الفصل الأول
الوحدة الأولى

مثال: إذا كان هـ(س) = (ق(س) + س)² وكان متوسط التغير في الفترة [٢، ٥] للاقتران ق(س) = ٣، ومتوسط تغير هـ(س) في نفس الفترة = ٤٠، أوجد قيمة ق(٥) + ق(٢)

$$\frac{\Delta \text{هـ(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(5) - \text{هـ}(2)}{5-2}$$

$$= \frac{(\text{ق}(5)+5)^2 - (\text{ق}(2)+2)^2}{3} = 40$$

$$\Leftarrow (\text{ق}(5)+5 + \text{ق}(2)+2) \times (\text{ق}(5)+5 - (\text{ق}(2)+2)) = 120$$

$$\Leftarrow (\text{ق}(5)+\text{ق}(2)+7) \times (\text{ق}(5) - \text{ق}(2) + 3) = 120$$

لكن $\frac{\Delta \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(2)}{5-2} = 3 \Leftarrow \text{ق}(5) - \text{ق}(2) = 9$

$$\therefore (\text{ق}(5)+\text{ق}(2)+7)(9+3) = 120$$

$$\Leftarrow \text{ق}(5)+\text{ق}(2)+7 = \frac{120}{12} = 10$$

$$\Leftarrow \text{ق}(5)+\text{ق}(2) = 10 - 7 = 3$$

س٢: إذا كان ق(س) = أس٣ + ب س، أثبت أن متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير قيمة س من ١ إلى ن يساوي أ(ن٢+ن+١)+ب

$$\frac{\Delta \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(ن)} - \text{ق(١)}}{\text{ن} - ١} = \frac{(\text{أن}^٣ + \text{ب ن}) - (\text{أ} + \text{ب})}{(\text{ن} - ١)}$$

$$= \frac{\text{أن}^٣ + \text{ب ن} - \text{أ} - \text{ب}}{(\text{ن} - ١)}$$

$$= \frac{(\text{أن}^٣ - \text{أ}) + (\text{ب ن} - \text{ب})}{(\text{ن} - ١)}$$

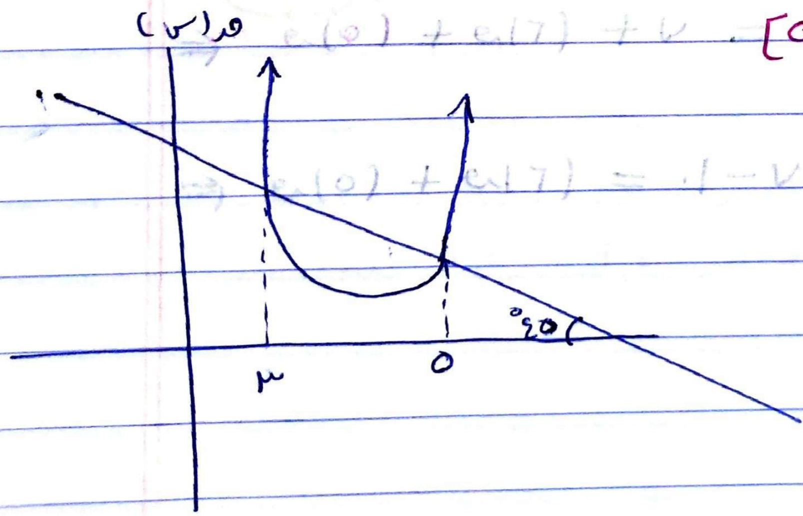
$$= \frac{\text{أ}(\text{ن}^٣ - ١) + \text{ب}(\text{ن} - ١)}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ن} - ١)(\text{ن}^٢ + \text{ن} + ١) + \text{ب}(\text{ن} - ١)}{(\text{ن} - ١)}$$

$$= \frac{\cancel{(\text{ن} - ١)}\left(\text{أ}(\text{ن}^٢ + \text{ن} + ١) + \text{ب}\right)}{\cancel{(\text{ن} - ١)}}$$

$$= \text{أ}(\text{ن}^٢ + \text{ن} + ١) + \text{ب}$$

س٣: الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران ق(س) وكان هـ(س) = ق(س) + س٢، جد متوسط التغير في هـ(س) في [٣، ٥].



