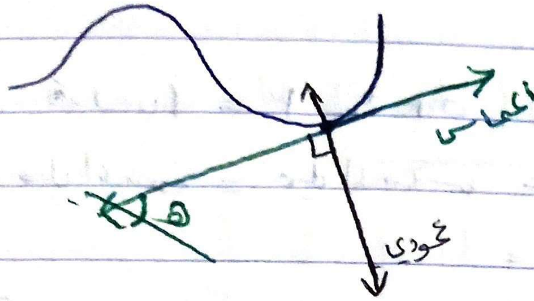
تطبيقات هندسية وفيزيائية

أولاً: تطبيقات هندسية على المشتقة الأولى



$ق'(س_1)$ = ميل المماس

لمنحنى الاقتران

= م المماس

*** ملاحظات ***

1] م المماس = ظا هـ حيث هـ : زاوية الميل

2] ميل العمودي على المماس = $\frac{-1}{م_{المماس}}$

$م_{عمودي} = \frac{-1}{م_{مماس}} = \frac{-1}{ق'(س_1)}$

3] معادلة المماس

م = ميل المماس ، نقطة التماس $(س_1 ، ص_1)$

$ص - ص_1 = م_{المماس} (س - س_1)$

4] معادلة العمودي

$ص - ص_1 = م_{العمودي} (س - س_1)$

تعويض

5] ميل المماس (المار بالنقطتين)

$(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

مثال (١) ص(٣١):

ق(س) = س^{٣} + ٥س

$\boxed{١}$ جد ميل منحنى الاقتران عند س = ١

م المماس = قَ(س$_{١}$)

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٥

ميل المنحنى = ميل المماس = قَ(١)

= ٣×١ + ٥ = $\boxed{٨}$

$\boxed{٢}$ لإيجاد معادلة المماس

(١، ق(١)) = نقطة التماس

ق(١) = ١^{٣} + ٥×١ = $\boxed{٦}$

م مماس = ٨ ، نقطة التماس ($\overset{س}{١}$، $\overset{ص}{٦}$)

معادلة المماس

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

ص − ٦ = ٨(س − ١)

ص = ٨س − ٨ + ٦

$\boxed{\text{ص = ٨س − ٢}}$

معادلة العمودي

م عمودي = $\frac{-١}{\text{م مماس}}$ = $\frac{-١}{٨}$

ص − ٦ = $\frac{-١}{٨}$ (س − ١)

سؤال : أوجدي معادلة المماس للمنحنى ص = $\frac{٣س - ١}{٣س + ١}$

عند النقطة (-١ ، ٢)

$$ق'(س) = \frac{(٣س + ١)٣ - ٣(٣س - ١)}{(٣س + ١)^٢}$$

$$= \frac{\cancel{٩س} + ٣ - \cancel{٩س} + ٣}{(٣س + ١)^٢} = \frac{٦}{(٣س + ١)^٢}$$

م المماس = ق'(-١)

$$= \frac{٦}{(-٣ + ١)^٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

معادلة المماس

ص - ص$_١$ = م (س - س$_١$)

$$\boxed{ص - ٢ = \frac{٣}{٢} (س - -١)}$$

$$ص - ٢ = \frac{٣}{٢} س + \frac{٣}{٢}$$

$$ص = \frac{٣}{٢} س + \frac{٧}{٢}$$

$$\boxed{\frac{٣}{٢} + \frac{٢ \times ٢}{١ \times ٢}} = \frac{٧}{٢}$$

سؤال: إذا كان $هـ(س) = \sqrt[3]{ق(س) - س}$

وكان $هـ(1) + هـ(3) = 11$

$هـ(1) \times هـ(3) = 5$

ومتوسط التغير لـ $هـ(س+1)$ في $[0 ، 2] = 4$

وكان $ل(س+1) = ق(س) + 8$

جد متوسط تغير $ل(س)$ في $[2 ، 4]$

$$\frac{\Delta ل(س)}{\Delta س} = \frac{ل(4) - ل(2)}{4 - 2}$$

$$= \frac{ق(3) - ق(1)}{2}$$

$$= \frac{(هـ(3))^3 + 3 - (هـ(1))^3 - 1}{2}$$

$$= \frac{(هـ(3))^3 - (هـ(1))^3}{2} + \frac{2}{2}$$

$$= \frac{(هـ(3) - هـ(1))\left(هـ^2(3) + هـ(1)هـ(3) + هـ(1)\right)}{2} + 1$$

$$= \frac{8 \times (111 + 5)}{2} + 1$$

$$= 4 \times 116 + 1$$

$$= \boxed{465}$$

$ل(4) = ل(3+1) = ق(3) + 8$

$ل(2) = ل(1+1) = ق(1) + 8$ (−)

$ل(4) - ل(2) = ق(3) - ق(1)$

$\because هـ(س) = \sqrt[3]{ق(س) - س}$ تكعيب الطرفين

$(هـ(س))^3 = ق(س) - س$

$(هـ(س))^3 + س = ق(س)$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = 4$$

$$\frac{هـ(3) - هـ(1)}{2} = 4$$

$$\boxed{هـ(3) - هـ(1) = 8}$$

$(هـ(1) + هـ(3))^2 = (11)^2$ بتربيع الطرفين

$هـ^2(1) + 2هـ(1)هـ(3) + هـ^2(3) = 121$

$هـ^2(1) + هـ^2(3) + 10 = 121$

$= 111$

التطبيقات الهندسية :

أ) إيجاد ميل المماس، معادلة المماس، معادلة العمودي

ب) إيجاد نقطة / نقط التماس

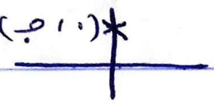
جـ) حل مسائل متداخلة (مماسات، مس، يعامد)

* معادلة المماس ⟸ $ص - ص_1 = م_{مماس} (س - س_1)$

* صورة النقطتين : $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$

الميل $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$

* صورة الميل والمقطع الصادي :



$ص = م س + جـ$

م: ميل المماس أو العمودي

* الصورة العامة $أ س + ب ص + جـ = ٠$

$م_{مماس} = \frac{-أ}{ب}$

$\frac{ب ص}{ب} = \frac{-أ}{ب} س - \frac{جـ}{ب}$

* $ل_1 // ل_2 \Leftarrow م_1 = م_2$

** $ل_1 \perp ل_2 \Leftarrow م_1 \times م_2 = -1$

*** الخط المستقيم أفقي (يوازي محور السينات) ميله = ٠

مثال (٢) ص (٣١) :

ق(س) = $\frac{٤}{س}$ ، س = ٢ ، هـ = ١٣٥ زاوية ميل المماس ، (٠،٠) تحقق معادلة العمودي

* معادلة العمودي : م عمودي ، نقطة التماس

م مماس = ظا هـ

= ظا ١٣٥

= −١ ← م عمودي = $\frac{-١}{\text{م المماس}}$ = $\frac{-١}{-١}$ = $\boxed{١}$

قَ(س) = م مماس

قَ(س) = $\frac{-٤ \times ١}{س^٢}$

$\frac{-١}{١}$ = $\frac{-٤}{س^٢}$

+س² = +٤

س = ٢ ، ~~−٢~~ ×

ق(٢) = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

نقطة التماس (٢،٢)

معادلة العمودي

ص − ص١ = م عمودي (س − س١)

ص − ٢ = ١ (س − ٢)

ص − ~~٢~~ = س − ~~٢~~

ص = س معادلة عمودي

(٠ ، ٠) س ص

٠ ؟ ٠

$\boxed{٠ = ٠}$

تحقق معادلة العمودي

مثال (٣/١٣) :

د(س) = $\frac{\text{س}^{2}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، (١ ، ١هـ)

م المماس = دَ(س)

$$= \left. \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}^{2})}{(\text{هـ}^{\text{س}})^{2}} \right|_{\text{س}=1}$$

$$= \frac{2\times \text{هـ} - \text{هـ}}{\text{هـ}^{2}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}^{2}} = \frac{1}{\text{هـ}}$$

$$\text{ص} = \text{د}(1) = \frac{(1)^{2}}{\text{هـ}^{1}} = \frac{1}{\text{هـ}}$$

$$\text{ص} - \frac{1}{\text{هـ}} = \frac{1}{\text{هـ}}(\text{س} - 1)$$

$$\text{ص} - \frac{1}{\text{هـ}} = \frac{1}{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{\text{هـ}}$$

$$+\frac{1}{\text{هـ}} \qquad +\frac{1}{\text{هـ}}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\boxed{\frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{س}}{\text{هـ}}}$$

$$\boxed{\text{هـ}\,\text{ص} = \text{س}}$$

سؤال : إذا كان د(س) = س² + ٢س − ٧

جد قيم س إذا كان .

[١] المماس أفقيا

[٢] المماس عندها يميل بزاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع السينات الموجب

[٣] المماس عندها يوازي المستقيم ص = ٤س − ٥

[٤] المماس عندها يعامد المستقيم الذي معادلته ٣ص − س = ٣

د(س) = $س^2 + 2س - 7$

د'(س) = $2س + 2$

(1) المماس أفقياً ⇐ م المماس = 0

م المماس = د'(س) = $2س + 2$ = 0

0 = $2س + 2$

$\frac{-2}{2} = \frac{2س}{2}$ ⇐ س = -1

(2) م المماس = ظا هـ = ظا $\frac{3\pi}{4}$ = -1

م المماس = د'(س)

-1 = $2س + 2$

-3 = $2س$ ⇐ س = $\frac{-3}{2}$

(3) ص = $4س - 5$ ⇐ م = 4

المماس // ص ⇐ م المماس = 4

م المماس = د'(س)

4 = $2س + 2$

2 = $2س$ ⇐ س = 1

(4) 3ص − س = 3

3ص = 3 + س

ص = $1 + \frac{س}{3}$

م العمودي = $\frac{1}{3}$

∴ م المماس = -3

م المماس = د'(س)

-3 = $2س + 2$

-5 = $2س$ ⇐ س = $\frac{-5}{2}$

$\frac{-أ}{ب} = \frac{--1}{3} = \frac{1}{3}$

[٥] إيجاد نقط التماس

(س١ ، ص١) نقطة تماس

خصائص [١] قَ(س١) = م التماس

[٢] تحقق معادلة الاقتران ص١ = ق(س١)

[٣] تحقق معادلة التماس

مثال (٤) ص(٣٢) :

ص = −٣س + جـ   معادلة التماس ⇐ م التماس = −٣

ق(س) = −٢س² + ٥س + ١١   معادلة الاقتران

قَ(س) = −٤س + ٥

قَ(س) = م التماس

−٤س + ٥ = −٣

−٥ −٥

−٤س = −٨

$\boxed{\text{س} = ٢}$

(س١، ص١) ⇐ (٢ ، ق(٢))

ق(٢) = −٢ × ٤ + ١٠ + ١١

= −٨ + ١١

= ٣ ⇐ (٢ ، ٣)

معادلة التماس ⇐ ميل التماس

↓

قَ(س) = م التماس

↓

نقطة التماس

نقطة تماس

مثال (٥):

ص = م س + ٥ ق(س) = أ س٣ + ب س٢ (-١، -٣)

① ق'(س) = م المماس = م

ق'(س) = ٣أ س٢ + ٢ب س

ق'(-١) = ٣أ - ٢ب

② (-١، -٣) تحقق معادلة المماس

-٣ = م × -١ + ٥

-٣ = -م + ٥

$\boxed{\text{م} = ٨}$

③ تحقق معادلة الاقتران (-١، -٣)

-٣ = -أ + ب ... ① ×٣

٨ = ٣أ - ٢ب ... ②

-٩ = -٣أ + ٣ب

٨ = ٣أ - ٢ب بالجمع

-١ = ب

-٣ = -أ - ١

-أ = -٢

$\boxed{\text{أ} = ٢}$

تمارين صـ (٣٦) :

س١ : ق(س) = س٢ − ٢س + ١

معادلة العمودي س + ٢ص − ٤ = ٠

م العمودي = $\frac{-١}{٢}$ = $-\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

$\frac{-١}{\text{م العمودي}}$ →

م المماس = ٢ = ق'(س)

ق'(س) = ٢س − ٢

٢ = ٢س − ٢

٤ = ٢س ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

ق(٢) = ٤ − ٤ + ١ = ١

(٢ ، ١)

معادلة عمودي ← ميل عمودي

↓

ميل المماس

↓

ق'(س) = م المماس

↓

نقطة التماس

س٢ : ق(س) = ٣ − ظا٢ س ، س = $\frac{\pi}{٤}$

= ٣ − ظاس ظاس

ق'(س) = − (قا٢س ظاس + قا٢س ظاس)

= −٢ قا٢س ظاس

= −٢ × قا٢ $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$

= −٢ × $(\sqrt{٢})^٢$ × ١

= −٤

قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{\text{جتا } \frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$ = $\sqrt{٢}$

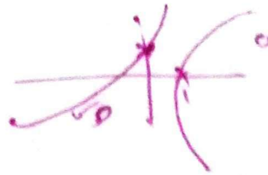
ص = ٣ − ظا٢ $\frac{\pi}{٤}$

= ٣ + ١ = ٢

($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢)

ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ٢ = −٤ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

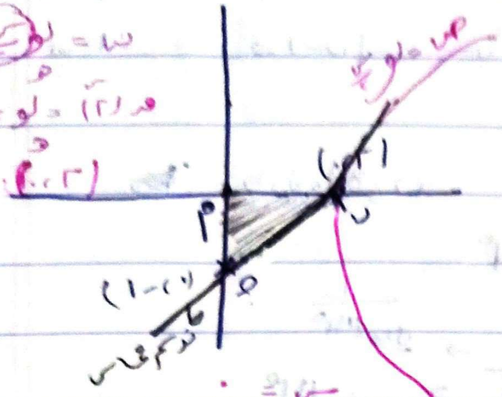


$\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$

س٣ : ق(س) = لوهـ $\frac{\text{س}}{2}$ س = ٢

ق'(س) = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\text{س}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\text{س}}$

$= \frac{1}{\text{س}}$.



