ع}^٢ + ٥\text{ع} - ٢}$

أوجد $\left.\frac{\text{دل}}{\text{دع}}\right|_{\text{ع}=١}$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دع}} = \frac{\text{دل}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دع}}$$

$$= \frac{-٥(٢)}{(٢\text{ن}+١)^٢} \times (٣\text{م}^٢ - ٤) \times \left(\frac{٢\text{ع} + ٥}{٢\sqrt{\text{ع}^٢ + ٥\text{ع} - ٢}}\right) \Bigg|_{\substack{\text{ع}=١ \\ \text{م}=٢ \\ \text{ن}=٢}}$$

$$= \frac{\cancel{-١٠}^{\,-٢}}{\cancel{٢٥}_{\,٥}} \times \cancel{٨}^{\,٤} \times \frac{٧}{\cancel{٢ \times ٢}}$$

$$= \frac{-٢٨}{٥}$$

$\text{ع} = ١$

$\text{م} = \sqrt{٤} = ٢$

$\text{ن} = ٨ - ٨ + ٢$

$= ٢$

∵ $\text{ص} = \text{جتا} \frac{\pi}{2} \text{س}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -4$

أوجدي $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=1}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$= \frac{-\pi}{2} \text{جا} \frac{\pi}{2} \text{س} \times -4$$

$$= \frac{-\pi}{2} \times 1 \times -4 = \boxed{2\pi}$$

∵ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + 3)$ ، $\text{ع} = \text{س}^2 + 3\text{س} - 2$

أوجدي $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دع}}\right|_{\text{س}=1}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س} + 3}{1}$$

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = \frac{1}{2\text{س} + 3}$$

$$= \left(\frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 3}\right) \left(\frac{1}{2\text{س} + 3}\right)$$

$$= \left.\frac{2\text{س}}{(2\text{س} + 3)(\text{س}^2 + 3)}\right|_{\text{س}=1}$$

$$= \frac{2}{5 \times 4} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

س: $\text{ص} = (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^5$

استخدمي قانون السلسلة لإيجاد صَ

$\text{ص} = \text{ع}^5$ ، $\text{ع} = \text{س}^2 + 3\text{س} - 2$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= 5\text{ع}^4 \times (2\text{س} + 3)$$

$$= 5(\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^4 (2\text{س} + 3)$$

نتيجة قاعدة السلسلة :

إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \text{ل}^{\text{ن}}(\text{س}) = (\text{ل}(\text{س}))^{\text{ن}}$

فإن $\text{هَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{ل}^{\text{ن}-1}(\text{س}) \times \text{لَ}(\text{س})$

س: $\text{ه}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^7 (\text{س}^2 + 1)^3$

أوجدي هَ(س)

$$\text{هَ}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^7 \times 3(\text{س}^2+1)^2 (2\text{س}) + (\text{س}^2+1)^3 \times 7(\text{س}^2+3\text{س}-2)^6 (2\text{س}+3)$$

س: $\text{ه}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$ ، أوجدي هَ(س)

$$\text{ه}(\text{س}) = (\text{س}^2 + \text{س} - 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{هَ}(\text{س}) = \frac{1}{3}(\text{س}^2 + \text{س} - 2)^{-\frac{2}{3}} (2\text{س} + 1)$$

$$= \frac{2\text{س} + 1}{3(\text{س}^2 + \text{س} - 2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\text{س} + 1}{3\sqrt[3]{(\text{س}^2 + \text{س} - 2)^2}}$$

س: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)^5 \underbrace{(\text{س}^2 - 4)^3}_{\text{ل}(\text{س})} (2\text{س} - 2)^7 (\text{س}^3 - 4\text{س} + 1)^5$

أوجدي $\text{قَ}(2)$

$\text{ل}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 4)^3$

$\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)^5 (2\text{س} - 2)^7 (\text{س}^3 - 4\text{س} + 1)^5$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ — $\text{ل}(2) = (4-4)^3 = 0$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})\ \text{هـَ}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\ \text{لَ}(\text{س})$ — $\text{هـ}(2) = 1 \times 1 - \times 1 = -1$