Δهـ(س) / Δس = (هـ(٥) - هـ(٣)) / (٥ - ٣)

= ((ق(٥) + ٢٥) - (ق(٣) + ٩)) / ٢

= (ق(٥) + ٢٥ - ق(٣) - ٩) / ٢

= (ق(٥) - ق(٣)) / ٢ + (٢٥ - ٩) / ٢

= Δق(س) / Δس + ١٦ / ٢

لكن Δق(س) / Δس = ظا هـ

= ظا(١٣٥)°

= -١

= -١ + ٨ = ٧

تذكر أن : متوسط التغير = ميل القاطع = ظا هـ

هـ : زاوية الميل وتكون مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

مثال : إذا كان ق(س) = { |١ - س²| + ٤أ س ، س < ١
س ق'(س) + ١ ، س ≥ ١

وكان ق'(١) = ق(١) = ٢ ، أوجد ق(س)

نعيد تعريف |١ - س²| ، س < ١ : ١ - س² = ٠ ⇒ س = ±١

س² - ١   -١   ١ - س²   ١

- - - - ↑ + + + + ↑ - - - -

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 + 14س & س \le -1 \\ 1 - س^2 + 14س & -1 < س < 1 \\ س\,هـ^2(س) + 10 & س \ge 1 \end{cases}$$

لاحظ أن ق(س) متصل ∀ س ∈ ح

$$ق'(س) = \begin{cases} 2س + 14 & س < -1 \\ -2س + 14 & -1 < س < 1 \\ س \times 2هـ(س)\,هـ'(س) + هـ^2(س) & س > 1 \\ \text{غ.م} & س = -1 \\ \text{م} & س = 1 \end{cases}$$

∴ ق'(س) موجودة ∀ س ∈ ح / {-1}

ق(س) متصل عند س = -1

$$\left.\begin{array}{l} ق'(-1)^- = -2 + 14 = 12 \\ ق'(-1)^+ = 2 + 14 = 16 \end{array}\right\} \Leftarrow ق'(-1) \ \text{غ.م}$$

ق(س) متصل عند س = 1

$$\left.\begin{array}{l} ق'(1)^- = -2 + 14 = 12 \\ ق'(1)^+ = 1 \times 2هـ(1)\,هـ'(1) + هـ^2(1) \\ = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + 4 = 12 \end{array}\right\} \Leftarrow ق'(1) \ \text{م}$$

تذكر عند إيجاد المشتقة عند نقاط التحول يجب البحث في الاتصال أولاً.

س٦ : إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (أ ، ٠) جد

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٧\,\text{ق(س)}) - \text{جا(ق(س))}}{٣\,\text{ق(س)}}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٧\,\text{ق(س)}) - \text{جا ق(س)}}{٣\,\text{ق(س)}}$$

$$= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + ٧\,\text{ق(أ)}) - \text{جا ق(أ)}}{٣\,\text{ق(أ)}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

لاحظ أن ق(أ) = ٠

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = ٠$

جا ٠ = ٠

نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\dfrac{٧\,\text{ق}'\text{(س)}}{١ + ٧\,\text{ق(س)}} - \text{جتا ق(س)} \times \text{ق}'\text{(س)}}{٣\,\text{ق}'\text{(س)}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\cancel{\text{ق}'\text{(س)}} \left[\dfrac{٧}{١ + ٧\,\text{ق(س)}} - \text{جتا ق(س)} \right]}{٣\,\cancel{\text{ق}'\text{(س)}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\dfrac{٧}{١ + ٧\,\text{ق(س)}} - \text{جتا ق(س)}}{٣} = \frac{\dfrac{٧}{١ + ٧\,\text{ق(أ)}} - \text{جتا ق(أ)}}{٣}$$

لكن ق(أ) = ٠

جتا ٠ = ١

$$= \frac{\dfrac{٧}{١ + ٠} - \text{جتا ٠}}{٣} = \frac{٧ - ١}{٣} = ٢$$

س6 : إذا كان ق(س) = ن جا^{ن} س وكان ق''(س) = −25 جا^{2} س (جا^{3} س − 4 جا س جتا^{2} س)

جد قيمة ن الموجبة

ق'(س) = ن^{2} جا$^{ن-1}$ س × جتا س

ق''(س) = ن^{2} [جا$^{ن-1}$ س × −جا س + جتا س × (ن − 1) جا$^{ن-2}$ س × جتا س]

= ن^{2} [−جا^{ن} س + (ن − 1) جا$^{ن-2}$ س × جتا^{2} س]

بإخراج −جا^{2} س عامل مشترك

= −ن^{2} جا^{2} س [جا$^{ن-2}$ س − (ن − 1) جا$^{ن-4}$ س × جتا^{2} س]

= −25 جا^{2} س [جا^{3} س − 4 جا س جتا^{2} س]