ص = لوهـ ($\frac{2}{2}$) ← ١

ق(٢) = لوهـ $\frac{2}{2}$ = لوهـ ١ = ٠

(٢،٠)

م المماس = ق'(س) = ق'(٢) = $\frac{1}{2}$

ق(٢) = لوهـ ١ = ٠

ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ٠ = $\frac{1}{2}$ (س − ٢)

ص = $\frac{1}{2}$ س − ١

ص = $\frac{1}{2}$ × ٠ − ١ = −١ ← (٠،−١)

ص = ٠

٠ = $\frac{1}{2}$ س − ١

٢×١ = $\frac{1}{2}$ س ×٢ ← س = ٢ (٢،٠)

ب(٢،٠)   جـ(٠،−١)

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث م ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

س٤ : س = أ − ٦ص   معادلة المماس

ق(س) = $\frac{\text{٣س}}{\text{س} - 2}$ س ≠ ٢   أ ؟؟

$\frac{\text{٦ص}}{6} = \frac{\text{أ}}{6} - \frac{\text{س}}{6}$ ← ص = $\frac{\text{أ}}{6} - \frac{1}{6}$ س

م المماس = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{-1}{6}$

م المماس

ق'(س) = $\frac{3(\text{س} - 2) - \text{٣س}}{(\text{س} - 2)^2}$

= $\frac{\cancel{\text{٣س}} - 6 - \cancel{\text{٣س}}}{(\text{س} - 2)^2} = \frac{-6}{(\text{س} - 2)^2}$

م المماس = ق َ(س)

$$\frac{-1}{6} = \frac{-6}{(س-2)^2}$$

$(س-2)^2 = 36$

$س - 2 = \pm 6$

$س - 2 = 6$

$س = 8$

$س - 2 = -6$

$س = -4$

$س^2 - 4س + 4 - 36 = 0$

$س^2 - 4س - 32 = 0$

$(س + 4)(س - 8) = 0$

$\boxed{س = -4}$ ، $س = 8$

عندما س = 8

$ص = \frac{3 \times 8}{8 - 2} = \frac{24}{6} = 4$ $(8 ، 4)$

نقط التماس تحقق معادلة المماس

$س = أ - 6ص$

$8 = أ - 6 \times 4$

$8 = أ - 24$

$\boxed{أ = 32}$

عندما س = -4

$ص = \frac{3 \times -4}{-4 - 2} = \frac{-12}{-6} = 2$ $(-4 ، 2)$

$-4 = أ - 6 \times 2$

$-4 = أ - 12$

$\boxed{أ = 8}$

ثانياً : تطبيقات فيزيائية

إذا كان ل = ف(ن)

[1] $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = السرعة المتوسطة

[2] السرعة اللحظية = ف'(ن) = مشتقة المسافة

ع(ن) = مشتقة المسافة

$\boxed{ع(ن) = ف'(ن)}$ اقتران سرعة

[3] $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ = التسارع المتوسط

[4] التسارع اللحظي (ت(ن)) = مشتقه السرعة

= ع'(ن)

$\boxed{ت(ن) = ف''(ن)}$

ف $\xrightarrow{\text{اشتقاق}}$ ع $\xrightarrow{\text{اشتقاق}}$ ت

ف''

ملاحظات :

[1] السرعة الابتدائية هذا يؤدي إلى $\boxed{ن = ٠}$

[2] يعكس الجسم اتجاه حركته ع = صفر

[3] تنعدم السرعة ⟸ ع = ٠

ينعدم التسارع ⟸ ت = ٠

مثال (٦) ص (٣٣):

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} - ٩\text{ن}^{٢} + ٧$$

متوسط التغير في المسافة

① السرعة المتوسطة للجسم في [١، ٣]

$$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{(٢٧ - ٨١ + ٧) - (١ - ٩ + ٧)}{٢}$$

$$= \frac{-٤٧ + ١}{٢} = \frac{-٤٦}{٢} = -٢٣ \text{ م/ث}$$

اقتران سرعة

② السرعة اللحظية عند ن = ٢

$$\text{ع}(\text{ن}) = \text{ف}'(\text{ن})$$

$$\boxed{\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} - ١٨\text{ن}}$$

$$\text{ع}(٢) = ٣ \times ٤ - ١٨ \times ٢$$

$$= ١٢ - ٣٦ = -٢٤ \text{ م/ث}$$

③ التسارع اللحظي عند ن = ١

$$\text{ت}(\text{ن}) = \text{ف}''(\text{ن})$$

$$= ٦\text{ن} - ١٨$$

$$\text{ت}(١) = ٦ - ١٨ = -١٢ \text{ م/ث}^{٢}$$

④ التسارع المتوسط في [١، ٢]

$$\frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ع}(٢) - \text{ع}(١)}{١}$$

$$= \frac{(٣ \times ٤ - ١٨ \times ٢) - (٣ - ١٨)}{١}$$

$$= (١٢ - ٣٦) - (-١٥)$$

$$= -٢٤ + ١٥ = -٩ \text{ م/ث}^{٢}$$

⑤ السرعة الابتدائية للجسم ⟸ ن = ٠

ع(٠) = صفر

ملاحظة - عند ، عندما ← لحظي

⑥ تسارع الجسم لحظة عندما ينعكس الجسم من اتجاه حركته

ينعكس الجسم من اتجاه حركته عندما ع(ن) = ٠

٣ن² - ١٨ن = ٠

ن(٣ن - ١٨) = ٠ ← ن = ٠

٣ن - ١٨ = ٠ ، $\boxed{\text{ن = ٦}}$

ت(٦) = ؟؟

ت(ن) = ع′(ن)

= ٦ن - ١٨

ت(٦) = ٦×٦ - ١٨

= ٣٦ - ١٨ = ١٨ م/ث²

⑦ السرعة عندما ينعدم التسارع

ت(ن) = ٠

٦ن - ١٨ = ٠

٦ن = ١٨

$\boxed{\text{ن = ٣}}$

ع(٣) = ٣×٩ - ١٨×٣

= ٢٧ - ٥٤

= -٢٧ م/ث

ف ← اشتقاق ← ع ← اشتقاق ← ت

$\bar{\text{ع}}$ = Δف / Δن

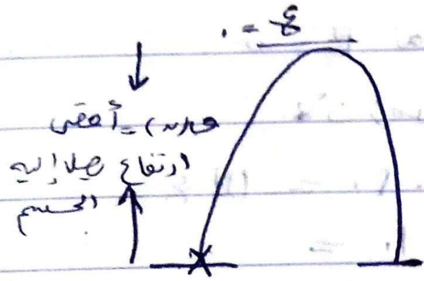
$\bar{\text{ت}}$ = Δع / Δن

ملاحظات على المقذوفات :

[١] ف(ن) = الإزاحة عن سطح الارتفاع (الارتفاع)
وليست المسافة المقطوعة

[٢] أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم
عندما ع(ن) = ٠ ← نجد ن ← نعوضها في ف(ن) = أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

[٣] لحظة ارتطام الجسم بالأرض عندما ف(ن) = ٠ ← ن ← لحظة



[٤] إذا كان الجسم صاعد ← ع > ٠
الجسم هابط ← ع < ٠

[٥] المسافة الكلية المقطوعة في الثواني ن الأولى
= ٢ × أقصى ارتفاع − ف(ن)

مثال (٧) ص(٣٤) :

ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن² ⟸ الارتفاع عن سطح الأرض عند ن ثانية

[١] أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

ع(ن) = ٠

ف'(ن) = ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن

٠ = ٢٠ − ١٠ن

$\frac{٢٠}{١٠}$ = ن ⟸ $\boxed{ن = ٢}$

أقصى ارتفاع = ف(٢)

= ٢٠ × ٢ − ٥ × ٤

= ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

$\boxed{ب}$ ع(ن) عندما ف(ن) = ١٥

ف(ن) = ١٥

٢٠ ن − ٥ن٢ = ١٥

$\frac{٥ن^٢}{٥} - \frac{٢٠ن}{٥} + \frac{١٥}{٥} = \frac{٠}{٥}$

ن٢ − ٤ن + ٣ = ٠

(ن − ١) (ن − ٣) = ٠

ن = ١ بعد ثانية (طالع)

ن = ٣ بعد ٣ ثواني (نازل)

لأن زمن الصعود هو ٢ ثانية

ع(١) = ٢٠ − ١٠

= ١٠م/ث موجبة لأنه صاعد

ع(٣) = ٢٠ − ٣٠

= −١٠ م/ث سالبة لأنه نازل

$\boxed{٣}$ ٤ ثواني

المسافة الكلية = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤)

= ٢ × ٢٠ − (٠)

= ٤٠

س : مثال (٣٦) :

ف = ٤٠ ن − ٥ $ن^{٢}$

ع(ن)؟ عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م

المسافة الكلية = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(ن)

١٠٠ =

نحسب أقصى ارتفاع .

ع(ن) = ٠

ف'(ن) = ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن

٠ = ٤٠ − ١٠ن

$\frac{١٠ن}{١٠} = \frac{٤٠}{١٠}$ ⇐ $\boxed{ن = ٤}$

ف(٤) = ٤٠ × ٤ − ٥ × ١٦

= ١٦٠ − ٨٠

= ٨٠

المسافة الكلية = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(ن)

١٠٠ = ٢ × ٨٠ − ف(ن)

١٠٠ = ١٦٠ − ف(ن)

ف(ن) = ٦٠

٤٠ن − ٥$ن^{٢}$ = ٦٠

٥$ن^{٢}$ − ٤٠ن + ٦٠ = ٠

$ن^{٢}$ − ٨ن + ١٢ = ٠

(ن − ٢)(ن − ٦) = ٠

ن = ٢   ن = ٦

مرفوضة لأنه أقل من زمن الصعود

ع(٦) = ف'(٦)

= ٤٠ − ١٠ × ٦

= ٤٠ − ٦٠

= −٢٠ م/ث

الجسم هابط

٤

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، −٢)، (٢، ٦)

يمس منحنى ق(س) = م س² + ٣س − ١

جدي قيمة م

معادلة المماس المار بالنقطتين (١، −٢)، (٢، ٦)

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\frac{ص + ٢}{س} = \frac{٦ + ٢}{٢}$

$\frac{ص + ٢}{س} = \frac{٨}{٢} = ٤$

ص + ٢ = ٤س

ص = ٤س − ٢ ← معادلة المماس

~~ق(س) = ص: م س² + ٣س − ١ = ٤س − ٢~~

~~م س² + ٣س − ١ + ٢ = ٤س~~

~~م س² − ٣س + ١ = ٠~~

قَ(س) = ميل المماس

٢م س + ٣ = ٤

٢م س = ٢

$س = \frac{٢}{٢م} = \frac{١}{م}$

$م \times \left(\frac{١}{م}\right)^٢ - ٢ \times \frac{١}{م} + ١ = ٠$

$\frac{١}{م} - \frac{٢}{م} + ١ = ٠$

$\frac{-١}{م} + ١ = ٠ \Leftarrow \frac{١}{م} = ١$

$\boxed{م = ١}$

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف = جا ن + جتا ن

حيث ن ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] احسبي المسافة التي يقطعها الجسم حتى يتوقف عن الحركة.