$\text{قَ}(2) = \text{ل}(2)\ \text{هـَ}(2) + \text{هـ}(2)\ \text{لَ}(2)$ — $\text{لَ}(\text{س}) = 3(\text{س}^2 - 4)^2 (2\text{س})$

$= 0 \times \text{هـَ}(2) + -1 \times 0 = \text{صفر}$ — $\text{لَ}(2) = 0$

*ملاحظات مهمة:

نتيجة قاعدة السلسلة

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{ق}^{\text{ن}}(\text{س})\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left((\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\ \text{ق}^{\text{ن}-1}(\text{س}) \times \text{قَ}(\text{س})$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{ق}(\text{س}^{\text{ن}})\right) = \text{قَ}(\text{س}^{\text{ن}}) \times \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$ تركيب اقترانات

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{ق}^{\text{ن}}(\text{س}^{\text{م}})\right) = \text{ن}\ \text{ق}^{\text{ن}-1}(\text{س}^{\text{م}}) \times \text{قَ}(\text{س}^{\text{م}}) \times \text{م}\ \text{س}^{\text{م}-1}$ نتيجة + تركيب

هناك فرق بين الفرعين لأنه الاقتران تركيب، لو ما كان تركيب لما كان في فرق.

إذا كان $\text{ق}(\text{س}^2 + 2) = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 3$ أوجدي:

1) المشتقة عندما س = ٦ ، س > ٠ 2) قَ(٦) ، 3) قَ(٣) ، س < ٠

① $\text{قَ}(\text{س}^2 + 2) \times 2\text{س} = 3\text{س}^2 - 4\text{س}\ \Big|_{\text{س}=6}$

$\text{قَ}(38) \times 12 = 108 - 24$

$\text{قَ}(38) = \frac{84}{12} = 7$

س: $ق(س) = هـ^3(س) + هـ^2(\frac{1}{س})$

$هـ(1) = 2$ ، $هـ'(1) = -2$

أوجدي $ق'(1)$

$ق'(س) = 3\,هـ^2(س) \times هـ'(س) + 2\,هـ(\frac{1}{س}) \times هـ'(\frac{1}{س}) \times \frac{-1}{س^2}$

$ق'(1) = 3\,هـ^2(1) \times هـ'(1) + 2\,هـ(1) \times هـ'(1) \times \frac{-1}{1}$

$= 3 \times 4 \times -2 + 2 \times 2 \times -2 \times -1$

$= -24 + 8 = -16$

س: $ق(س) = هـ(\sqrt{2س+1}) + هـ^2(2س-4)$

$هـ(2) = 1$ ، $هـ'(2) = -1$

أوجدي $ق'(3)$

$ق'(س) = هـ'(\sqrt{2س+1}) \times \frac{1}{2\sqrt{2س+1}} + 2\,هـ(2س-4) \times هـ'(2س-4) \times 2$

$ق'(3) = \frac{هـ'(2)}{2\times2} + 2\,هـ(2)\,هـ'(2) \times 2$

$= \frac{-1}{4} + 2\times1\times-1\times2 = \frac{-1}{4} - 4 = \frac{-17}{4}$

(2) لإيجاد $ق'(6)$ نجعل $س^2+2 = 6$

$س^2 = 4 \Leftarrow س = 2$ ، (-2) ✗

عندما $س = 2$

$ق'(6) \times 4 = 12 - 8$

$ق'(6) = \frac{4}{4} = 1$

(3) لإيجاد $ق'(3)$ نجعل $س^2+2 = 3$

$س^2 = 1 \Leftarrow س = \cancel{1}$ ، -1

عندما $س = -1$ ∴

$ق'(3) \times -2 = 3 + 4$

$ق'(3) = \frac{-7}{2}$

سؤال مهم: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 5$

أوجدي قيمة ما يلي:

$\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 4\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = 6\text{س} - 4$

① $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}(2-3\text{هـ}) - 5}{4\text{هـ}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}'(2-3\text{هـ}) \times -3}{4} = \dfrac{-3\,\text{ق}'(2)}{4} = \dfrac{-3\times 4}{4} = -3$