من المعطيات

∴ −ن^{2} = −25 ⟸ ن^{2} = 25 ⟸ ن = 5 ، −5 ×

لاحظ عند تعويض قيمة ن في ق''(س) التي تم حسابها

يكون الجواب ق''(س) المعطاه في السؤال

س7 : إذا كان ق''''(س) = أ س^{2} ، وكان ق(س) = $\frac{\text{س}^{ن}}{12}$

أوجد قيمة كل من ن ، أ ؟؟

ق'(س) = $\frac{ن}{12}$ س$^{ن-1}$ ⟸ ق''(س) = $\frac{ن(ن-1)}{12}$ س$^{ن-2}$

⟸ ق'''(س) = $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{12}$ س$^{ن-3}$

⟸ ق''''(س) = $\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{12}$ س$^{ن-4}$

لكن $ق^{(ن)}(س) = أ س^٤ \Leftarrow ن - ٤ = ٢ \Leftarrow ن = ٦$

وكذلك $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{١٢} = أ$

$\Leftarrow أ = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{١٢} = ٣٠$

س٨ : إذا كان $ق(س) = \frac{لو_{هـ} س}{س^٢}$

أثبت أن $ق''(س) = \frac{٦ لو_{هـ} س - ٥}{س^٤}$

$ق'(س) = \frac{س^٢ (\frac{١}{س}) - لو_{هـ} س \times ٢س}{س^٤}$

$= \frac{س - ٢س لو_{هـ} س}{س^٤}$

$= \frac{س(١ - ٢ لو_{هـ} س)}{س^٤} = \frac{١ - ٢ لو_{هـ} س}{س^٣}$

$ق''(س) = \frac{س^٣ (\frac{-٢}{س}) - (١ - ٢ لو_{هـ} س)(٣س^٢)}{(س^٣)^٢}$

$= \frac{-٢س^٢ - (٣س^٢ - ٦س^٢ لو_{هـ} س)}{س^٦} = \frac{-٥س^٢ + ٦س^٢ لو_{هـ} س}{س^٦}$

بإخراج $س^٢$ عامل مشترك

$= \dfrac{+ \text{ك}^{٤}(٦ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ٥)}{٤ \text{س}^{٤}} = \dfrac{٦ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ٩}{\text{س}^{٤}}$

س٩: إذا كانت ص = م جا ن س + ب جتا ن س ، م ، ب ، ن ∈ ح
أثبت أن $\dfrac{\text{ص}''}{\text{ص}} = -\text{ن}^{٢}$

ص' = م ن جتا ن س − ب ن جا ن س   إخراج ن عامل مشترك
= ن (م جتا ن س − ب جا ن س)

ص'' = ن (− م ن جا ن س − ب ن جتا ن س)
= − ن² (م جا ن س + ب جتا ن س)   إخراج (− ن) عامل مشترك
= − ن² ص

$\therefore \dfrac{\text{ص}''}{\text{ص}} = \dfrac{-\text{ن}^{٢}\,\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}} = -\text{ن}^{٢}$

س١٥: إذا كانت $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{م} + \text{جتا ب س}}{\text{س}^{٢}}\right) = -٨$ أوجد م ، ب

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ مقدار موجودة ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \text{ س}^{٢} = ٠$ (المقام)

$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \text{ م} + \text{جتا ب س} = ٠ \Leftarrow \text{م} + ١ = ٠ \Leftarrow \text{م} = -١$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{م} + \text{جتا ب س}}{\text{س}^{٢}}\right) = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ب جا ب س}}{٢\text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم لوبيتال مرة أخرى

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ب جا ب س}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ب}^{٢} \text{ جتا ب س}}{٢} = \dfrac{-\text{ب}^{٢}}{٢} = -٨$

$\Leftarrow -\text{ب}^{٢} = -١٦ \Leftarrow \text{ب}^{٢} = ١٦ \Leftarrow \text{ب} = \pm ٤$

س11 : إذا كانت $ص = ظا^2 س$ اثبت ان

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = 2(1+ص)(1+3ص)$$

$ص' = 2 ظا س قا^2 س$

$ص'' = 2 ظا س (2 قا س ظا س قا س) + 2 قا^2 س قا^2 س$

$= 4 ظا^2 س قا^2 س + 2 قا^4 س$

$= 2 قا^2 س (2 ظا^2 س + قا^2 س)$

لكن $قا^2 س = 1 + ظا^2 س = 1 + ص$

لاحظ أن المطلوب يحتوي فقط ص التي تساوي $ظا^2 س$ لذلك يجب التخلص من $قا^2 س$

$\therefore ص'' = 2(1+ص)(2ص + 1 + 1 + ص)$

$ص'' = 2(1+ص)(3ص + 1)$

س12 : إذا كان المستقيم $4س - ص + 1 = 0$ يمس منحنى $هـ(س)$ عند $س = 2$ وكان $ق^3(2س - 1) = س^4 + 2س^3 + 5$