ع(ن) = ٠

ع(ن) = فَ(ن) = جتا ن − جا ن

٠ = جتا ن − جا ن

$\frac{جا ن}{جتا ن} = \frac{جتا ن}{جتا ن} \Leftarrow$ ظا ن = ١

$ن = \frac{\pi}{٤}$

$ف\left(\frac{\pi}{٤}\right) = جا \frac{\pi}{٤} + جتا \frac{\pi}{٤}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = P ن٢ + ن٣
جد ي السرعة عندما ن = ٥ علماً بأن التسارع = ٢٥ م/ث٢
عند تلك اللحظة .

ع(ن) = فَ(ن)

= ٢Pن + ٣ن٢

ع(٥) = ٢ × ٥ × P + ٣ × ٢٥

= ١٠P + ٧٥

ت(ن) = فً(ن) = عَ(ن)

= ٢P + ٦ن

ت(٥) = ٢P + ٦ × ٥

٢٥ = ٢P + ٣٠

-٥ = ٢P ⇐ $\boxed{P = \frac{-٥}{٢}}$

∴ ع(٥) = $\cancel{١٠}^{٥} \times \frac{-٥}{\cancel{٢}_{١}}$ + ٧٥

= -٢٥ + ٧٥ = ٥٠ م/ث

ع(٥) = ٢ × $\frac{-٥}{٢}$ × ٥ + ٣ × (٥)٢

= -٢٥ + ٧٥ = ٥٠ م/ث

حل سؤال: إذا كان المستقيم ل ، بالمقطع (٠، -٢) ، و (٢، ٦) جد معادلة المماس

معادلة المماس

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{\text{ص} + 2}{\text{س}} = \frac{6 + 2}{2}$$

$$\frac{\text{ص} + 2}{\text{س}} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = 4\text{س} - 2}$$ معادلة المماس

(س١، ص١) تحقق معادلة المماس ومعادلة الاقتران

① $4 = \text{ق}'(\text{س}_1)$

$$\underset{-2}{4} = 2\text{أ}\,\text{س}_1 + \underset{-2}{2}$$

$$\frac{2}{2\text{أ}} = \frac{\cancel{2\text{أ}}\,\text{س}_1}{\cancel{2\text{أ}}} \Leftarrow \boxed{\text{س}_1 = \frac{1}{\text{أ}}}$$

$\left(\frac{1}{\text{أ}} ، \text{ق}\left(\frac{1}{\text{أ}}\right)\right)$ نعوضها في معادلة المماس

② $\text{ص} = 4\text{س} - 2$

$$\text{ق}\left(\frac{1}{\text{أ}}\right) = 4 \times \frac{1}{\text{أ}} - 2$$

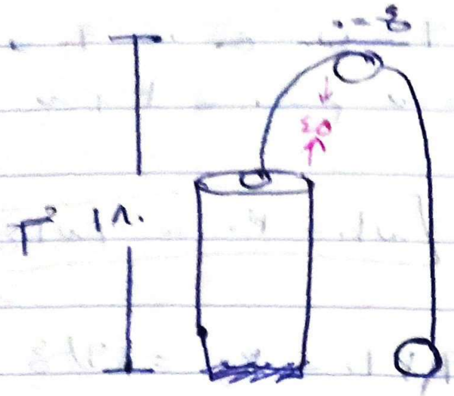
$$\text{أ} \times \frac{1}{\text{أ}^2} + 2 \times \frac{1}{\text{أ}} \underset{+1}{-1} = \frac{4}{\text{أ}} \underset{+1}{-2}$$

$$\frac{1}{\text{أ}} + \frac{2}{\text{أ}} - \frac{4}{\text{أ}} = -1$$

$$\frac{3}{\text{أ}} - \frac{4}{\text{أ}} = -1 \Leftarrow \frac{-1}{\text{أ}} = -1$$

$$\boxed{\text{أ} = 1}$$

مثال (١٨) ص (٣٥) :



الإزاحة

ف(ن) = ٣٠ ن − ٥ ن²

أقصى ارتفاع للجسم عن سطح البرج

ع(ن) = ٠

٣٠ − ١٠ن = ٠
−٣٠ ‎ ‎ −٣٠

−١٠ ن / −١٠ = −٣٠ / −١٠ ⇐ ن = ٣

ف(٣) = ٣٠ × ٣ − ٥ × ٣²

= ٩٠ − ٤٥

= ٤٥ م

[١] ارتفاع البرج = أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض − أقصى ارتفاع للجسم عن سطح البرج

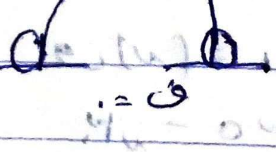
= ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥ م ارتفاع البرج

[٢] سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

ف = −١٣٥ ‎ ‎ أو الإزاحة = ف − ف١

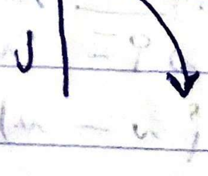
٣٠ ن − ٥ ن² = −١٣٥ ‎ ‎ ٤ × ٥ = ٠ − ١٣٥

−٥ن²/−٥ + ٣٠ن/−٥ + ١٣٥/−٥ = ٠/−٥ ‎ ‎ = −١٣٥ م



ن² − ٦ن − ٢٧ = ٠

(ن − ٩)(ن + ٣) = ٠



ن - ٩ = ٠ ← ن = ٩ ✓
ن + ٣ = ٠ ← ن = -٣ ✗

$\boxed{ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن}$

ع(٩) = ٣٠ - ١٠ × ٩
= ٣٠ - ٩٠ = -٦٠ م/ث الجسم نازل إلى أسفل.

٣) المسافة الكلية (٧) = ٢ × أقصى ارتفاع عن سطح البرج - ف(٧)
= (٢ × ٤٥) - (٣٠ × ٧ - ٥ × ٤٩)
= ٩٠ - - ٣٥ = ١٢٥ م

حل٦: ف = ٣٠ن - ٥ن²

ج) أقصى ارتفاع عندما ع(ن) = ٠ ∴
ع(ن) = ف'(ن)
= ٣٠ - ١٠ن = ٠ ∴
٣٠ = ١٠ن ∴ $\boxed{ن = ٣}$

ف(٣) = ٣٠ × ٣ - ٥ × ٩
= ٩٠ - ٤٥ = ٤٥ م

د) ف(ن) = ٤٠
٣٠ن - ٥ن² = ٤٠
٥ن² - ٣٠ن + ٤٠ = ٠ ∴
ن² - ٦ن + ٨ = ٠ ∴
(ن - ٤)(ن - ٢) = ٠ ∴
ن = ٤ ن = ٢ ✗

ع(٤) = ٣٠ - ٤٠ = -١٠ م/ث

أثبت أن

سؤال : ق(س) = س٣ − س

و هـ(س) = ٢س٢ − ٢س

متماسان

ق(س) ، هـ(س) متماسان

ق(س) = هـ(س)

قَ(س) = هـَ(س)

ق(س) = هـ(س)

س٣ − س = ٢س٢ − ٢س

س٣ − ٢س٢ + س = ٠

س(س٢ − ٢س + ١) = ٠

س(س − ١)(س − ١) = ٠

س = ٠ ، ١

عند س = ٠

قَ(س) ≟ هـَ(س)

٣س٢ − ١ ≟ ٤س − ٢

−١ ≠ −٢

ق(س) ، هـ(س) غير متماسان عند س = ٠

عند س = ١

٣س٢ − ١ ≟ ٤س − ٢

٢ = ٢

ق(س) ، هـ(س) متماسان عند س = ١

ت 2027: إذا كان جا س = $هـ^{ص}$ فإن قيمة $\frac{د^2ص}{دس^2}$

أ) - قتا^2 س   ب) قتا^2 س   ج) - قتا س ظتا س   د) قا س

م/ اشتياق العيسى

لو$_{هـ}$ جا س = لو$_{هـ}$ $هـ^{ص}$

$\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = ص$'$

ظتا س = ص$'$

- قتا^2 س = ص$''$

قاعدة السلسلة

قاعدة المركب | ص ← ع ← س | $(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$

قاعدة (١):

$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$

سؤال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$

جد: ① $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\text{س})$ ② $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(١)$ ③ $(\text{ق}' \circ \text{هـ})'(١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} + ٤$

① $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$

$= \text{هـ}'(\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١) \times ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$= ٢ \times (\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١) \times (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س})$

② $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(١) = \text{ق}'(\text{هـ}(١)) \times \text{هـ}'(١)$

$= \text{ق}'(٢) \times ٢$

$= (٣ \times ٤ + ٨) \times ٢$

$= ٢٠ \times ٢ = ٤٠$

③ $(\text{ق}' \circ \text{هـ})'(١) = \text{ق}''(\text{هـ}(١)) \times \text{هـ}'(١)$

$= \text{ق}''(٢) \times ٢$

$= (٦ \times ٢ + ٤) \times ٢$

$= ١٦ \times ٢ = ٣٢$

سؤال 2 : إذا كان ق(س) = جا س

هـ(س) = جتا س

جد (ق ∘ هـ)$'$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ق$'$(س) = جتا س

هـ$'$(س) = − جا س

(ق ∘ هـ)$'$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = ق$'$ (هـ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$) × هـ$'$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

= ق$'$ (0) × −1

= 1 × −1 = −1

قاعدة (2) :

ص ← ع ← س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

مثال 1 : إذا كان ص = ع^2 + 2ع − 1

ع = 3س^2 + 1

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ | س = 1

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

= (2ع + 2) × 6س

= (2 × 4 + 2) × 6 × 1 = 60

عندما س = 1

ع = 3س^2 + 1

= 3 × 1^2 + 1 = 4

تعميم :

ص ← ع ← م ← س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$$

قاعدة (٣) :

$\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}} \leftarrow \text{صَ} = \text{ن}\,(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-1} \times \text{هـَ}(\text{س})$

مثال ① $\text{ص} = (٤\text{س}^2 - ١)^3$

$\text{صَ} = ٣(٤\text{س}^2 - ١)^2 \times ٨\text{س}$

$= ٢٤\text{س}(٤\text{س}^2 - ١)^2$

② $\text{ص} = \text{جا}^4\,\text{س}$

$\text{صَ} = ٤\,\text{جا}^3\,\text{س} \times \text{جتا}\,\text{س}$

③ $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{قا}(٥\text{س} - ١)$

$\text{صَ} = ٢\text{س} \times \text{قا}(٥\text{س} - ١) + \text{قا}(٥\text{س} - ١)\,\text{ظا}(٥\text{س} - ١) \times ٥ \times \text{س}^2$

ملاحظات :

① $\left(\text{ق}(\text{هـ}(\text{ل}(\text{س})))\right)' = \text{قَ}(\text{هـ}(\text{ل}(\text{س}))) \times \text{هـَ}(\text{ل}(\text{س})) \times \text{لَ}(\text{س})$

$\left((٢\text{م}(\text{س}) - ١)^4\right)'$

$٤(٢\text{م}(\text{س}) - ١)^3 \times ٢\text{مَ}(\text{س})$

$\left(\text{ق}(٤\text{س} - ١)\right)' = \text{قَ}(٤\text{س} - ١) \times ٤$

$\left(\text{ق}(٤\text{ل}(٣\text{م}(\text{س})))\right)' = \text{قَ}(٤\text{ل}(٣\text{م}(\text{س}))) \times ٤\,\text{لَ}(٣\text{م}(\text{س})) \times ٣\text{مَ}(\text{س})$

② $\text{جتا}(\text{أ}\text{س} + \text{ب}) = -\text{أ}\ \text{جا}\ \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

③ $\text{ظا}\,\text{م}(\text{س}) = \text{قا}^2\,\text{م}(\text{س}) \times \text{مَ}(\text{س})$

$\boxed{٤}$ $\sqrt{\text{هـ}(\text{س})} = \left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\frac{1}{2}} = \text{ص}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{-\frac{1}{2}} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

$$= \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

مشتقة الجذر التربيعي = $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$

مثال ١ : جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

$\boxed{١}$ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٣} + ١}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}+١}}$$

$\boxed{٢}$ $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{جاس}}$

$$\text{ص} = \left(\text{جاس}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{ص}' = \frac{1}{3}\left(\text{جاس}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \text{جتاس}$$

$$= \frac{\text{جتاس}}{٣\sqrt[٣]{\text{جا}^{٢}\text{س}}}$$

مثال (٢) صـ ٣٨ :

ص = س ق(س² + ١)

س = ٢   قَ(٥) = ٣   ق(٥) = -١   معادلة المماس

دص/دس = ١ × ق(س² + ١) + س قَ(س² + ١) × ٢س

(ق(س² + ١))َ = قَ(س² + ١) × ٢س

دص/دس |س=٢ = ق(٥) + ٢ قَ(٥) × ٤

= -١ + ٨ قَ(٥)

= -١ + (٨ × ٣) = -١ + ٢٤ = ٢٣

عندما س = ٢

ص١ = ٢ ق(٥)   (س = ٢)

= ٢ × -١ = -٢

(٢ ، -٢) ، م المماس = ٢٣

معادلة المماس

ص - ص١ = م(س - س١)

ص + ٢ = ٢٣ (س - ٢)

ص + ٢ = ٢٣س - ٤٦

ص = ٢٣س - ٤٦ - ٢ = ٢٣س - ٤٨

ت 2021 :

① إذا كان هـَ(٢س−١) = ٢س² − ٢
وكان هـ(٥) = ٤ ، فما قيمة قَ(٥)

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ جـ) ٥ د) $\frac{٢}{٣}$

② إذا كان ق(س) = س² قا $\frac{\pi}{س}$
حيث س ≠ ٠ احسب قَ(١)

③ احسب $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{قا٢س − ١}{س^2}$ باستخدام لوبيتال.