② $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}^2(1+3\text{هـ}) - \text{ق}^2(1)}{4\text{هـ}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{2\,\text{ق}(1+3\text{هـ}) \times \text{ق}'(1+3\text{هـ}) \times 3}{4}$

$= \dfrac{2\,\text{ق}(1)\,\text{ق}'(1) \times 3}{4}$

$= \dfrac{3}{2} \times 4 \times -1 = \boxed{-6}$

③ $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}'(2-\text{هـ}) - \text{ق}'(2)}{2\text{هـ}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}''(2-\text{هـ}) \times -1}{2} = \dfrac{-\text{ق}''(2)}{2} = \dfrac{14}{2} = -7$

④ $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{ق}(\text{س}^2+1) - \text{ق}(5)}{\text{س}^2 - 4} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{ق}'(\text{س}^2+1) \times \cancel{2\text{س}}}{\cancel{2\text{س}}} = \text{ق}'(5)$

$= 75 - 20 = \boxed{55}$

الاشتقاق الضمني

العلاقة الصريحة: هي العلاقة التي تربط ما بين المتغيرين س، ص ويكون فيها ص موضوع القانون وتكتب على صورة ص = ق(س)

العلاقة الضمنية: هي العلاقة التي تربط ما بين المتغيرين س، ص ولا تكون فيها ص موضوع القانون

لإيجاد مشتقة العلاقة الضمنية نطبق قواعد الاشتقاق السابقة في الحل لكن عند إيجاد مشتقة ص نضع مع الناتج صَ

س: أوجدي مشتقة العلاقة: س² + ص² = س ص + ٣ س

٢س + ٢ص صَ = س صَ + ص + ٣

٢ص صَ − س صَ = ص + ٣ − ٢س

صَ (٢ص − س) = ص + ٣ − ٢س

صَ = (ص + ٣ − ٢س) / (٢ص − س)

س: ص² س − ٣ س² = ص² + ٤س + ٥ أوجدي صَ

ص² + س × ٢ص صَ − ٦س = ٢ص صَ + ٤

٢س ص صَ + ٢ص صَ = ٤ + ٦س − ص²

صَ (٢س ص − ٢ص) = ٤ + ٦س − ص²

صَ = (٤ + ٦س − ص²) / (٢س ص − ٢ص)

س: $ص^{٢} + ٢س = س ص + ٥$ أوجدي $ص َ |_{ص=١}$

$٢ص ص َ + ٢ = س ص َ + ص \;|_{(٤،١)}$

عندما $ص = ١$

$١ + ٢س = س + ٥$

$س = ٤$

$٢ص َ + ٢ = ٤ص َ + ١$

$-٢ص َ = -١ \Leftarrow ص َ = \frac{١}{٢}$

س: $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ٢$ ، أوجدي $\frac{دص}{دس} \Big|_{(١،١)}$

فتحقق من وقوع (١،١) على المنحنى

$\frac{١}{١} + \frac{١}{١} \overset{؟؟}{=} ٢ \Leftarrow ٢ \overset{؟؟}{=} ٢$ ✓

∴ (١،١) تقع على المنحنى

$\frac{س^{٢} + ص^{٣}}{س ص} = ٢ \Leftarrow س^{٢} + ص^{٣} = ٢س ص$

$٢س + ٣ص^{٢} ص َ = ٢س ص َ + ٢ص \;|_{(١،١)}$

$٢ + ٣ص َ = ٢ص َ + ٢$

$∴ ص َ = ٠$

س: $(س + ٢ص)^{٥} = س^{٢} + ص^{٢} + ٣$ أوجدي $ص َ$

$٥(س + ٢ص)^{٤}(١ + ٢ص َ) = ٢س + ٢ص ص َ$

$٥(س + ٢ص)^{٤} + ١٠(س + ٢ص)^{٤} ص َ = ٢س + ٢ص ص َ$

$١٠(س + ٢ص)^{٤} ص َ - ٢ص ص َ = ٢س - ٥(س + ٢ص)^{٤}$

$ص َ \left(١٠(س + ٢ص)^{٤} - ٢ص\right) = ٢س - ٥(س + ٢ص)^{٤}$

$ص َ = \frac{٢س - ٥(س + ٢ص)^{٤}}{١٠(س + ٢ص)^{٤} - ٢ص}$

س: هـ^(ص² + س²) = ٣ص + لوهـ (س² + ١) ، أوجد صَ

(٢ص صَ + ٢س) هـ^(ص² + س²) = ٣صَ + ٢س / (س² + ١)