جد $\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(2)$

$$\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(س) = \frac{ق(س)\, هـ'(س) - هـ(س)\, ق'(س)}{(ق(س))^2}$$

$$\therefore \left(\frac{هـ}{ق}\right)'(2) = \frac{ق(2)\, هـ'(2) - هـ(2)\, ق'(2)}{(ق(2))^2}$$

نجد $ق(2)$ ، $ق'(2)$

المستقيم $4س - ص + 1 = 0$ ← $هـ(2)$ ، $هـ'(2)$

$\Leftarrow ص = 4س + 1$ يمس $هـ(س)$ عند $س = 2$

$\Leftarrow هـ(2) = ص = (4 \times 2) + 1 = 9$ ، $هـ'(2) = م = 4$

لإيجاد ق(٢) نجعل ٣س - ١ = ٢ ⟸ س = ١

عندما س = ١ ⟸ ق³(٢) = ١ + ٢ + ٥ = ٨ ⟸ ق(٢) = ٢

لإيجاد قَ(٢) ∴ نشتق الطرفين

٣ ق²(٣س - ١) × قَ(٣س - ١) × ٣ = ٤س³ + ٦س² |س = ١

⟸ ٩(٢)² قَ(٢) = ١٠ ⟸ قَ(٢) = ١٠/٣٦ = ٥/١٨

∴ (هـ/ق)َ(٢) = ((٢ × ٤) - (٩ × ٥/١٨)) / ٤

= (٨ - ٥/٢) / ٤ = ١١/٨

س١٣: إذا كان ق(٢س - ١) = جا²(π/١٨ (٤س - ٢)) بين أن

قَ(٣) = π/٣٦

نشتق الطرفين

قَ(٢س - ١) × ~~٢~~ = ~~٢~~جا(π/١٨ (٤س - ٢)) جتا(π/١٨ (٤س - ٢)) × ٤π/١٨

قَ(٢س - ١) = π/٩ (٢جا(π/١٨ (٤س - ٢)) جتا(π/١٨ (٤س - ٢)))

= (π/٩) جا(π/٩ (٤س - ٢)) ~~نتذكر أن~~ تذكر أن جا٢س = ٢جاس جتاس

لإيجاد قَ(٣) نجعل ٣ س -١ = ٣ ⟸ س = ٢

∴ قَ(٣) = $\frac{\pi}{٩}$ جا($\frac{\pi}{٩}$ × ٦) = $\frac{\pi}{٩}$ جا($\frac{٢\pi}{٣}$)

= $\frac{\pi}{٩}$ (جا $\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{\pi}{٩}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{١٨}$ = $\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{٣ \times ٦}$

= $\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{\sqrt{٣}\sqrt{٣} \times ٦}$ = $\frac{\pi}{٦\sqrt{٣}}$

تذكر أن جا($\frac{٢\pi}{٣}$) = + جا($\frac{\pi}{٣}$)
ربع ثاني

س١٦: يتحرك جسم في خط مستقيم وحسب العلاقة ف = P(جتا٢ن + جا٢ن)
جد تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من نقطة الانطلاق.

لاحظ لا يوجد معطيات في السؤال لإيجاد قيمة P

ع(ن) = فَ(ن) = P(-٢جا٢ن + ٢جتا٢ن)

ت(ن) = عَ(ن) = P(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)

ت(ن) = -٤P(جتا٢ن + جا٢ن)

= -٤ف(ن) لاحظ أن

ف = P(جتا٢ن + جا٢ن)

ت(ن)$|_{ف=٣}$ = -٤ × ٣ = -١٢ وحدة تسارع

لاحظ أننا لم نحتاج لقيمة P عند حساب التسارع

س15: إذا كان المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (1، 2) يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان:

$هـ(س) = \dfrac{ق^3(\frac{س}{2}) + 1}{س+1}$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) عند س = 2

عند س = 2 ⇐ س₁ = 2

معادلة المماس هي: ص − ص₁ = م(س − س₁)

2   هـ'(2) ؟!   هـ(2)

لاحظ أن ق(1) = 2

$ص_1 = هـ(2) = \dfrac{ق^3(\frac{2}{2}) + 1}{2+1} = \dfrac{ق^3(1) + 1}{3} = \dfrac{(2)^3 + 1}{3} = \boxed{3}$

$م = هـ'(س) = \dfrac{(س+1)\left(3ق^2(\frac{س}{2}) \times ق'(\frac{س}{2}) \times \frac{1}{2}\right) - \left(ق^3(\frac{س}{2})+1\right)(1)}{(س+1)^2}$

$م\Big|_{س=2} = هـ'(2) = \dfrac{3\left(\frac{3}{2}ق^2(1)\, ق'(1)\right) - \left(ق^3(1)+1\right)}{9}$