①
هـَ(٢س−١) = ٢س² − ٢
(هـ(ق(٢س−١)))َ = ٢س² − ٢ باشتقاق الطرفين

$\boxed{\begin{array}{l} ٢س − ١ = ٥ \\ ٢س = ٦ \leftarrow س = ٣ \end{array}}$

$\cancel{٢}$ هـَ(ق(٢س−١)) × قَ(٢س−١) × $\cancel{٢}$ = $\cancel{٤}$ س

هـ(٥) × قَ(٥) = ٣

$\frac{٤}{٤}$ × قَ(٥) = $\frac{٣}{٤}$

قَ(٥) = $\frac{٣}{٤}$ ب

②
قَ(س) = ٢س قا $\frac{\pi}{س}$ + قا $\frac{\pi}{س}$ ظا $\frac{\pi}{س}$ × $\frac{-\pi}{\cancel{س^2}}$ × $\cancel{س^2}$

قَ(١) = ٢ قا π + قا π ظا π × −π

= ٢ × −١ + (−١ × ٠ × −π)

= −٢

قا π = $\frac{١}{جتا \pi}$

= $\frac{١}{-١}$ = $\boxed{-١}$

2021

③ نها (قا٢س − ١) / س² ، س ← ٠

نها (قا٢س ظا٢س × ٢) / ٢س ، س ← ٠

نها (قا٢س ظا٢س × ٢) / ٢س ، س ← ٠

نها (قا٢س ظا٢س) / س ، س ← ٠

نها (قا٢س ظا٢س × ٢ × ظا٢س + ٢ قا²٢س × قا٢س ٢س) / ١ ، س ← ٠

نها ٢قا٢س ظا²٢س + ٢قا³٢س ، س ← ٠ ، قا٠ = ١ / جتا٠

= ٢ × قا٠ ظا²٠ + ٢ قا³٠ ، = ١/١ = $\boxed{1}$

= ٢ × ١ × ٠ + ٢ × ١ = $\boxed{2}$

مثال١: إذا كان ق(٢) = ٥

جد نها (ق(٢ − ٥هـ) − ق(٢)) / هـ ، هـ ← ٠ نشتق بالنسبة للمتغير هـ

نها (ق'(٢ − ٥هـ) × −٥) / ١ ، هـ ← ٠ = ق'(٢) × −٥

= ٥ × −٥ = $\boxed{-25}$

ص ٢٩٧) س ٣ :

ق(١) = −٢ ، ق(٣) = −٢ ، ق'(٣) = ٤

(أ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+٥هـ) - ق(٣)}{١٠هـ}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(٣+٥هـ) \times ٥}{١٠}$

$\frac{ق'(٣+٠)}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

(ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ١}{ق(١) - ق(س)}$

$\lim_{س \to ١} \frac{٢س}{-ق'(س)} = \frac{-٢}{ق'(١)} = \frac{-٢}{-٢} = ١$

س ٦ : $\lim_{س \to ١} \frac{س\,ق(١) - ق(س)}{س - ١}$ ، ق'(١) = ٣ ، ق(١) = ٦

ثابت

$\lim_{س \to ١} \frac{ق(١) - ق'(س)}{١}$

$= ق(١) - ق'(١)$

$= ٦ - ٣$

$= ٣$

المشتقة
س في ثابت ∈ الثابت

$ص = \frac{١}{\pi} + س$ | $ص = \frac{١}{\pi}\,س$

$ص' = ١$ | $ص' = \frac{١}{\pi}$

أسئلة إثرائية :

س١ : إذا كان د(س) = س³ − ٤س − ٢

جد ① $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س^٢ + ١) - د(٥)}{س^٢ - ٤}$

② $\lim_{س \to -١} \frac{د^٢(س) - ١}{٣س + ٣}$

③ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٣ + ٢هـ) - د(٣)}{٥هـ}$

س٢ : جد قيمة ما يلي باستخدام لوبيتال

① $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا^٥(٤س - ٢هـ) - جتا^٥ ٤س}{هـ^٢ + ٥هـ}$

② $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا^٣(\frac{\pi}{٣} - ٢هـ) - \frac{١}{٨}}{٥هـ}$

س١ : ① $\lim_{س \to ٢} \frac{د'(س^٢ + ١) \times ٢س}{٢س}$

د(س) = س³ − ٤س − ٢

د'(س) = ٣س² − ٤

$\frac{د'(٥) \times \cancel{٤}}{\cancel{٤}} = ٣ \times ٢٥ - ٤ = ٧١$

② $\lim_{س \to -١} \frac{د^٢(س) - ١}{٣س + ٣}$

$\lim_{س \to -١} \frac{٢د(س)\, د'(س)}{٣}$

د(−١) = −١ + ٤ − ٢ = ١

د'(−١) = ٣ − ٤ = −١

$= \frac{٢د(-١)\, د'(-١)}{٣} = \frac{٢ \times ١ \times -١}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

(ب) $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(٣ + ٢\text{هـ}) - \text{د}(٣)}{٥\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}'(٣ + ٢\text{هـ}) \times ٢}{٥}$

$\displaystyle = \frac{\text{د}'(٣) \times ٢}{٥} = \frac{٢٣ \times ٢}{٥} = \frac{٤٦}{٥}$

مع: (١) $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{جتا}^{٥}(٤\text{س} - ٢\text{هـ}) - \text{جتا}^{٥}\, ٤\text{س}}{\text{هـ}^{٢} + ٥\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٥\,\text{جتا}(٤\text{س} - ٢\text{هـ})^{٤} \times -\text{جا}(٤\text{س} - ٢\text{هـ}) \times -٢}{٢\text{هـ} + ٥}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{-١٠\,\text{جتا}(٤\text{س} - ٢\text{هـ})^{٤} \times -\text{جا}(٤\text{س} - ٢\text{هـ})}{٢\text{هـ} + ٥}$

$\displaystyle = \frac{-\cancel{١٠}^{\,٢} \times \text{جتا}(٤\text{س})^{٤} \times -\text{جا}\,٤\text{س}}{\cancel{٥}_{\,١}}$

$= +٢\,\text{جتا}(٤\text{س})^{٤} \times +\text{جا}\,٤\text{س}$

(٢) $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{جتا}^{٣}(\frac{\pi}{٣} - ٢\text{هـ}) - \frac{١}{٨}}{٥\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٣\,\text{جتا}^{٢}(\frac{\pi}{٣} - ٢\text{هـ}) \times -\text{جا}(\frac{\pi}{٣} - ٢\text{هـ}) \times -٢}{٥}$

$\displaystyle = \frac{٣\,\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٣} \times -\text{جا}\frac{\pi}{٣} \times -٢}{٥}$

$\displaystyle = \frac{٣ \times (\frac{١}{٢})^{٢} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times -٢}{٥} = \frac{\cancel{٣} \times \frac{١}{٤} \times -\frac{١}{\sqrt{٣}} \times -\cancel{٢}}{٥}$

$\displaystyle = \frac{\sqrt{٣}}{٢ \times ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{١٠}$

من النقطة (٠ ، -٢) رسم مماس لمنحنى ق(س) = س^٢ + ٢
جد إحداثيات نقط التماس.

نفرض نقطة التماس → (س ، ص) ، (٠ ، -٢)

م المماس = ق'(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ؛ م المماس = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٢س = $\frac{ص + ٢}{س}$

٢س^٢ = ص + ٢ لكن ص = س^٢ + ٢

٢س^٢ = س^٢ + ٢ + ٢

س^٢ = ٤ ⟸ س = ٢ ، -٢

س = ٢	س = -٢
ص = ق(٢)	ص = ق(-٢)
= (٢)^٢ + ٢	= (-٢)^٢ + ٢
= ٦	= ٤ + ٢
(٢ ، ٦)	ص = ٦
	(-٢ ، ٦)

تمارين ص(١٤١) :

جد : $\left.\dfrac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

(أ) $ص = (س^٢ + س + ١)^{-٣}$

$صَ = -٣(س^٢ + س + ١)^{-٤} \times ٢س + ١$

$\left.صَ\right|_{س=١} = -٣(٣)^{-٤} \times ٣$

$= -٩ \times \dfrac{١}{٣^٤} = \dfrac{-٩}{٨١} = \dfrac{-١}{٩}$

(ب) $ص = س^٢ \, طا \dfrac{\pi}{س}$ ت 2021

(ج) $ص = ٥ع^٢ - ٧$ ، $ع = \dfrac{١}{س^٢ + ١}$

$\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{دص}{دع} \times \dfrac{دع}{دس}$

$= ١٠ع \times \dfrac{-١ \times ٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$\left.\dfrac{دص}{دس}\right|_{\substack{س=١ \\ ع=\frac{١}{٢}}} = ١٠ \times \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{-٢\times١}{(١+١)^٢}$

$= \dfrac{-١٠}{٤} = \boxed{\dfrac{-٥}{٢}}$

ص ← ع ← س

مقلوب

$\left(\dfrac{١}{هـ(س)}\right)' = \dfrac{-هـَ(س)}{(هـ(س))^٢}$

عندما س=١ فإن ع =

$ع = \dfrac{١}{١^٢+١} = \dfrac{١}{٢}$

$قا\,\pi = \frac{1}{جتا\,\pi} = \frac{1}{-1} = -1$

(د) $ص = ظا\left(\frac{\pi}{س}\right) + جتا^2(\pi س)$

$ص' = قا^2\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^2} + 2\,جتا\,\pi س \times -جا\,\pi س \times \pi$

$ص'(1) = قا^2\pi \times -\pi + 2\,جتا\,\pi \times -جا\,\pi \times \pi$

$= 1 \times -\pi + 2 \times -1 \times 0 \times \pi$

$= -\pi$

(هـ) $ص = (لو_{هـ}\, س)^3$

$ص' = 3(لو_{هـ}\, س)^2 \times \frac{1}{س}$

$ص'(1) = 3(لو_{هـ}\, 1)^2 \times \frac{1}{1}$

$= 3 \times 0 \times 1 = 0$

$ق(س) = \frac{لو_{هـ}(م(س))}{2س}$ ؛ $م(1) = هـ^2$ ، $م'(1) = 2هـ$

$ق'(1)$؟؟

$$ق'(س) = \frac{\frac{م'(س)}{م(س)} \times 2س - 2\,لو_{هـ}(م(س))}{(2س)^2}$$

$$ق'(1) = \frac{\frac{م'(1)}{م(1)} \times 2 - 2\,لو_{هـ}\, م(1)}{4}$$

$$= \frac{\frac{2\cancel{هـ}}{هـ^{\cancel{2}}} \times 2 - 2\,لو_{هـ}\, هـ^2}{4} = \frac{\frac{4}{هـ} - 4}{4}$$