٢ص صَ هـ^(ص² + س²) + ٢س هـ^(ص² + س²) = ٣صَ + ٢س / (س² + ١)

٢ص صَ هـ^(ص² + س²) − ٣صَ = ٢س / (س² + ١) − ٢س هـ^(ص² + س²)

صَ = (٢س / (س² + ١) − ٢س هـ^(ص² + س²)) ÷ (٢ص هـ^(ص² + س²) − ٣)

س: لوهـ (ص² + ٢) = جا(س ص) ، صَ

٢ص صَ / (ص² + ٢) = جتا(س ص) (س صَ + ص)

٢ص صَ / (ص² + ٢) = جتا(س ص) (س صَ) + جتا(س ص) (ص)

٢ص صَ / (ص² + ٢) − س جتا(س ص) صَ = ص جتا(س ص)

صَ = (ص جتا(س ص)) ÷ (٢ص / (ص² + ٢) − س جتا(س ص))

س: $س = ظا ص$ ، أوجد $صَ$

$١ = قا^٢ ص \; صَ$

$صَ = \frac{١}{قا^٢ ص} = جتا^٢ ص$

س: أوجدي معادلة المماس والعمودي على المماس والمرسوم لمنحنى العلاقة

$ص^٢ + س^٢ = ٥ص + ٣س - ١ \;\big|_{(١ ، -١)}$

$(١)^٢ + (-١)^٢ \overset{?}{=} ٥ - ٣ - ١$

$١ + ١ \overset{?}{=} ٥ - ٣$

$٢ \overset{?}{=} ٢ \;\checkmark$ ∴ $(-١ ، ١)$ نقطة التماس

$٢ص \; صَ + ٢س = ٥ صَ + ٣ \;\big|_{(-١ ، ١)}$

$٢ صَ - ٢ = ٥ صَ + ٣$

$-٣ صَ = ٤$

$م = صَ = \boxed{\frac{-٤}{٣}}$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ١ = \frac{-٤}{٣} (س + ١)$

العمودي: $ص - ١ = \frac{٣}{٤} (س + ١)$

س: أوجدي معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $(س - ص)^٢ + ٢س - ص = ٦$ عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $ص - س + ١ = ٠$

$ص - س + ١ = ٠ \Leftarrow ص = س - ١$

بتعويض قيمة ص في معادلة المنحنى

$(س - س + ١)^٢ + ٢س - س + ١ = ٦$

$١ + س + ١ = ٦ \Leftarrow س_١ = ٤$

$ص_١ = س_١ - ١ = ٤ - ١ = ٣$

∴ نقطة التماس $(٤ ، ٣)$

$٢(س - ص)(١ - صَ) + ٢ - صَ = ٠ \;\big|_{(٤ ، ٣)}$

$٢(٤ - ٣)(١ - صَ) + ٢ - صَ = ٠$

$٢ - ٢ صَ + ٢ - صَ = ٠$

$٤ = ٣ صَ \Leftarrow صَ = \frac{٤}{٣}$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٣ = \frac{٤}{٣} (س - ٤)$

س : تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم وحسب العلاقة.
ع = ٤ف^٢ - ٦ف ، أوجدي تسارع هذه النقطة عندما
ف تساوي ٢ ← ت |ف=٢