$= \dfrac{\frac{9}{2} \times 4 \times 1 - 9}{9} = \dfrac{18 - 9}{9}$

$م = \dfrac{9}{9} = 1$

لاحظ أن:
ق'(1) = م
= ظا هـ
$= ظا \frac{\pi}{4} = 1$

معادلة المماس هي: ص − 3 = 1(س − 2)

سؤال: إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = $\left(\text{س} + \frac{2}{\text{س}}\right)^{3}$ عند س = ٢ يمر بالنقطة (أ، ٠) جد قيمة أ

المماس يمر بالنقطة (أ، ٠) ⇐ (أ، ٠) تحقق معادلة المماس

لذلك نجد معادلة المماس أولاً

المماس المرسوم عند س = ٢ ⇐ س١ = ٢

معادلة المماس هي: $\underbrace{\text{ص}_1}_{\text{ق}(2)}$ − ص = $\underbrace{\text{م}}_{\text{ق}'(2)}$ (س − $\underbrace{\text{س}_1}_{2}$)

ص١ = ق(٢) = $\left(2 + \frac{2}{2}\right)^{3} = (3)^{3} = 27$

م = ق′(س) = $3\left(\text{س} + \frac{2}{\text{س}}\right)^{2}\left(1 - \frac{2}{\text{س}^{2}}\right)$

$\text{م}\Big|_{\text{س}=2}$ = ق′(٢) = $3(3)^{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}$

∴ معادلة المماس هي: ص − ٢٧ = $\frac{27}{2}$ (س − ٢) (أ، ٠)

⇐ ٠ − ٢٧ = $\frac{27}{2}$ (أ − ٢)

⇐ −٢٧ = $\frac{27\text{أ}}{2}$ − ٢٧ ⇐ $\frac{27\text{أ}}{2}$ = ٠

⇐ $\boxed{\text{أ} = 0}$

س٧: إذا كان ق(س) = أ هـ^س ، أ > ٠ ، وكان منحنى ق(س) يقطع محور الصادات عند س = ب ، جد:

١- نقطة تقاطع المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند س = ب مع محور السينات

٢- إذا كان العمودي على المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند س = ب ، يقطع محور السينات عند س = ١٠٠ ، جد قيمة أ

① المماس مرسوم عند س = ب ، وهي نقطة تقاطع منحنى ق(س) مع محور الصادات

⇐ ب = ٠ ⇐ س١ = ٠

معادلة المماس هي: ص − ص١ = م(س − س١)

ص١ = ق(٠) = أ هـ^٠ = أ

م = قَ(س) = أ هـ^س ⇐ م = قَ(٠) = أ هـ^٠ = أ

∴ معادلة المماس: ص − أ = أ(س − ٠) ⇐ ص = أس + أ

المماس يقطع محور السينات ⇐ ص = ٠ ⇐ أس + أ = ٠

س = −١ لاحظ أن أ ≠ ٠

② معادلة العمودي: ص − أ = $\frac{-1}{أ}$ (س − ٠) ⇐ ص = $\frac{-1}{أ}$ س + أ

المماس يقطع محور السينات عند س = ١٠٠ ⇐ ص = ٠

٠ = $\frac{-1}{أ}$ (١٠٠) + أ ⇐ أ = $\frac{١٠٠}{أ}$ ⇐ أ² = ١٠٠

⇐ أ = ١٠ ، −١٠ ✗ لأن أ > ٠

س18 : أثبت أنه لا يوجد مماس ميله = 2 لمنحنى الاقتران
ق(س) = 2 $ه^{س}$ + 3 س + 5 $س^{3}$

نجد ميل المماس

م = قَ(س) = 2 $ه^{س}$ + 3 + 15 $س^{2}$ نبحث عن س حيث
م = 2 $\Leftarrow$ قَ(س) = 2

قَ(س) = 2 $ه^{س}$ + 3 + 15 $س^{2}$ = 2

$\Leftarrow$ 2 $ه^{س}$ + 15 $س^{2}$ = -1

لكن 2 $ه^{س}$ > 0 ، 15 $س^{2}$ $\geq$ 0 $\Big\}$ $\Leftarrow$ 2 $ه^{س}$ + 15 $س^{2}$ > 0 $\Leftarrow$ 2 $ه^{س}$ + 15 $س^{2}$ $\neq -1$

$\therefore$ لا يوجد مماس ميله = 2 لمنحنى ق(س)

س19 : إذا كان ق(س) = $لو_{ه}$ س أثبت أن :

1- المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند س = ه ، يمر بنقطة الأصل

2- المقطع الصادي للعمودي على المماس المرسوم عند س = ه هو ه + $\frac{1}{ه}$

نجد معادلة المماس عند س = ه $\Leftarrow$ $س_{1}$ = ه

معادلة المماس : ص − $ص_{1}$ = م (س − $س_{1}$)