$= \frac{1}{هـ} - 1$

سؤال ٣ : (أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}^2+\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = (2\text{س}+1)\,\text{هـ}^{\text{س}^2+\text{س}}$

(ب) $\text{ع}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^3 - 3\text{س}^2)$

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}^2 - 6\text{س}}{\text{س}^3 - 3\text{س}^2} = \dfrac{\cancel{\text{س}}(3\text{س} - 6)}{\cancel{\text{س}}(\text{س}^2 - 3\text{س})}$

$= \dfrac{3\text{س} - 6}{\text{س}^2 - 3\text{س}}$

سؤال ٤ :

$\text{ق}(\text{س}) = \underline{\text{س}^2\,\text{م}(\text{س}^2+1)}$ مشتقة الحاصل

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} \times \text{م}(\text{س}^2+1) + \text{م}'(\text{س}^2+1) \times 2\text{س} \times \text{س}^2$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}\,\text{م}(\text{س}^2+1) + 2\text{س}^3\,\text{م}'(\text{س}^2+1)$

$\text{ق}''(\text{س}) = 2\,\text{م}(\text{س}^2+1) + \text{م}'(\text{س}^2+1) \times 2\text{س} \times 2\text{س} + 6\text{س}^2\,\text{م}'(\text{س}^2+1) + \text{م}''(\text{س}^2+1) \times 2\text{س} \times 2\text{س}^3$

$\text{ق}''(1) = 2\,\text{م}(2) + \text{م}'(2) \times 4 + 6\,\text{م}'(2) + \text{م}''(2) \times 4$

$= (2\times5) + (-1\times4) + (6\times-1) + (1\times4)$

$= 10 + \cancel{-4} + -6 + 4$

$= 4$

س٥ : ص = ق^٣(س) − ق(س^٣) $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ق^٢(س) × ق$'$(س) − ق$'$(س^٣) × ٣س^٢

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = ٣ق^٢(٢) × ق$'$(٢) − ق$'$(٨) × ١٢

= (٣ × ١ × −٢) − (٢ × ١٢)

= −٦ − ٢٤

= −٣٠

س٦ : ص = ن^٢ + ٥ن $\frac{دن}{دس}\Big|_{ن=١}$ = ٢ ، $\frac{دص}{دس}\Big|_{ن=١}$ ؟؟

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دن}$ × $\frac{دن}{دس}$

= (٢ن + ٥) × ٢

$\frac{دص}{دس}\Big|_{ن=١}$ = ٧ × ٢

= ١٤

س٧ : ق(س) = س + $\frac{1}{س}$ (هـ(س) = جتا س)

أثبت أن (ق∘هـ)$'$(س) = جا^٣ س قا^٢ س

ق$'$(س) = ١ + $\frac{-1}{س^٢}$ هـ$'$(س) = −جا س

ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س) = ق$'$(جتا س) × −جا س

= (١ + $\frac{-1}{جتا^٢ س}$) × −جا س

= $\frac{جتا^٢ س - ١}{جتا^٢ س}$ × −جا س

اضرب بسالب

قا^٢ س

= $\frac{1}{جتا^٢ س}$ × (١ − جتا^٢ س) جا س

قا^٢ س × جا^٢ س × جا س = قا^٢ س جا^٣ س

ثابت

س٥ : (أ) $\lim\limits_{\text{ه}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}^{٢}(\text{٢س}+\text{ه}) - \text{ظا}^{٢}\,\text{٢س}}{\text{ه}}$

نشتق بالنسبة لـ ه

(لأن ٢س لا يوجد فيه ه) = صفر

لا نشتقها   مشتقها ١

$\lim\limits_{\text{ه}\to ٠} \dfrac{\text{قا}^{٢}(\text{٢س}+\text{ه}) - ٠}{١}$

$\text{قا}^{٢}(\text{٢س}+٠)$

$\text{قا}^{٢}\,\text{٢س}$

(ب) $\lim\limits_{\text{ه}\to ٠} \dfrac{\text{ق}(١+\text{٣ه}) - \text{ق}(١-\text{٣ه})}{\text{١٠ه}}$ $\text{ق}'(١) = -٢$

$\lim\limits_{\text{ه}\to ٠} \dfrac{\text{ق}'(١+\text{٣ه})\times ٣ - \text{ق}'(١-\text{٣ه})\times -٣}{١٠}$

$= \dfrac{\text{ق}'(١)\times ٣ - \text{ق}'(١)\times -٣}{١٠} = \dfrac{-٢\times ٣ - -٢\times -٣}{١٠}$

$= \dfrac{-٦ - ٦}{١٠} = \dfrac{-١٢}{١٠} = \dfrac{-٦}{٥}$

(جـ) $\text{ق}(٢) = ٣$ $\text{ق}'(٢) = ٥$

$\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{ق}(\text{٢س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س}-١}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{ق}'(\text{٢س})\times ٢}{١}$

$= \text{ق}'(٢)\times ٢$

$= ٥\times ٢ = ١٠$

الاشتقاق الضمني

علاقة صريحة: هي علاقة ترتبط فيها عناصر المتغيرات مع بعضها البعض بحيث تكون أحد المتغيرات في طرف والآخر في طرف آخر مثل ص = ٤س^{2} ـ ١

ع = م^{2} + ٣م ـ ١

علاقة ضمنية: هي العلاقة التي تختلط فيها عناصر المتغيرات معاً

مثل س ص = جا(س^{2} ـ ص)

كيفية الاشتقاق:

ص^{2} ← ٢ص ص$'$

جاص ← جتاص ص$'$

ظا(ص^{2} ـ ١) ← قا^{2}(ص^{2} ـ ١) × ٢ص ص$'$

مثال (١) ص (٤٢):

س^{2} + ص^{2} + ١ = ٤س ـ ص $\qquad$ دص/دس |(١،١)

٢س + ٢ص ص$'$ = ٤ ـ ص$'$

٢ + ٢ص$'$ = ٤ ـ ص$'$

٣ص$'$ = ٢ ⟸ ص$'$ = ٢/٣

مثال (٢) ص (٤٣):

٣ص = جاس جتا٢ص

٣ص$'$ = جتاس جتا٢ص + ـ٢جا٢ص ص$'$ × جاس

٣ص$'$ + ٢جا٢ص جاس ص$'$ = جتاس جتا٢ص

ص$'$ (٣ + ٢جا٢ص جاس) = جتاس جتا٢ص

إخراج ص$'$ عامل مشترك

(ص$'$ (٣ + ٢جا٢ص جاس))/(٣ + ٢جا٢ص جاس) = (جتاس جتا٢ص)/(٣ + ٢جا٢ص جاس)

ص$'$ = (جتاس جتا٢ص)/(٣ + ٢جا٢ص جاس)

تمارين ص (الأولى) :

س ١ : (أ) $س^3 + س ص + 2ص^2 = 5$

$~~3س^2 + ص + ص 4 ص~~$

$3س^2 + ص + ص' س + 4ص ص' = 0$

$ص' س + 4ص ص' = -3س^2 - ص$

$ص'(س + 4ص) = -3س^2 - ص$

$$ص' = \frac{-3س^2 - ص}{س + 4ص}$$

ت 2018

سؤال : إذا كان $س^{\frac{1}{2}} + ص^{\frac{1}{2}} = 1$ فإن $\frac{دص}{دس}$

أ) $\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}$ ب) $-\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}$

جـ) $\frac{3}{2}\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}$ د) $\frac{-3}{2}\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}ص^{-\frac{1}{2}} ص' = 0$

$$\frac{\frac{1}{2}ص^{-\frac{1}{2}} ص'}{\frac{1}{2}ص^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}ص^{-\frac{1}{2}}}$$

$ص' = -\left(\frac{س}{ص}\right)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{-\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\cancel{\frac{1}{2}} ص^{-\frac{1}{2}} ص' = \cancel{\frac{-1}{2}} س^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{ص^{-\frac{1}{2}} ص'}{ص^{-\frac{1}{2}}} = \frac{س^{-\frac{1}{2}}}{ص^{-\frac{1}{2}}}$$

$ص' = -\left(\frac{ص^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= -\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{1}{2}}$

وقلنا س و ص في صحة القوة موجبة

ت 2021 دورة ثانية

7 علامات سؤال: إذا كان ص + س ص' = جتا س

أثبت أن ص'' + ص' = $\frac{-2 \text{ ص'}}{1 + \text{س}}$

~~ص' + ص' + ص'' س = - جا س ⇐ ص' + ص' + ص'' + س = - جا س~~

~~$\frac{\text{ص''} (1 + \text{س})}{1+\text{س}} = \frac{- \text{جا س} - \text{ص'}}{1 + \text{س}}$~~

~~ص'' ص' + ص' + ص'' س + ص' = - جتا س~~

~~ص'' ص' + ص'' س + 2 ص' = - جتا س~~

~~ص'' ص' + ص'' س = - جتا س - 2 ص'~~

~~$\frac{\text{ص''} (\text{ص'} + \text{س})}{\text{ص'} + \text{س}} = \frac{- (\text{جتا س} + 2 \text{ص'})}{\text{ص'} + \text{س}}$~~

~~ص'' + ص'~~

ص + س ص' = جتا س

ص' + ص' + ص'' × س = - جا س

ص'' + ص'' + ص''' × س + ص'' = - جتا س

ص''' + س ص''' + 3 ص'' = - جتا س

ص''' (1 + س) + جتا س = -3 ص''

ص''' (1 + س) + ص + س ص' = -3 ص''

ص'' (1 + س) + ص (1 + س) = -3 ص'

$\frac{(1 + \text{س}) (\text{ص''} + \text{ص})}{1 + \text{س}} = \frac{-3 \text{ ص'}}{1 + \text{س}}$

ص'' + ص = $\frac{-3 \text{ ص'}}{1 + \text{س}}$ و. هـ. م

تمارين ص(٤٧) :

ع ٤ : ب) $\text{ص} = \sqrt[5]{1 - \text{س}^2} + 3$

$\text{ص} = (1 - \text{س}^2)^{\frac{1}{5}} + 3$

$\text{ص}' = \frac{1}{5}(1 - \text{س}^2)^{-\frac{4}{5}} \times -2\text{س}$

$\text{ص}' = \frac{-2\text{س}}{5} \times \frac{1}{(1 - \text{س}^2)^{\frac{4}{5}}}$

$= \frac{-2\text{س}}{5\sqrt[5]{(1 - \text{س}^2)^4}}$

هـ) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س} + \text{ص})$

$\text{ص}' = \text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) \times (1 + \text{ص}')$

$\text{ص}' = \text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) + \text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) \times \text{ص}'$

$\text{جتا}(\text{س} + \text{ص})\,\text{ص}' - \text{ص}' = -\text{جتا}(\text{س} + \text{ص})$

$\frac{\text{ص}'\cancel{(\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) - 1)}}{\cancel{\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) - 1}} = \frac{-\text{جتا}(\text{س} + \text{ص})}{\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) - 1}$

$\text{ص}' = \frac{-\text{جتا}(\text{س} + \text{ص})}{\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) - 1}$

د) $\frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{س}} = 2$

$\frac{-\text{ص}'}{\text{ص}^2} + \frac{-1}{\text{س}^2} = 0 \quad +\frac{1}{\text{س}^2} \quad +\frac{1}{\text{س}^2}$

$\frac{-\text{ص}'}{\text{ص}^2} \times \text{ص}^2 = \frac{1}{\text{س}^2} \times \text{ص}^2$

$-\text{ص}' = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} \Longleftarrow \boxed{\text{ص}' = \frac{-\text{ص}^2}{\text{س}^2}}$

مثال (٣) ص(٤٣):

(س + ص)^٣ − ٣ ص² = ٥ ، ص؟

المستقيم س + ص = ٢

ق(س) ، هـ(س) متقاطعين

ق(س) = هـ(س)

ص = ص

المطلوب: معادلة المماس

نعوض بدل س + ص بـ ٢ في العلاقة

(٢)^٣ − ٣ ص² = ٥

٨ − ٣ ص² = ٥

٨ − ٥ = ٣ ص²

٣ = ٣ ص²

ص² = ١ ⇐ ص = ١ ✓

−١ × لأن ص > ٠

∴

عندما ص = ١ فإن

س + ص = ٢

س + ١ = ٢ ⇐ $\boxed{\text{س = ١}}$

نقطة التقاطع (١، ١) التماس

اشتقاق ضمني:

٣(س + ص)² × (١ + صَ) − ٦ ص صَ = ٠

٣(١ + ١)² × (١ + صَ) − ٦ صَ = ٠

١٢ + ١٢ صَ − ٦ صَ = ٠

١٢ + ٦ صَ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{صَ = −٢}}$ ميل المماس

معادلة المماس (١، ١) ، م = −٢

ص − ١ = −٢(س − ١)

ص = −٢س + ٢ + ١

$\boxed{\text{ص = −٢س + ٣}}$

$ص^ن \leftarrow ن ص^{ن-١} \frac{دص}{دس}$

$س^ن \leftarrow ن س^{ن-١}$

$ع^ن \leftarrow ن ع^{ن-١} \frac{دع}{دس}$

$ل^ن \leftarrow ن ل^{ن-١} \frac{دل}{دص}$ بالنسبة لص

(ض ل ل) $\frac{دل}{دص}$ ← $١ \times ل + ١ \times \frac{دل}{دص} \times ص$

$ل + ص \frac{دل}{دص}$ ← نشتق بالنسبة لـ ص

مثال (٤) ص (٤٣):

$ص = ع^٣ + ١ \qquad س^٢ ع = ع^٢ - ٢ \qquad \left.\frac{دص}{دس}\right|_{ع=٢}$ ؟

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$ص = ع^٣ + ١$

$\frac{دص}{دع} = ٣ع^٢$

$\left.\frac{دص}{دع}\right|_{ع=٢} = ٣ \times ٢^٢ = ١٢$

$س^٢ ع = ع^٢ - ٢$

$$٢س ع + س^٢ \times \frac{دع}{دس} = ٢ع \frac{دع}{دس}$$

$$٢ \times ١ \times ٢ + ١ \times ١ \times \frac{دع}{دس} = ٢ \times ٢ \times \frac{دع}{دس}$$

$$٤ + \frac{دع}{دس} = ٤\frac{دع}{دس}$$

$$\frac{٣}{٣}\frac{دع}{دس} = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{٤}{٣}$$

عندما $\boxed{ع = ٢}$

$س^٢ \times ٢ = ٤ - ٢$

$٢س^٢ = ٢$

$س^٢ = ١$

$س = \pm ١$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= \frac{٤}{\cancel{٣}} \times \cancel{١٢}^{٤}$$

$$= \boxed{١٦}$$

$ص = ٣^{س}$

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣^{س}$

ثابت (معامل س)

$لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} ٣$

$\frac{ص'}{ص} = لو_{هـ} ٣$

$ص' = ص \, لو_{هـ} ٣$

$ص' = ٣^{س} لو_{هـ} ٣$

مثال ١٧ ص ٤٥ :

$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ المماس موازيًا للمستقيم $ص + ٢س = ٥$

$ص = ٥ - ٢س$

$ص' = \boxed{م_{المماس} = -٢}$

$\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{ص'}{2\sqrt{ص}} = ٠$

$\frac{ص'}{2\sqrt{ص}} = \frac{-1}{2\sqrt{س}} \quad \times 2\sqrt{ص}$

$ص' = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$ص' = \frac{\sqrt{س} - ٣}{\sqrt{س}}$

$-٢ = \frac{\sqrt{س} - ٣}{\sqrt{س}}$

$-٢\sqrt{س} = \sqrt{س} - ٣$

$+٢\sqrt{س} \qquad +٢\sqrt{س}$

$٠ = ٣\sqrt{س} - ٣$

$+٣ \qquad +٣$

$٣ = ٣\sqrt{س}$

$\frac{٣}{٣} = \frac{٣\sqrt{س}}{٣}$

$١ = \sqrt{س}$ بتربيع الطرفين

$١ = س$

$\sqrt{ص} = ٣ - \sqrt{س}$

$\sqrt{ص} = ٣ - ١$

$(\sqrt{ص})^2 = (٢)^2 \Rightarrow \boxed{ص = ٤}$

نقطة التماس (١، ٤)

نشاط (٢) ص (٤٦):

$$\frac{2}{\text{س}} + \frac{3}{\text{ص}} = 5\,\text{س}\,\text{ص}$$

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ | عند (١،١) ← تحقق معادلة المماس
معادلة العلاقة

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = 5 \times 1 \times 1$$

$$2 + 3 = 5 \quad \text{تحقق}$$

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ | عند (٢،٣)

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} \overset{?}{=} 5 \times 2 \times 3$$

$$1 + 1 \overset{?}{=} 30$$

$$2 \neq 30$$

~~لا تحقق العلاقة~~

لا تقع على العلاقة لأنها لا تحقق المعادلة لا يمكن إيجاد المماس عندها

$$\frac{-2}{\text{س}^2} - \frac{3\,\text{ص}'}{\text{ص}^2} = 5\,\text{ص} + 5\,\text{س}\,\text{ص}'$$

$$\frac{-2}{1} - \frac{3\,\text{ص}'}{1} = 5 + 5\,\text{ص}'$$

$$-2 - 5 = 5\,\text{ص}' + 3\,\text{ص}'$$

$$-7 = 8\,\text{ص}'$$

$$\boxed{\text{ص}' = \frac{-7}{8}}$$

تمارين ص١٤٧(١١)

س٦: $س^2 - ٢س + ص^2 = ٢٥$

$ص = س^2 - ٢س + ٥$

$\boxed{ص - ٥ = س^2 - ٢س}$

$ص - ٥ + ص^2 = ٢٥$

$ص^2 + ص - ٣٠ = ٠$

$(ص + ٦)(ص - ٥) = ٠$

$ص = -٦$ ، $ص = ٥$

$ص = -٦ \Leftarrow -٦ - ٥ = س^2 - ٢س$

$-١١ = س^2 - ٢س \Leftarrow س^2 - ٢س + ١١ = صفر$

$م = ب^2 - ٤أجـ = ٩ - ٤٤ = -٣٥ \Leftarrow$ لا حل لأن المميز سالب

$ص = ٥$

$ص = س^2 - ٢س + ٥$

$٥ - ٥ = س^2 - ٢س + ٥ - ٥$

$س^2 - ٢س = ٠$

$\boxed{\begin{array}{c} س(س - ٣) = ٠ \\ س = ٠ ، ٣ \end{array}}$

$ص = ٥$

$٥ - ٥ = س^2 - ٣س$

$صفر = س^2 - ٣س$

$(٠،٥)$ ، $(٣،٥)$

$(٠،٥)$:

$٢س - ٣ + ٢ص صَ = صفر$

$(٢×٠) - ٣ + ٢×٥ صَ = صفر$

$-٣ + ١٠صَ = صفر$

$١٠ صَ = ٣$

$صَ = \frac{٣}{١٠}$

$صَ = م_{المماس} = \frac{٣}{١٠} \Leftarrow م_{العمودي} = \frac{-١٠}{٣}$

معادلة العمودي

$ص - ص_1 = م_{العمودي}(س - س_1)$

$ص - ٥ = \frac{-١٠}{٣}(س - ٠)$

$ص - ٥ = -\frac{١٠}{٣} س$

$(٣،٥)$:

$(٢×٣) - ٣ + ٢×٥ صَ = صفر$

$٦ - ٣ + ١٠صَ = صفر$

$٣ + ١٠صَ = صفر$

$١٠صَ = -٣ \Leftarrow صَ = \frac{-٣}{١٠}$

$م_{المماس} = \frac{-٣}{١٠} \Leftarrow م_{العمودي} = \frac{١٠}{٣}$

معادلة العمودي

$ص - ص_1 = م_{العمودي}(س - س_1)$

$ص - ٥ = \frac{١٠}{٣}(س - ٣)$

س٣ : ف² = م ن² + ٢٤

ع(٢) = ١

٢ف دف/دن = ٢م ن ⟸ دف/دن = م ن / ف

ع(ن) = دف/دن = م ن / ف

ع(ن) = م ن / √(م ن² + ٢٤)

ع(٢) = ٢م / √(م × ٤ + ٢٤)

١ = ٢م / √(٤م + ٢٤)

√(٤م + ٢٤) = ٢م

٤م + ٢٤ = ٤م²

٤م² − ٤م − ٢٤ = ٠

م² − م − ٦ = ٠

(م + ٢)(م − ٣) = ٠ ∴

م = −٢ ✗ ، ٣

$\boxed{\text{م} = ٣}$

$\boxed{\text{ع(٢) = ١ ، ن = ٢}}$

ف² = م ن² + ٢٤

٢ف ف' = ٢م ن

٢ف × ع = ٢م ن

٢ف = ٤م

$\boxed{\text{ف} = ٢\text{م}}$

(٢م)² = م ن² + ٢٤

٤م² = ٤م + ٢٤

٤م² − ٤م − ٢٤ = ٠ ÷ ٤

م² − م − ٦ = ٠

(م − ٣)(م + ٢) ⟸ م = ٣ ✓

م = −٢ ✗

س٤ : ف = أ جا (٢ن + م)

$$ع = \frac{دف}{دن}$$

ع = أ × جتا (٢ن + م) × ٢

= ٢أ جتا (٢ن + م)

$$ت = \frac{دع}{دن}$$

ت = ٢أ × − جا (٢ن + م) × ٢

= −٤أ جا (٢ن + م)

= −٤ ف

س٥ : (−٢ ، ١) يمر منحنى العلاقة ٤ س٢ + ص٢ = ٤

نفرض نقطة التماس (س١، ص١)

ص٢ = −٤س (س + ٢)

ص٢ = −٤س٢ − ٨س

$$م_{المماس} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \frac{ص}{س+٢} = ق'(س)$$

٨س + ٢ص ص' = ٠

٢ص ص' = −٨س

$$ص' = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{-٤س}{ص}$$

$$\frac{-٤س}{ص} = \frac{ص}{س+٢}$$

$$س = \frac{-١}{٢} \quad ص = \pm\sqrt{٣}$$

$$\left(\frac{-١}{٢}، \sqrt{٣}\right)، \left(\frac{-١}{٢}، -\sqrt{٣}\right)$$

قواعد هامة:

$\text{لو}_{هـ} \frac{أ \times ب}{جـ} = \text{لو}_{هـ} أ \times ب - \text{لو}_{هـ} جـ = \text{لو}_{هـ} أ + \text{لو}_{هـ} ب - \text{لو}_{هـ} جـ$

$\text{لو}_{هـ} س^{ن} = ن \, \text{لو}_{هـ} س$

نشاط (٣) ص٤٦ :

$ص = \frac{(س+١)^{٥} (٢+س)^{٤}}{(س^{٢}+١)^{٣}}$ بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين

$\text{لو}_{هـ} ص = \text{لو}_{هـ} \left(\frac{(س+١)^{٥} (٢+س)^{٤}}{(س^{٢}+١)^{٣}} \right)$

$\text{لو}_{هـ} ص = \text{لو}_{هـ} (س+١)^{٥} + \text{لو}_{هـ} (٢+س)^{٤} - \text{لو}_{هـ} (س^{٢}+١)^{٣}$

$\text{لو}_{هـ} ص = ٥ \, \text{لو}_{هـ} (س+١) + ٤ \, \text{لو}_{هـ} (٢+س) - ٣ \, \text{لو}_{هـ} (س^{٢}+١)$

$\frac{ص'}{ص} = ٥ \times \frac{١}{س+١} + ٤ \times \frac{١}{٢+س} - ٣ \times \frac{٢س}{س^{٢}+١}$

$\frac{ص'}{ص} = \frac{٥}{س+١} + \frac{٤}{٢+س} - \frac{٦س}{س^{٢}+١}$

$\frac{ص'}{١٦} = \frac{٥}{١} + \frac{٤}{٢} - \cancel{\frac{٠}{١}}$ عندما $\boxed{س = ٠}$

$ص = \frac{١ \times ١٦}{١} = ١٦$

$\frac{ص'}{١٦} = ٧$

$ص' = ١٦ \times ٧$

$\boxed{ص' = ١١٢}$

س٦: $\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{ص}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(-1,\,-1)}$

$\text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} = -\text{ص}'\,\text{هـ}^{-\text{ص}} + -\text{هـ}^{-\text{س}}$

$\text{ص}'\,\text{هـ}^{1} + \text{هـ}^{-1} = -\text{ص}'\,\text{هـ}^{-1} + -\text{هـ}^{1}$