* كل علاقة فيزيائية ليس فيها زمن هي ضمنية *

نشتق اشتقاق ضمني زمني
كلما نشتق نضع المشتقة بالنسبة للزمن

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٨\text{ف} \frac{\text{دف}}{\text{دن}} - ٦ \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$$

$$\text{ت} = ٨\text{ف}\,\text{ع} - ٦\text{ع} \Big|_{\text{ف}=٢,\ \text{ع}=٤}$$

عندما ف = ٢
ع = ١٦ - ١٢ = ٤

$$= (٨ \times ٢ \times ٤) - (٦ \times ٤)$$

$$= ٦٤ - ٢٤ = \boxed{٤٠}$$

س : يتحرك جسم في خط مستقيم وحسب $\text{ع}^٣ + \frac{١٢}{\text{ف}} = ٣٩$
أوجدي التسارع عندما ع = ٣ ، ت |ع=٣

$$٣\text{ع}^٢ \frac{\text{دع}}{\text{دن}} + \frac{-١٢ \times \frac{\text{دف}}{\text{دن}}}{\text{ف}^٢} = ٠$$

$$٣\text{ع}^٢\,\text{ت} - \frac{١٢\text{ع}}{\text{ف}^٢} = ٠ \Big|_{\text{ع}=٣,\ \text{ف}=١}$$

عندما ع = ٣

$$٢٧ + \frac{١٢}{\text{ف}} = ٣٩$$

$$\frac{١٢}{\text{ف}} = ١٢ \Leftarrow \boxed{\text{ف} = ١}$$

$$٢٧\text{ت} - \frac{٣٦}{١} = ٠$$

$$\text{ت} = \frac{٣٦}{٢٧} = \frac{٤}{٣}$$

س: مهم ومتوقع جداً : ★★

~~إذا كان ع = ص~~

إذا كان ع = $٥ص - ص^٢ + ٨$ ، $ص^٢ = س ص + ٣$

أوجد $\frac{دع}{دس}$ عندما س = -١ ، ص = ١

السؤال موضح القانون

ضمنية لأن ص ليس موضوع القانون — صريحة

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس}$

$= (٥ - ٢ص)\left(\frac{ص}{٢ص - س}\right)\Big|_{س=-١،\ ص=١}$

$= (٥ - ٢)\left(\frac{١}{٢ - -١}\right)$

$= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$

نجد $\frac{دص}{دس}$

$٢ص\,ص' = س\,ص' + ص$

$٢ص\,ص' - س\,ص' = ص$

$ص'\,(٢ص - س) = ص$

$ص' = \frac{ص}{٢ص - س}$

س: إذا كان ل = $ص^٢ + ٤ص - ٥$ ، $ص + س ص = ٦$ (صريحة — ضمنية)

أوجد $\frac{دل}{دس}\Big|_{ص=٢}$

$\frac{دل}{دس} = \frac{دل}{دص} \times \frac{دص}{دس}$

$= (٢ص + ٤)\left(\frac{-ص}{س+١}\right)\Big|_{ص=٢،\ س=٢}$

$= ٨ \times \frac{-٢}{٣}$

$= \frac{-١٦}{٣}$

$ص + س ص = ٦$

$ص' + س\,ص' + ص = ٠$

$ص'\,(١ + س) = -ص$

$ص' = \frac{-ص}{س+١}$

عندما ص = ٢ ⇐

$٢ + ٢س = ٦$

$٢س = ٤$ ⇐ س = ٢

س: إذا كان ص $= (س^2+3)^{س}$ أوجدي صَ

نأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} (س^2+3)^{س} = س\ لو_{هـ} (س^2+3)$$

$$\frac{صَ}{ص} = س \left(\frac{2س}{س^2+3}\right) + لو_{هـ} (س^2+3)$$

$$صَ = ص \left[\frac{2س^2}{س^2+3} + لو_{هـ} (س^2+3)\right]$$

$$= (س^2+3)^{س} \left[\frac{2س^2}{س^2+3} + لو_{هـ} (س^2+3)\right]$$

س: إذا كان ق(س) = جا($\pi^{س}$)، أوجدي قَ(١)