ق(ه) قَ(ه) ه

$ص_{1}$ = ق(ه) = $لو_{ه}$ ه = 1

م = قَ(س) = $\frac{1}{س}$ $\Leftarrow$ م $\Big|_{س=ه}$ = قَ(ه) = $\frac{1}{ه}$

أي تأمل هل ولو يمر المماس عن نقطة الأصل

$\therefore$ ص $-1 = \frac{1}{هـ}$ (س $-$ هـ) $\Leftarrow$ ص $= \frac{1}{هـ}$ س $-1+1 = \frac{1}{هـ}$ س

حتى يمر المماس بالنقطة (٠،٠) يجب ان تحقق معادلته

عندما س = ٠ ، $\Leftarrow$ ص $= \frac{1}{هـ}(٠) = ٠ \Leftarrow$ (٠،٠) تقع على المماس

٢- معادلة العمودي هي : ص $-1 = -$ هـ(س $-$ هـ) $\Leftarrow$ ص $= -$هـ(س) $+$ هـ$^2 + 1$

المقطع السيني $\Leftarrow$ ص = ٠ $\Leftarrow -$ هـ س $+$ هـ$^2 + 1 = ٠$ ،

$\Leftarrow$ هـ س $=$ هـ$^2 + 1 \Leftarrow$ س $=$ هـ $+ \frac{1}{هـ}$

س 20 : إذا كان ص = ظا ع ، س = قا^2 ع -1 ، أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عندما ع $= -\frac{\pi}{4}$

المطلوب معادلة المماس لمنحنى ق(س)

ص $-$ ص$_1$ $=$ م (س $-$ س$_1$)

؟؟ ، صَ ، ؟؟

عندما ع $= -\frac{\pi}{4} \Leftarrow$ ص$_1$ $=$ ظا $-\frac{\pi}{4} = -$ ظا $\frac{\pi}{4} = -1$

الحذر من وضع السالب الى الزاوية

$\Leftarrow$ س$_1$ $=$ قا$^2 \frac{\pi}{4} - 1 = 2 - 1 = 1$

م $=$ صَ $= \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ع}{د س} = \frac{1}{\frac{د س}{د ع}}$

م $=$ قا^2 ع $\times \frac{1}{\frac{د س}{د ع}}$

$\frac{د س}{د ع} = 2$ قا ع قا ع ظا ع $= 2$ قا^2 ع ظا ع

$=$ قا^2 ع $\times \frac{1}{2 قا^2 ع ظا ع} = \frac{1}{2 ظا ع} \Big|_{ع = -\frac{\pi}{4}}$

م $= -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ص $+1 = -\frac{1}{2}$ (س -1)

$\Leftarrow$ ص $= -\frac{1}{2}$ س $-\frac{1}{2}$

س٢١ : من قمة برج يرتفع ٦٠م عن سطح الأرض، قذف جسم رأسياً للأعلى فكان ارتفاعه عن سطح البرج في أي لحظة يعطى بالعلاقة $ف_١ = ٢٠ن - ٥ن^٢$ وفي نفس اللحظة، ومن نقطة عن سطح الأرض أطلق جسم ثاني رأسياً للأعلى فكان ارتفاعه في أي لحظة هو $ف_٢ = أن - ٥ن^٢$، $أ < ٢$.

أجب عن الأسئلة التالية:

١- أوجد قيمة أ التي تجعل للجسمين أقصى ارتفاع عن سطح الأرض متساوي

يصل الجسمان لأقصى ارتفاع عن الأرض عندما ع = ٠

$ع_١(ن) = ٢٠ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ن = ٢$

أقصى ارتفاع للجسم الأول عن البرج $ف_١(٢) = ٢٠$ م

$\Leftarrow$ عن الأرض $= ٢٠ + ٦٠ = ٨٠$

$ع_٢(ن) = أ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ن = \frac{أ}{١٠}$

أقصى ارتفاع عن الأرض $= ف_٢(\frac{أ}{١٠}) = \frac{أ^٢}{١٠} - \frac{٥أ^٢}{١٠٠} = \frac{أ^٢}{٢٠}$

$\therefore \frac{أ^٢}{٢٠} = ٨٠ \Leftarrow أ^٢ = ١٦٠٠ \Leftarrow أ = ٤٠$ ، $-٤٠ \times أ < ٢$.