$\text{ص}'\,\text{هـ} + \dfrac{1}{\text{هـ}} = -\text{ص}'\,\dfrac{1}{\text{هـ}} - \text{هـ}$

$\text{ص}'\,\text{هـ} + \text{ص}'\,\dfrac{1}{\text{هـ}} = \dfrac{-1}{\text{هـ}} - \text{هـ}$

$\dfrac{\text{ص}'\cancel{(\text{هـ} + \text{هـ}^{-1})}}{\cancel{\text{هـ} + \text{هـ}^{-1}}} = \dfrac{-\cancel{(\text{هـ}^{-1} + \text{هـ})}}{\cancel{\text{هـ} + \text{هـ}^{-1}}}$

$\text{ص}' = -1$

$\text{ص}'\left(\dfrac{\text{هـ}\times\text{هـ}}{1\times\text{هـ}} + \dfrac{1}{\text{هـ}}\right) = \dfrac{-1}{\text{هـ}} - \dfrac{\text{هـ}\times\text{هـ}}{1\times\text{هـ}}$

$\text{ص}'\left(\dfrac{\text{هـ}^2 + 1}{\text{هـ}}\right) = \left(\dfrac{-1 - \text{هـ}^2}{\text{هـ}}\right)$

$\text{ص}'\cancel{\left(\dfrac{\text{هـ}^2 + 1}{\text{هـ}}\right)} = -\cancel{\left(\dfrac{1 + \text{هـ}^2}{\text{هـ}}\right)}$

$\text{ص}' = -1$

س٧: $\text{س}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص}$ ، $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(1,\,\text{هـ})}$

$\text{س}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

$2\text{س} = \dfrac{1}{\text{س}} + \dfrac{\text{ص}'}{\text{ص}}$

$2 = 1 + \dfrac{\text{ص}'}{\text{هـ}}$

$\dfrac{\text{ص}'}{\text{هـ}} = 2 - 1$

$\dfrac{\text{ص}'}{\text{هـ}} = 1$

$\text{ص}' = \text{هـ}$

$\text{ص}^{\text{م}-1} \times \text{ص}' \quad \text{م}$

س٨ : $\text{ص} = (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}} \times (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}}$

أثبت أن $\dfrac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{م} \left(\dfrac{\text{ق}'}{\text{ق}} + \dfrac{\text{هـ}'}{\text{هـ}} \right) (\text{س})$

$$\text{ص}' = \text{م} (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}-1} \times \text{ق}'(\text{س}) \times (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}} + \text{م} (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}-1} \text{هـ}'(\text{س}) \times (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}}$$

$$\text{ص}' = \text{م}\, \text{ق}^{\text{م}-1} \text{هـ}^{\text{م}-1} (\text{ق}' \text{هـ} + \text{هـ}' \text{ق}) \times \frac{\text{ق} \times \text{هـ}}{\text{ق} \times \text{هـ}}$$

$$\text{ص}' = \text{م}\, \text{ق}^{\text{م}} \text{هـ}^{\text{م}} \left(\frac{\text{ق}' \text{هـ} + \text{هـ}' \text{ق}}{\text{ق}\, \text{هـ}} \right)$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{\text{م}\, \text{ص} \left(\dfrac{\text{ق}'}{\text{ق}} + \dfrac{\text{هـ}'}{\text{هـ}} \right)}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{م} \left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}} + \frac{\text{هـ}'}{\text{هـ}} \right).$$

بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}} \times (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{ق}(\text{س}))^{\text{م}} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{م}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{م}\, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س}) + \text{م}\, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}(\text{س})$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{م} \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} + \text{م} \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{م} \left(\frac{\text{ق}'}{\text{ق}} + \frac{\text{هـ}'}{\text{هـ}} \right) (\text{س})$$

* عندما لا تكون نقطة التماس موجودة نفرضها

مثال: $(-2 , 0)$ نقطة تقع على المماس

$4\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$ نفرض $(\text{س} , \text{ص})$ نقطة التماس

$$\text{م}_{\text{المماس}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - -2} \Rightarrow \boxed{\frac{\text{ص}}{\text{س}+2}}$$

$$\text{م}_{\text{المماس}} = \text{ق}'(\text{س})$$

$$8\text{س} + 2\text{ص}\,\text{ص}' = 0$$

$$\frac{2\text{ص}\,\text{ص}'}{2\text{ص}} = \frac{-8\text{س}}{2\text{ص}}$$

$$\boxed{\text{ص}' = \frac{-4\text{س}}{\text{ص}}}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}+2} = \frac{-4\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{ص}^2 = -4\text{س}^2 - 8\text{س}$$

$$\text{ص}^2 + 4\text{س}^2 + 8\text{س} = 0$$

$$4 + 8\text{س} = 0$$

$$\frac{8\text{س}}{8} = \frac{-4}{8} \Rightarrow \boxed{\text{س} = \frac{-1}{2}}$$

$$\text{ص}^2 + 4\text{س}^2 = -8\text{س}$$

$$\frac{4}{-8} = \frac{\cancel{-8}\text{س}}{-8}$$

نجد ص

$$4\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$$

$$4 \times \frac{1}{4} + \text{ص}^2 = 4$$

$$1 + \text{ص}^2 = 4$$

$$\text{ص}^2 = 3$$

$$\text{ص} = \pm\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{-1}{2} , \sqrt{3}\right) , \left(\frac{-1}{2} , -\sqrt{3}\right)$$

تمارين عامة ص(٤٨) :

س١ : ① $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٤$ [١، ٣] $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٢} = ٤$

ق(٣) - ق(١) = ٨ ← ①

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = -٥$ [٣، ٧] $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٤} = -٥$

②

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ؟$ [١، ٧]   ق(٧) - ق(٣) = -٢٠ ②

ق(٧) - ق(١) = -١٢

$\frac{ق(٧) - ق(١)}{٧ - ١} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$ ③

④ ظا ٥ = ١٣٥ = $\boxed{-١ = ق'(٢)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - صفر}{٢ ...} = \frac{ق'(٢)}{٢} = \frac{-١}{٢}$ ⑤

③ ق(س) = جتا ٢س   ق''(س) + ٦ق(س)

ق'(س) = - جا ٢س × ٢

ق''(س) = - جتا ٢س × ٢ × ٢

ق''(س) = - ٤ جتا ٢س

ق''(س) + ٦ق(س) = -٤ جتا ٢س + ٦ جتا ٢س

= ٢ جتا ٢س

④ $\sqrt{٢س+١} = ٣$ | ق'($\sqrt{٢س+١}$) × $\frac{٢}{٢\sqrt{٢س+١}}$ = ٣س

٢س + ١ = ٩

٢س = ٨ | ق'(٣) × $\frac{١}{٣}$ × ٣ = ٣ × ١٦ ÷ ٣ × ٣

$\boxed{س = ٤}$

⑦ ق'(٣) = ١٤٤

⑤ س² − س ص + ص² = ٣ ، $\frac{د ص}{د س}\Big|_{(١ ، −١)}$

٢س − ص + صَ س + ٢ص صَ = ٠

٢×١ − −١ + صَ ×١ + ٢×−١ صَ = ٠

٢ + ١ − صَ − ٢صَ = ٠

٣ − ٣صَ − ٢صَ = ٠

٣ − ٣صَ = ٠

٣ = ٣صَ

صَ = ١ ج

⑥ ق(س) = { س² + ٢ ، س ≠ ٥ (للنهاية)
١١س ، س = ٥ ← (٥ ، ٥١) نقطة وصل اقتران لا يجوز اشتقاقها

قَ(٥)

نبحث في الاتصال عند س = ٥

ق(٥) ≟ نها ق(س)
س ← ٥

٥١ ≟ نها س² + ٢
س ← ٥

٥١ ≠ ٢٧ ق(س) غ. متصل عند س = ٥

قَ(٥) غ. م د

إذا طلب قَ(س)

قَ(س) = { ٢س ، س ≠ ٥
غ.م ، س = ٥

قَ(٦) = ١٢

⑦ ق(ن) ع(ن) = ن

ع(٢) = ٣

ق(٢) = ؟!

$قَ(ن)\,ع(ن) + عَ(ن) \times ق(ن) = ١$

$ع(٢)\,ع(٢) + قَ(٢) \times ق(٢) = ١$ ‏ ‏ ‏ ع(٢) = ٣

$٣ \times ٣ + قَ(٢) \times \frac{٢}{٣} = ١$ ‏ ‏ ‏ العلاقة الأصلية

ق(ن) ع(ن) = ن

$\frac{٣}{٢}\times \quad \frac{٢}{٣}\,قَ(٢) = -٨ \times \frac{٣}{٢}$ ‏ ‏ ‏ ق(٢) ع(٢) = ٢

ق(٢) × ٣ = ٢

$قَ(٢) = -١٢$ مرات (د) ‏ ‏ ‏ $ق(٢) = \frac{٢}{٣}$

⑧ $قَ(س) = \frac{١}{١+س^٢}$ ‏ ‏ ‏ هـ(س) = ظا س ‏ ‏ ‏ (ق∘هـ)′(س)

$(ق∘هـ)'(س) = قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)$

$= قَ(ظا س) \times قا^٢ س$

$= \frac{١}{١+ظا^٢ س} \times قا^٢ س$

$= \frac{١}{قا^٢ س} \times قا^٢ س = \boxed{١}$ (ج)

⑨ $ق(س) = (س^٢ + ٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ‏ ‏ ‏ قً(١)

$قَ(س) = \frac{٢}{٣}(س^٢+٧)^{-\frac{١}{٣}} \times ٢س$

$= \frac{٤س}{٣}(س^٢+٧)^{-\frac{١}{٣}}$

$قً(س) = \frac{٤}{٣}(س^٢+٧)^{-\frac{١}{٣}} + -\frac{١}{٣}(س^٢+٧)^{-\frac{٤}{٣}} \times ٢س \times ٢س \times \frac{٤}{٣}$

$= \frac{٤}{٣}(س^٢+٧)^{-\frac{١}{٣}} - \frac{٨}{٩}\,س^٢ (س^٢+٧)^{-\frac{٤}{٣}}$

$قً(١) = \frac{٤}{٣}(١+٧)^{-\frac{١}{٣}} - \frac{٨}{٩} \times ١\,(١+٧)^{-\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{٤}{٣}(٨)^{-\frac{١}{٣}} - \frac{٨}{٩} \times (٨)^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{٤}{٣}(٢^٣)^{-\frac{١}{٣}} - \frac{٨}{٩} \times (٢^٣)^{-\frac{٤}{٣}}$

$$= \frac{٢ \times ٤}{٢} - \frac{٩}{٤} \times ٣^{٢} = \frac{٤}{٢ \times ٣} - \frac{٨}{٩ \times ٢^{٢}}$$

$$= \frac{٤}{٦} - \frac{١٨}{٩ \times ١٦}$$

$$\frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٣} - \frac{١}{١٨} = \frac{١١}{١٨}$$ (٩)

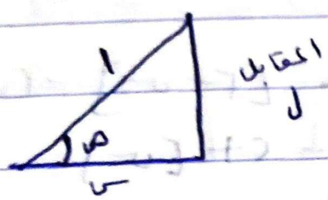
(١٠) $س = جتا\, ص$ $\frac{دص}{دس}$

$١ = - جا\, ص \times صَ$

$صَ = \frac{-١}{جا\, ص}$

$صَ = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(ب)



$جتا\, ص = \frac{المجاور}{الوتر}$

$جتا\, ص = \frac{س}{١}$

$جا\, ص = \frac{المقابل}{الوتر}$

$= \frac{\sqrt{١ - س^{٢}}}{١}$

$= \sqrt{١ - س^{٢}}$

$\Rightarrow$

نظرية فيثاغورس

$١^{٢} = ل^{٢} + س^{٢}$

$١ - س^{٢} = ل^{٢}$

$\sqrt{١ - س^{٢}} = ل$

(١١) $(ق \circ هـ)َ (٣) = ١٥$

$ق(س) = س^{٢} - ٩$

$قَ(س) = ٢س$

$هـَ(٣) = ٥$

$قَ(هـ(س))\, هـَ(س) = ١٥$

$قَ(هـ(٣)) \times هـَ(٣) = ١٥$

$٢هـ(٣) \times ٥ = ١٥$

$١٠\, هـ(٣) = ١٥$

$هـ(٣) = \frac{٣}{٢} = ١,٥$ (ب)

١٣) أ) ق(س) = [س − ٢]

غير قابل للاشتقاق لأنه غير متصل عند نقاط التحول

ب) ق(س) = |س − ٢| − |س| غير قابل للاشتقاق

جـ) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}$

= $\sqrt{(\text{س} + 1)^2}$

= |س + ١| متصل وغير قابل للاشتقاق.