أجي وكان عليه ٣ علامة *

$$قَ(س) = جتا(\pi^{س}) \times (\pi^{س})َ$$

$$= جتا\ \pi^{س} \times \pi^{س} لو_{هـ} \pi$$

$$قَ(1) = جتا\ \pi \times \pi\ لو_{هـ} \pi$$

$$= -\pi\ لو_{هـ} \pi$$

$ص = \pi^{س}$ ، $لو_{هـ}$

عدد ثابت ينزل كما هو

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} \pi^{س} = س\ لو_{هـ} \pi$$

$$\frac{صَ}{ص} = 1\ لو_{هـ} \pi$$

$$صَ = ص\ لو_{هـ} \pi$$

$$= \pi^{س} لو_{هـ} \pi$$

س: إذا كان $لو_{3} س^2+5$ ، أوجدي صَ

$$3^{ص} = س^2+5 \quad \cancel{لو_{هـ}}$$

$$لو_{هـ} 3^{ص} = لو_{هـ} (س^2+5)$$

عدد ثابت

$$ص\ لو_{هـ} 3 = لو_{هـ} (س^2+5)$$

$$صَ\ لو_{هـ} 3 = \frac{2س}{س^2+5}$$

$$صَ = \frac{2س}{لو_{هـ} 3 (س^2+5)}$$

س: إذا كان $\text{ص} = \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{\text{س}^2+7}}{\sqrt[7]{\text{س}^3+2}}}$

أوجدي باستخدام اللوغاريتمات صَ

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{(\text{س}^2+7)^{\frac{1}{3}}}{(\text{س}^3+2)^{\frac{1}{7}}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+7) - \frac{1}{7}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3+2)\right]$$

$$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2\text{س}}{\text{س}^2+7}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3+2}\right)\right]$$

$$\text{صَ} = \text{ص}\left[\frac{1}{15}\left(\frac{2\text{س}}{\text{س}^2+7}\right) - \frac{1}{35}\left(\frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3+2}\right)\right]$$

$$= \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{\text{س}^2+7}}{\sqrt[7]{\text{س}^3+2}}}\;\left[\;\text{"}\;\right]$$

"الإثباتات"

س: إذا كان $(\text{س}+\text{ص})^5 = \text{س}^2\,\text{ص}^3$

أثبتي أن $\text{صَ} = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$

الأسهل والأبسط في حال وجود أسس ومثل هيك لوشه - أخذ اللوغاريتم الطبيعي

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{ص})^5 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^2\text{ص}^3 \Leftarrow 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{ص}) = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$$

$$5\left(\frac{1+\text{صَ}}{\text{س}+\text{ص}}\right) = 2\left(\frac{1}{\text{س}}\right) + 3\left(\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}\right)$$

$$\frac{5}{\text{س}+\text{ص}} + \frac{5\,\text{صَ}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{2}{\text{س}} + \frac{3\,\text{صَ}}{\text{ص}}$$

$$\frac{5\,\text{صَ}}{\text{س}+\text{ص}} - \frac{3\,\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{2}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}+\text{ص}}$$

$$\text{صَ}\left(\frac{5}{\text{س}+\text{ص}} - \frac{3}{\text{ص}}\right) = \frac{2\text{س}+2\text{ص}-5\text{س}}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})}$$

$$ص' \left(\frac{٥ص - ٣س - ٣ص}{ص(\cancel{س+ص})} \right) = \frac{٢ص - ٣س}{س(\cancel{س+ص})}$$

$$ص' \left(\frac{\cancel{٢ص} - ٣س}{ص} \right) = \left(\frac{\cancel{٢ص} - ٣س}{س} \right)$$

$$\frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س} \times ص$$

$$ص' = \frac{ص}{س} \qquad و.هـ.م$$

س١١: إذا كان $\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن} = \left(\frac{ص}{ب}\right)^{م}$

أثبت أن $ص' = \frac{ن}{م} \left(\frac{ص}{س}\right)$ حيث ن، م، أ، ب $\in$ ح، $\neq$ ٠

$$لو_{هـ} \left(\frac{س}{أ}\right)^{ن} = لو_{هـ} \left(\frac{ص}{ب}\right)^{م}$$

مشتقتها صفر

$$ن \left[لو_{هـ} س - لو_{هـ} أ \right] = م \left[لو_{هـ} ص - لو_{هـ} ب \right]$$

$$ن \left(\frac{١}{س} \right) = م \left(\frac{ص'}{ص} \right) \div م$$

$$\frac{ن}{م} \left(\frac{١}{س} \right) = \frac{ص'}{ص} \times ص$$

$$\frac{ن}{م} \left(\frac{ص}{س} \right) = ص' \qquad و.هـ.م$$