٢- أوجد المسافة التي يقطعها الجسم الثاني بعد ٧ ثواني

زمن الصعود للجسم الثاني $= \frac{أ}{١٠} = \frac{٤٠}{١٠} = ٤$

عندما $ن = ٧ < ٤ \Leftarrow$ الجسم هابط

المسافة $= ٢ \times$ أقصى ارتفاع $- ف(٧) = ١٦٠ - ٣٥ = ١٢٥$ م

٣- سرعة الجسم الأول وهو على ارتفاع ٧٥م عن سطح الأرض

عندما يكون الجسم الاول على ارتفاع ٧٥ م عن سطح الأرض

⇐ ف = ٧٥ − ٦٠ = ١٥ ⇐ ٢٠ن − ٥ن² = ١٥

⇐ ن² − ٤ن + ٣ = ٠ ⇐ (ن − ٣)(ن − ١) = ٠ ⇐ ن = ٣ ، ١

ع(٣) = ٢٠ − ٣٠ = −١٠ ، ع(١) = ٢٠ − ١٠ = ١٠

٤- المسافة التي يقطعها الجسم الأول وهو على ارتفاع ٣٥م عن الأرض:

عندما يكون الجسم الأول على ارتفاع ٣٥م عن الأرض

⇐ ف = −٢٥

∴ المسافة = ٢ × أقصى ارتفاع عن البرج − ف

= ٢ × ٢٠ − −٢٥ = ٦٥

س22: اثبت أن لمنحنى العلاقة ٣س² + ٢س ص + ص² = ٦ ، مماسين أفقيين

أوجد هذا النقاط

المماس أفقي ⇐ م = ٠ ⇐ صَ = ٠

نجد صَ: نشتق اشتقاق ضمني

٦س + ٢س صَ + ص × ٢ + ٢ص صَ = ٠

٢س صَ + ٢ص صَ = −٦س − ٢ص

⇐ صَ (٢س + ٢ص) = −٦س − ٢ص ⇐ صَ = ٢(−٣س − ص) / ٢(س + ص)

∴ م = (−٣س − ص) / (س + ص) = ٠ لأن المماس أفقي

⇐ −٣س − ص = ٠ ⇐ ص = −٣س بتعويض قيمة ص بمعادلة المنحنى

⇐ ٣س² + ٢س(−٣س) + (−٣س)² = ٦ ⇐ ٣س² − ٦س² + ٩س² = ٦

⇐ ٦س² = ٦ ⇐ س² = ١ ⇐ س = ١ أو س = −١

∴ يوجد مماسان أفقيان

الأول عندما س = ١ ⇐ ص = −٣ ⇐ (١ ، −٣) } نقاط التماس

الثاني عندما س = −١ ⇐ ص = ٣ ⇐ (−١ ، ٣)

س23 : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة :
س٣ + ص٣ = ٦ س ص ، وذلك عند نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم
ص = س في الربع الأول

معادلة المماس هي : ص - ص١ = م (س - س١)
؟؟ ص̀ ؟؟

نجد أولاً نقطة التماس (س١ ، ص١) وهي نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم
ص = س بتعويض قيمة ص في معادلة المنحنى

⇐ س٣ + س٣ = ٦ س٢ ⇐ ٢ س٣ - ٦ س٢ = ٠ ⇐ ٢ س٢ (س - ٣) = ٠

لأن نقطة الأصل تقع على محوري السيني والصادي وليس في الربع الأول
⇐ س = ٠ ✗ ، س = ٣ الربع الأول

∴ س١ = ٣ ص١ = س١ = ٣ ⇐ نقطة التماس (٣ ، ٣)

م = ص̀ |(٣،٣)

٣ س٢ + ٣ ص٢ ص̀ = ٦ س ص̀ + ص × ٦ |(٣،٣)

٢٧ + ٢٧ ص̀ = ١٨ ص̀ + ١٨ ⇐ ٩ ص̀ = - ٩
م = ص̀ = - ١
المعادلة ص - ٣ = - ١ (س - ٣)
⇐ ص = - س + ٦

س26: إذا كان ل أي مماس مرسوم لمنحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = \sqrt{ك}$ حيث ك > ٠، أثبت أن مجموع المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيم ل = ك دائماً

نفرض نقطة التماس $(س_1 ، ص_1)$ ، نجد معادلة المماس

$$ص - ص_1 = م(س - س_1)$$

نجد $م = ص' \Big|_{(س_1 ، ص_1)}$

$$\frac{ص'}{2\sqrt{ص}} + \frac{1}{2\sqrt{س}} = ٠ \Leftarrow ص' = \frac{-1}{2\sqrt{س}} \times 2\sqrt{ص} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$$

$$م \Big|_{(س_1 ، ص_1)} = -\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}}$$

$$\therefore ص - ص_1 = -\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}}\,(س - س_1)$$