د) ق(س) = [س + ٢] − [س]

= [س] + ٢ − [س] = ٢ قابل للاشتقاق ✓✓

٢ ثابت

أ ∈ ص

[س + أ] = [س] + أ

الاقتران الثابت كثير حدود ← متصل وقابل للاشتقاق.

[أس + ب] غ. متصل عند نقاط التحول وبالتالي غير قابل للاشتقاق عندها

[أس + ب] متصل ولكن غ. قابل للاشتقاق عند نقاط التحول.

س٢ : ق'(١) = -٢   ق(٣) = -٢   ق'(٣) = ٤

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(١+٩\text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\sqrt{١+\text{هـ}} - ١}$$

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}'(١+٩\text{هـ}) \times ٩ - ٠}{\frac{١}{٢\sqrt{١+\text{هـ}}} - ٠} = \frac{\text{ق}'(١) \times ٩}{\frac{١}{٢\sqrt{١+٠}}}$$

$$= \frac{-٢ \times ٩}{\frac{١}{٢}} = -٢ \times ٩ \times ٢$$
$$= -٣٦$$

س٤ : ق(٢) = ٣   ق'(٢) = -١

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١) - \text{ق}(٢)}{\text{س}^٢ - ١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}'(\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١) \times (٢\text{س} + ٢)}{٢\text{س}}$$

$$\frac{\text{ق}'(٢) \times ٤}{٢} = -١ \times ٢ = -٢$$

س٥ : (أ)

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{\text{ظا س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\,\text{هـ}^{٤\text{س}}}{\text{قا}^٢\text{س}}$$

$$= \frac{٤\,\text{هـ}^٠}{\text{قا}^٢(٠)} = \frac{٤}{١} = ٤$$

(ب)

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٢س} - هـ^{س}}{٢س}$$

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{٢ هـ^{٢س} - هـ^{س}}{٢}$$

$$\frac{٢ هـ^{(٢ \times ٠)} - ١ هـ^{٠}}{٢} = \frac{١}{٢}$$

(ج)

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا٢س - جاس}{٢س}$$

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{٢جتا٢س - جتاس}{٢}$$

$$\frac{٢جتا٠ - جتا٠}{٢} = \frac{٢ \times ١ - ١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

(د)

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{١ - جتاس}{س جاس}$$

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{٠ + جاس}{جاس + \cancel{٠} + س جتاس}$$

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جاس}{جاس + س جتاس} = \frac{جا٠}{جا٠ + ٠ جتا٠} = \frac{٠}{٠ + ٠} = \frac{٠}{٠}$$

$$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جتاس}{جتاس + ١ \times جتاس + س \times -جاس}$$

$$\frac{جتا٠}{جتا٠ + ١ \times جتا٠ + ٠ \times -جا٠} = \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$$

معر
مهم

س٧: $\lim_{س \to 1} \frac{ق(س) - ٢}{س - ١} = ٣$

١) المطلوب

$\lim_{س \to 1} \frac{س^٣ ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

$\lim_{س \to 1} \frac{٣س^٢ ق(س) + س^٣ ق'(س) - ٠}{١}$

$٣ق(١) + ١^٣ ق'(١)$ | $ق(١) - ٢ = ٠$

$٣ق(١) + ق'(١)$ | $ق(١) = ٢$

$٣ \times ٢ + ٣$ | باستخدام لوبيتال

٩ | $\lim_{س \to 1} \frac{ق'(س)}{١} = ٣$

$ق'(١) = ٣$

س٨: أحمد ← $ف_١(ن) = ٥ن^٢$ $= ٠$

نزار ← $ف_٢(ن) = ١٥ن + ٥ن^٢$ $= ١$

ارتطمت كرة أحمد بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار

المطلوب $ع_٢(ن)$ لنزار لحظة الارتطام بالأرض.

لحظة ارتطام الجسم بالأرض $ف(ن) = ٠$

نفرض لحظة ارتطام كرة نزار ن

نفرض لحظة ارتطام كرة أحمد ن+١

$ف_١(ن+١) = ف_٢(ن)$

$\frac{٥(ن+١)^٢}{٥} = \frac{١٥ن}{٥} + \frac{٥ن^٢}{٥}$

$\cancel{ن^٢} + ٢ن + ١ = ٣ن + \cancel{ن^٢}$

$٢ن + ١ = ٣ن$

$-٢ن \quad -٢ن$

$\boxed{١ = ن}$ نزار

$ع_٢(ن) = ١٥ + ١٠ن$

$ع_٢(١) = ١٥ + ١٠ \times ١$

$= ٢٥$ م/ث

س٩ : ق(س) = أ ظا س

هـ(س) = $\frac{٣س}{س^٢+١}$ ، (هـ∘ق)′($\frac{π}{٦}$) = ٠

(هـ∘ق)′(س) = هـ′(ق(س)) × ق′(س)

(هـ∘ق)′($\frac{π}{٦}$) = هـ′(ق($\frac{π}{٦}$)) × ق′($\frac{π}{٦}$)

= هـ′(أ ظا $\frac{π}{٦}$) × أ قا² $\frac{π}{٦}$

= هـ′($\frac{أ}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}\,أ}{٢}$

ق′(س) = أ قا² س

هـ′(س) = $\frac{٣(س^٢+١) - ٣س × ٢س}{(س^٢+١)^٢}$

= $\frac{٣س^٢ + ٣ - ٦س^٢}{(س^٢+١)^٢}$

= $\frac{٣ - ٣س^٢}{(س^٢+١)^٢}$

صفر = $\frac{٣ - ٣ × \frac{أ^٢}{٤}}{(\frac{أ^٢}{٤}+١)^٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}\,أ}{٢}$

$\frac{صفر}{١}$ = $\frac{(٣ - \frac{٣أ^٢}{٤}) × \sqrt{٣}\,أ}{٢(\frac{أ^٢}{٤}+١)^٢}$

صفر = $(٣ - \frac{٣أ^٢}{٤})$ × $\sqrt{٣}$ أ

إما $\sqrt{٣}$ أ = صفر ⟸ أ = صفر مرفوضة

أو ٣ − $\frac{٣أ^٢}{٤}$ = صفر

$\frac{٤}{٣}$ × ٣ = $\frac{٣}{٤}$ أ² × $\cancel{\frac{٤}{٣}}$

أ² = ٤ ⟸ $\boxed{أ = \mp ٢}$

س١١ : ملاحظة : اقترانات دوارة

[١] ق(س) = جا س أو جتا س

ق'(س) = جتا س

ق''(س) = − جا س

ق'''(س) = − ق'(س)

[٢] ص = $هـ^{أس}$

ص' = أ $هـ^{أس}$

ص' = أ ص

$(هـ^{٢س})' = ٢\,هـ^{٢س}$

$(هـ^{-٢س})' = -٢ \times هـ^{-٢س}$

(أ ق(س))' = أ ق'(س)

ق = ٢ ($هـ^{٢س} - هـ^{-٢س}$)

ق' = ٢ (٢ $هـ^{٢س}$ + ٢ $هـ^{-٢س}$)

ق'' = ٢ (٤ $هـ^{٢س}$ − ٤ $هـ^{-٢س}$)

= ٤ × $\underbrace{٢ (هـ^{٢س} - هـ^{-٢س})}$

= ٤ ق

ق'' = ٤ ق و.هـ.م

س١٣ : ق(س) = جا³ س − جتا³ س ، ق''($\frac{\pi}{٤}$)

ق'(س) = ٣ جا² س جتا س − ٣ جتا² س × − جا س

= ٣ جا² س جتا س + ٣ جتا² س جا س

ق''(س) = ٦ جا س جتا س × جتا س + − جا س × ٣ جا² س + ٦ جتا س × − جا س × جا س + جتا س × ٣ × جتا² س

= ٦ جا س جتا² س − ٣ جا³ س − ٦ جتا س جا² س + ٣ جتا³ س

ق''($\frac{\pi}{٤}$) = ٦ × جا٤٥ جتا² ٤٥ − ٣ (جا٤٥)³ − ٦ جتا٤٥ (جا٤٥)² + ٣ (جتا٤٥)³

= ٦ × $(\frac{1}{\sqrt{2}})^3$ − ٣ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^3$ − ٦ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^3$ + ٣ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^3$

= صفر

جا٤٥ = جتا٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

س ١٣ : $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$ نحل نفسها لوحدي بوضع عامل مشترك

أ $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٣} (٣ + ٢\text{س})^{٤}$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٣]$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣(\text{س} - ٢)^{٢} \times (٣ + ٢\text{س})^{٤} + ٤(٣ + ٢\text{س})^{٣} \times ٢ \times (\text{س} - ٢)^{٣}$

$= ٣(\text{س} - ٢)^{٢} (٣ + ٢\text{س})^{٤} + ٨(\text{س} - ٢)^{٣} (٣ + ٢\text{س})^{٣}$

$(\text{س} - ٢)^{٢} (٣ + ٢\text{س})^{٣} [٣(٣ + ٢\text{س}) + ٨(\text{س} - ٢)] = \text{صفر}$

$(\text{س} - ٢)^{٢} (٣ + ٢\text{س})^{٣} (٩ + ٦\text{س} + ٨\text{س} - ١٦) = ٠$

$(\text{س} - ٢)^{٢} (٣ + ٢\text{س})^{٣} (١٤\text{س} - ٧) = \text{صفر}$

إما $(\text{س} - ٢)^{٢} = ٠$

$\text{س} - ٢ = ٠ \rightarrow \boxed{\text{س} = ٢}$ $\text{س} \in [٠ ، ٣]$

أو $(٣ + ٢\text{س})^{٣} = ٠$

$٣ + ٢\text{س} = ٠$

$\text{س} = \frac{-٣}{٢} \notin [٠ ، ٣]$ مرفوضة

أو $١٤\text{س} - ٧ = ٠$

$١٤\text{س} = ٧$

$\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}} \in [٠ ، ٣]$

ب $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جاس}(١ + \text{جتاس})$ ، $\text{س} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}(١ + \text{جتاس}) + -\text{جاس} \times \text{جاس}$

$= \text{جتاس}(١ + \text{جتاس}) - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= \text{جتاس} + ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١$

$= (٢\text{جتاس} - ١)(\text{جتاس} + ١)$

$\text{جتا}٢\text{س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$

$= ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١$

أو نعوض مكان $\text{جا}^{٢}\text{س}$

$١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$٢\text{جتاس} - ١ = ٠$

$٢\text{جتاس} = ١$

$\text{جتاس} = \frac{١}{٢}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

$\text{جتاس} = -١$

$\text{س} = \pi$ ✗ مرفوضة

س٥ : ق(ن) = م(جتا ٢ن + جا ٢ن)

ق(ن) = ٣

ت ؟؟

ق̇(ن) = م(−جا٢ن × ٢ + جتا٢ن × ٢)

= م(−٢جا٢ن + ٢جتا٢ن)

ق̈(ن) = م(−٢جتا٢ن × ٢ + ٢ × −جا٢ن × ٢)

ق̈(ن) = م(−٤جتا٢ن − ٤جا٢ن)

ت(ن) = −٤م(جتا٢ن + جا٢ن)

= −٤ × ٣

= −١٢ م/ث²

س٦ : د(س) = س + $\frac{1}{س}$

م القاطع = $\frac{Δص}{Δس}$

= $\frac{\frac{٥}{٢} - ٢}{٢ - ١}$ = $\frac{\frac{٥-٤}{٢}}{١}$ = $\frac{١}{٢}$

المماس // القاطع

∴ م المماس = م القاطع = $\frac{١}{٢}$

م المماس = د̇(س)

$\frac{١}{٢}$ = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

$\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{١}{٢}$

س² = ٢

س = ± $\sqrt{٢}$

س = $\sqrt{٢}$ ، س = −$\sqrt{٢}$

ص = $\sqrt{٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = −$\sqrt{٢}$ + $\frac{١}{-\sqrt{٢}}$

($\sqrt{٢}$ ، د($\sqrt{٢}$)) ، (−$\sqrt{٢}$ ، د(−$\sqrt{٢}$))