المقطع السيني $\Leftarrow ص = ٠ \Leftarrow -ص_1 = -\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}}\,س + س_1\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}}$

$$\Leftarrow \sqrt{\frac{ص_1}{س_1}}\,س = س_1\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}} + ص_1$$

$$\Leftarrow س = س_1 + \sqrt{س_1 ص_1}$$

المقطع الصادي $\Leftarrow س = ٠ \Leftarrow ص - ص_1 = -\sqrt{\frac{ص_1}{س_1}} \times -س_1$

$$ص = \sqrt{س_1 ص_1} + ص_1$$

$$\therefore س + ص = س_1 + \sqrt{س_1 ص_1} + ص_1 + \sqrt{س_1 ص_1} = س_1 + 2\sqrt{س_1 ص_1} + ص_1$$

$$= (\sqrt{س_1} + \sqrt{ص_1})^2 = (\sqrt{ك})^2 = ك$$

تذكر أن

$$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \sqrt{ك}$$

$\frac{1}{2}$ × طول المقطع السيني × طول المقطع الصادي

س 25 : أوجد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = $س^{\sqrt{س}}$ عند س = ٤ والمحورين السيني والصادي

مساحة أي مثلث مكون من المماس والمحورين السيني والصادي
دائماً = $\frac{١}{٢}$ × طول المقطع السيني × طول المقطع الصادي للمماس

∴ المطلوب : إيجاد معادلة المماس لإيجاد المقاطع

معادلة المماس هي : ص − ص١ = م (س − س١)

$س_١ \to ٤$ ، $ص_١ \to ص$ ، $م \to ق'(٤)$

$ص_١ = ق(٤) = (٤)^{\sqrt{٤}} = (٤)^{٢} = ١٦$

لإيجاد ص' نأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

$\Leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^{\sqrt{س}} = \sqrt{س}\, لو_{هـ} س$ نشتق ضمني

$\frac{ص'}{ص} = \sqrt{س}\left(\frac{١}{س}\right) + لو_{هـ} س \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}\, لو_{هـ} س \Big|_{(٤ ، ١٦)}$

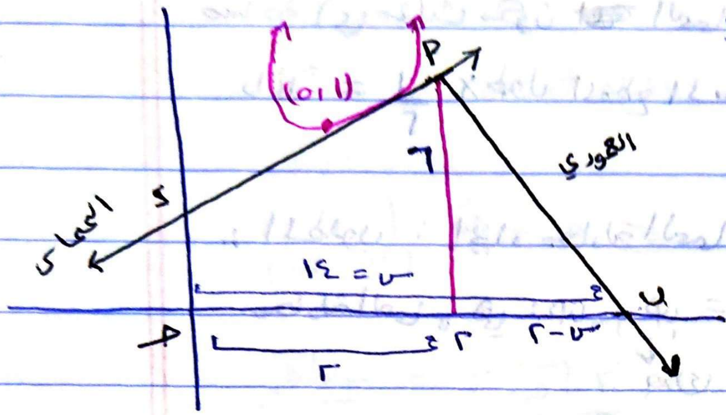
$\Leftarrow \frac{ص'}{١٦} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}\, لو_{هـ} ٤ \Leftarrow ص' = م = ٨ + ٤\, لو_{هـ} ٤$

$ص - ١٦ = (٨ + ٤\, لو_{هـ} ٤)(س - ٢)$ المقطع الصادي $= ١٦ - ١٦(٢ + لو_{هـ} ٤)$

المقطع السيني $= \frac{١٦(٢ + لو_{هـ} ٤) - ١٦}{٢(٢ + لو_{هـ} ٤)} \Leftarrow$ المساحة $= \frac{١}{٢} \times$ ------

س 26 : اوجد مساحة الشكل الرباعي المكون من المحورين السيني والصادي والمماس والعمودي على المماس والمرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² − ٢س + ٦ عندما س = ٢

نرسم أولاً منحنى ق(س) والمماس والعمودي



المساحة المطلوبة =

مساحة شبه المنحرف + مساحة المثلث

لإيجاد ص نجد المقطع الصادي للمماس ، لإيجاد س نجد المقطع السيني للعمودي

معادلة المماس : ص − ٦ = ٢(س − ٢) ، م = قَ(س) = ٢س − ٢

ص = ٢س + ٢ قَ(٢) = ٢

المقطع الصادي عندما س = ٠ ⇐ ص = ٢

معادلة العمودي : ص − ٦ = −$\frac{1}{2}$ (س − ٢) ⇐ ص = −$\frac{1}{2}$ س + ٧

المقطع السيني ⇐ ص = ٠ ⇐ س = ١٤

المساحة = $\frac{1}{2}$ (٢ + ٦)(٢) + $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٦ = ٨ + ٣٦

= ٤٤ وحدة مربعة